

## **I. Grundlegende psychologische und didaktische Fragen des Rechenunterrichts**

### **§ 1 Über die Rechenleistungen des fünften bis achten Schuljahres . 15**

1. Eine Übersicht über die Fehlleistungen (15)
2. Über die Ursachen der Fehlleistungen (17)

### **§ 2 Konkretes und formales Operieren im Volksschulalter ..... 21**

1. Das konkrete Operieren (21)
2. Das formale Operieren (22)
3. Die Übergangsphase vom konkreten zum formalen Operieren (24)
4. Die Aufforderung des Bildungsgutes zum formalen Denken (26)

### **§ 3 Das Bedeutungserlebnis im Rechenunterricht der Volksschule 28**

1. Die Sinnerfassung beim Neuerwerb (28)
2. Didaktisch-methodische Folgerungen (31)

### **§ 4 Die Einordnung des Neuen in umfassende Sinnzusammenhänge — Beziehungsganzheiten ..... 31**

1. Das Vorstellungsbild von den mathematischen Beziehungszusammenhängen (31)
2. Umfang und didaktische Abgrenzung der Beziehungsganzheiten (33)

### **§ 5 Der Operationsbegriff nach Piaget — Operationen und operative Systeme ..... 34**

1. Operationen als Elemente des Denkens (34)
2. Die Reversibilität der Operationen (35)
3. Die Assoziativität der Operationen (36)
4. Operationen und Automatismen (37)

### **§ 6 Didaktische Folgerungen aus dem Piagetschen Operationsbegriff: Die Durcharbeitung der Operationen — Operatorische Übungen 38**

1. Die didaktische Funktion der operatorischen Übungen und ihre Stellung im Lernprozeß (38)
2. Genauere Kennzeichnung der operatorischen Übungen (40)
3. Die Bedeutung der operatorischen Übungen für das Sachrechnen (42)

### **§ 7 Der Begriff der Verinnerlichung in psychologischer und didaktischer Sicht ..... 43**

1. Psychologische Betrachtung (43)
2. Didaktische Betrachtung (45)
3. Beispiele und Hinweise (47)

### **§ 8 Der Lernprozeß im mathematischen Unterricht ..... 47**

1. Zum Begriff des Lernens — Didaktische Abgrenzung (47)
2. Analyse des Lernvorgangs (50)

### **§ 9 Die Wiederholung als besondere Maßnahme des Lernprozesses 55**

1. Immanente Wiederholung (56)
2. Wiederholung als planmäßige Wiederaufnahme des Lernprozesses (56)
3. Die Arten der planmäßigen Wiederholung nach ihrem didaktischen Ziel (56)

<b>§ 10 Über zeichnerische Hilfen im Rechenunterricht</b> .....	<b>61</b>
1. Zeichnerische Darstellung von Mengen, Mengenbeziehungen und Operationen (61)	
2. Zeichnerische Darstellung der Sachsituation einer Textaufgabe — Situationsskizze (62)	
3. Graphische Darstellung einer funktionalen Abhängigkeit — Laufflinie (Graph einer Funktion) (63)	
4. Schaubilder (64)	
5. Stufengang zur Einführung der Schaubilder (65)	

## **II. Das Rechnen mit ganzen Zahlen in der Hauptschule**

<b>§ 11 Zahlensystem, Zahlwortbildung und Zahlenschreibung</b> .....	<b>72</b>
1. Die Entwicklung der Zählreihe (72)	
2. Zahlensystem und Zahlwortbildung (74)	
3. Zahlensystem und Ziffernsystem (77)	
4. Die Schreibweise der Zahlen mit römischen Ziffern (79)	

<b>§ 12 Das Rechnen mit ganzen Zahlen als Grundlage des weiterführenden Rechnens in der Hauptschule</b> .....	<b>80</b>
---	-----------

<b>§ 13 Die Erweiterung des Zahlenraums über 1 Million — die unendliche Zahlenreihe</b> .....	<b>80</b>
1. Grundsätzliche Überlegungen (80)	
2. Wiederholung des Zahlenraums bis 1 000 000 (81)	
3. Der Aufbau bis 1 Milliarde und 1 Billion (84)	
4. Über 1 Billion hinaus — die unendliche Zahlenreihe (87)	

<b>§ 14 Das Kopfrechnen mit ganzen Zahlen</b> .....	<b>89</b>
1. Aufrunden und Abrunden von Zahlen — Überschlagendes Rechnen (89)	
2. Addieren, Subtrahieren und Ergänzen (91)	
3. Verdoppeln und Halbieren (92)	
4. Multiplizieren (93)	
5. Dividieren (94)	

<b>§ 15 Das schriftliche Rechnen</b> .....	<b>95</b>
1. Grundsätzliche Feststellungen (95)	
2. Die schriftliche Addition (96)	
3. Die schriftliche Subtraktion (97)	
4. Die schriftliche Multiplikation (99)	
5. Die schriftliche Division (104)	

<b>§ 16 Gesetze über die Teilbarkeit der ganzen Zahlen</b> .....	<b>107</b>
1. Allgemeine Gesetze über die Teilbarkeit (107)	
2. Besondere Teilbarkeitsregeln (108)	
3. Die Teilbarkeitsregeln in der Unterrichtspraxis (109)	

## **III. Das Sachrechnen**

<b>§ 17 Die Voraussetzungen des Sachrechnens</b> .....	<b>112</b>
--	------------

<b>§ 18 Sachrechnen und sachrechnerisches Denken als Mittelpunkt des Rechenunterrichts</b> .....	<b>113</b>
1. Über den Zusammenhang von Einführung, Durcharbeitung, Übung und Anwendung (Sachrechnen) (113)	
2. Zum Begriff der Anwendung (115)	

**§ 19 Die verschiedenen Arten des Sachrechnens nach ihrer didaktischen Zielsetzung** ..... 116

1. Aufgaben zur Schulung der Rechenfähigkeit — Die Textaufgaben des Rechenbuches (116) 2. Sachrechnen im eigentlichen Sinne (120) 3. Selbstgebildete lebenspraktische Aufgaben (122) 4. Denksportaufgaben — Knacknüsse (122)

**§ 20 Analyse des Lösungsvorganges einer Sachaufgabe und die daraus sich ergebenden unterrichtlichen Maßnahmen** ..... 123

1. Gefahrenpunkte bei der Lösung von Sachaufgaben (124) 2. Analyse des Lösungsvorganges (124) 3. Weitere unterrichtspraktische Maßnahmen und Hinweise (127)

## **IV. Die gewöhnliche Bruchrechnung**

### **ERSTER TEIL: GRUNDSÄTZLICHE ÜBERLEGUNGEN**

**§ 21 Über das Wesen der Bruchzahlen und die verschiedenen Arten der Bruchauffassung** ..... 129

1. Sachlogische Überlegungen zum Begriff der Bruchzahl (129) 2. Entwicklungsstufen der Bruchauffassung (131)

**§ 22 Die Zifferschreibung der Bruchzahlen und die Rechenregeln** 133

1. Die Zifferschreibung der Bruchzahlen (133) 2. Die Rechenregeln in der Bruchrechnung (134)

**§ 23 Das operative Denken im Bereich der ganzen Zahlen und der Bruchzahlen** ..... 134

1. Auffassung und Darstellung von ganzen und gebrochenen Zahlen (135) 2. Addition und Subtraktion bei ganzen und gebrochenen Zahