

Inhaltsübersicht

Vorwort	5
1. Rationale Zahlen; Ganze Zahlen	9
1.1. Skalenbereiche und Koordinaten	9
1.1.1. Ein didaktischer Leitgedanke (9); 1.1.2. Einführende Beispiele zum Begriff des Skalenbereichs (9); 1.1.3. Gemeinsamkeiten der Beispiele für Skalenbereiche (10); 1.1.4. Die Definition des Begriffs Skalenbereich (11); 1.1.5. Folgerungen für Skalenbereiche (12); 1.1.6. Koordinaten im Skalenbereich (13); 1.1.7. Diskrete Skalenbereiche (14); 1.1.8. Ordinalzahlen als Koordinaten in diskreten Skalenbereichen (16); 1.1.9. Symmetrische Skalenbereiche (17); 1.1.10. Koordinaten in symmetrischen Skalenbereichen (18); 1.1.11. Die Abbildung eines Skalenbereichs in die Zahlengerade (19); 1.1.12. Weitere Beispiele für diskrete Skalenbereiche (21); Aufgaben 1.1. (23)	
1.2. Additions- und Subtraktionsoperatoren auf Skalenbereichen	23
1.2.1. Vorgänge und Handlungsanweisungen, die auf Operatoren führen (23); 1.2.2. Die sogenannten Zustand-Operator-Aufgaben (25); 1.2.3. Definition der Additionsoperatoren auf Skalenbereichen (26); 1.2.4. Subtraktionsoperatoren (28); 1.2.5. Die Berechnung der Koordinaten der Bildelemente (28); 1.2.6. Verschiebungsoperator 0 (29); 1.2.7. Die Hintereinanderschaltung (Verkettung) von Additions- und Subtraktionsoperatoren (29); 1.2.8. Gegenoperator (33); 1.2.9. Die Isomorphie zwischen den Additionsoperatoren eines Skalenbereichs und den Größen des zum Skalenbereich gehörenden Größenbereichs (34); 1.2.10. Drei Bedeutungen des Pluszeichens (35); 1.2.11. Die Verkettung mit dem Gegenoperator; Subtraktion (35); 1.2.12. Vier Bedeutungen des Minuszeichens (36); 1.2.13. Rechnen mit Additions- und Subtraktionsoperatoren (36); 1.2.14. Die Abstraktion zur Struktur (37); Aufgaben 1.2. (37)	
1.3. Multiplikationsoperatoren auf Skalenbereichen	38
1.3.1. Streckungen der Zahlengeraden (38); 1.3.2. Verallgemeinerung auf beliebige Skalenbereiche (40); 1.3.3. Streckspiegelungen der Zahlengeraden (41); 1.3.4. Streckspiegelungen auf symmetrischen Skalenbereichen (43); 1.3.5. Kettenrechnen, Kettenaufgaben (44); 1.3.6. Isomorphie der Streckoperatoren hinsichtlich der Verkettung zu den Bruchzahlen hinsichtlich der Multiplikation (45); 1.3.7. Gegenoperator und Division (46); 1.3.8. Assoziativgesetz und Kommutativgesetz (47); 1.3.9. Abstraktion zur Struktur (48); 1.3.10. Die rationalen Zahlen (48); Aufgaben 1.3. (51)	
1.4. Die Beschreibung der Größe eines orientierten Repräsentanten	52
1.4.1. Gerichtete Strecken (52); 1.4.2. Flächen mit Umlaufsinn (53); 1.4.3. Körper mit Drehsinn (53)	
1.5. Die symmetrische Erweiterung eines Größenbereichs	54
1.5.1. Ein Rückblick auf die Additions- und Subtraktionsoperatoren (54); 1.5.2. Der Begriff der symmetrischen Erweiterung eines Größenbereichs (54); 1.5.3. Einige Folgerungen für symmetrische Erweiterungen eines Größenbereichs (55); 1.5.4.* Hat jeder Größenbereich eine symmetrische Erweiterung? (57); 1.5.5. Ganze und rationale Zahlen (59); 1.5.6. Andere Verfahren zur Gewinnung der symmetrischen Erweiterung eines Größenbereichs (59); 1.5.7. Nachweis, daß eine symmetrische Erweiterung vorliegt (62); 1.5.8. Abwandlung der Methode der Doppeltürmchen bei anderen Größenbereichen (64); 1.5.9. Zur Einführung der ganzen Zahlen (64); 1.5.10. Zur Einführung der rationalen Zahlen (65); 1.5.11. Die Subtraktion in der symmetrischen Erweiterung	

eines Größenbereichs (65); 1.5.12. Die Ordnungsrelation in der symmetrischen Erweiterung eines Größenbereichs (67); Aufgaben 1.5. (67)

1.6. Operatoren auf symmetrischen Erweiterungen von Größenbereichen 68

1.6.1. Vergleich von Elementen in symmetrischen Erweiterungen von Größenbereichen (68); 1.6.2. Bruchoperatoren auf symmetrischen Erweiterungen von Größenbereichen (68); 1.6.3. Der Inversor (70); 1.6.4. Die Verkettung von Bruchoperatoren mit dem Inversor (70); 1.6.5. Der Nulloperator (71); 1.6.6. Gegenoperator (71); 1.6.7. Addition von Bruchoperatoren auf symmetrischen Erweiterungen eines Größenbereichs (72); 1.6.8. Addition der Operatoren $\left[\begin{array}{c} m \\ - \\ n \end{array} \right]$ (73); 1.6.9. Gemischte Addition (73); 1.6.10. Das Kommutativgesetz der Addition für die Operatoren (75); 1.6.11. Das Distributivgesetz (76); 1.6.12. Isomorphie zu den Bruchzahlen (76); 1.6.13. Eine weitere Möglichkeit der Einführung der rationalen Zahlen (77); 1.6.14. Division (78); 1.6.15. Subtraktion (78); Aufgaben 1.6. (78)

1.7. Zur Didaktik der rationalen Zahlen 79

1.7.1. Ein Rückblick (79); 1.7.2. Anwendungsmöglichkeiten der rationalen (insbesondere der negativen) Zahlen (80); 1.7.3. Möglichkeiten der Einführung der rationalen Zahlen (80); 1.7.4. Motive für die Einführung der negativen Zahlen (81); 1.7.5. Soll man zuerst die ganzen Zahlen und dann die rationalen Zahlen einführen? (81)

2. Mathematische Tätigkeiten, Flußdiagramme und Algorithmen 82

2.1. Mathematische Tätigkeiten 82

2.1.1. Die Rolle der Tätigkeiten beim mathematischen Lernprozeß (82); 2.1.2. Tätigkeiten mit eindeutigem Ergebnis (82); 2.1.3. Der Zusammenhang mit dem Begriff des Operators (der Funktion, der Abbildung) (83); 2.1.4. Kettenaufgaben (84); 2.1.5. Division mit Rest (84); 2.1.6. Die Subtraktion als Umkehrung der Addition? (85); 2.1.7. Terme als Bezeichnung für das Ergebnis einer Operatoranwendung (86); 2.1.8. Multiplikations- und Divisionsoperatoren (86); Aufgaben 2.1. (87)

2.2. Algorithmen und Flußdiagramme 88

2.2.1. Tätigkeiten mit eindeutig bestimmtem Ergebnis (88); 2.2.2. Bedingte und unbedingte Befehle (88); 2.2.3. Flußdiagramm zur schriftlichen Addition (89); 2.2.4. Flußdiagramm zur schriftlichen Subtraktion (Ergänzungsverfahren) zweier natürlicher Zahlen a und b mit $a \geq b$ (90); 2.2.5. Flußdiagramm zur schriftlichen Multiplikation der Zahl a mit einem einstelligen Faktor b (91); 2.2.6. Flußdiagramm zur schriftlichen Multiplikation der Zahl a mit einem mehrstelligen Faktor b (92); 2.2.7. Flußdiagramm zur schriftlichen Division der Zahl a durch die Zahl b mit Restangabe (93); 2.2.8. Was leisten Flußdiagramme? (94); 2.2.9. Das Problem der Einsicht in die Gültigkeit eines Algorithmus (94); Aufgaben 2.2. (94)

3. Verknüpfungen und ihre Eigenschaften 95

3.1. Verknüpfung und Verknüpfungsgebilde 95

3.1.1. Definition der Verknüpfung (95); 3.1.2. Beispiele für Verknüpfungen (95); 3.1.3. Verknüpfungsgebilde (96); 3.1.4. Verknüpfungstafeln (97); Aufgaben 3.1. (97)

3.2. Eigenschaften eines Verknüpfungsgebildes 98

3.2.1. Die Kommutativität (98); 3.2.2. Der Begriff des neutralen Elementes (99); 3.2.3. Die Eigenschaft, ein neutrales Element zu besitzen (99); 3.2.4. Die Relation „ist Gegenelement (inverses Element) von“ (100); 3.2.5. Die Inverseneigenschaft eines Verknüpfungsgebildes (101); 3.2.6. Die Assoziativität (102); 3.2.7. Die Regularität (103); Aufgaben 3.2. (105)

4. Gruppen	106
4.1. Definition des Gruppenbegriffs und einfache Folgerungen	106
4.1.1. Die Gruppenaxiome (106); 4.1.2. Beispiele für Gruppen (107); 4.1.3. Folgerungen für Gruppen (107); 4.1.4. Zur Isomorphie endlicher Verknüpfungsgebilde (110); 4.1.5. Die Gruppen der Ordnung 2 (111); 4.1.6. Die Gruppen der Ordnung 3 (112); 4.1.7. Die Gruppen der Ordnung 4 (113); 4.1.8. Die Gruppen der Ordnung 5 (116); 4.1.9. Die Gruppen der Ordnung 6 (116); 4.1.10. Definition der Isomorphie für beliebige Verknüpfungsgebilde (117); Aufgaben 4.1. (120)	
4.2. Weitere Beispiele für Gruppen, die für den Unterricht geeignet sind	123
4.2.1. Zusammenstellung der Gruppentafeln bis zur Ordnung 6 (123); 4.2.2. Gruppenspiele zur Z_4 (124); 4.2.3. Ein Transformationsspiel zur Z_4 (125); 4.2.4. Gruppenspiele zur Kleinschen Vierergruppe K_4 (126); 4.2.5. Ein Reihenverkürzungsspiel zur Kleinschen Vierergruppe (128); 4.2.6. Gruppenspiele zur nicht kommutativen Sechsergruppe (130); 4.2.7. Gruppenspiele zur Z_4 (131); 4.2.8. Permutationsmaschinen nach W. Sprockhoff (133); 4.2.9. Restaddition modulo 5 (135); 4.2.10. Restaddition modulo m (135); 4.2.11. Restklassenaddition (136); 4.2.12. Restmultiplikation (139); 4.2.13. Restklassenmultiplikation (140); 4.2.14. Zusammenhang zwischen Restmultiplikation und Restklassenmultiplikation (141); 4.2.15. Die Gruppe der Deckabbildungen eines Quadrates (143); Aufgaben 4.2. (143)	
4.3. Erzeugende Elemente und Cayleygraphen	144
4.3.1. Zyklische Gruppen (144); 4.3.2. Systeme von Erzeugenden mit zwei Elementen (145); 4.3.3. Definition des Begriffs Erzeugendensystem (146); 4.3.4. Die Interpretation eines Gruppenelementes als Operator (147); 4.3.5. Die Eigenschaften der den Gruppenelementen zugeordneten Operatoren (148); 4.3.6. Der Satz von Cayley (149); 4.3.7. Cayleygraphen (150); 4.3.8. Die Eigenschaften eines Cayleygraphen (151); 4.3.9. Ein Cayleygraph der Gruppe der Deckabbildungen eines Quadrates (152); 4.3.10. Ein anderer Cayleygraph der Gruppe der Deckabbildungen eines Quadrates (153); 4.3.11. Elastische Verformung der Cayleygraphen (154); 4.3.12. Cayleygraph einer zyklischen Gruppe (155); 4.3.13. Bewegungsspiele auf Cayleygraphen (155); 4.3.14. Wie konstruiert man ein Reihenverkürzungsspiel? (157); 4.3.15. Beweise in der Grundschule? (158); 4.3.16. Definierende Relationen einer Gruppe (158); Aufgaben 4.3. (159)	
4.4. Untergruppen	159
4.4.1. Definition und Beispiele (159); 4.4.2. Der Satz von Lagrange (160); Aufgaben 4.4. (162)	
4.5. Zur Didaktik der elementaren Gruppentheorie	162
4.5.1. Zur Stoffauswahl in diesem Kapitel (162); 4.5.2. Die Lernziele des Unterrichts in Gruppentheorie in der Grundschule (162); 4.5.3. Zur Didaktik der Gruppentheorie in den Klassen 5 bis 10 (163)	
5. Körper	164
5.1. Verknüpfungsgebilde mit zwei Verknüpfungen	164
5.1.1. Distributivität (164); 5.1.2. Der Begriff des Körpers (165); 5.1.3. Beispiele für Körper (165); 5.1.4. Der Begriff des Ringes (168); Aufgaben 5.1. (168)	
5.2. In Körpern gültige Sätze	169
5.2.1. Die Körperaxiome (169); 5.2.2. Folgerungen aus den Körperaxiomen (171); Aufgaben 5.2. (176)	
Register	177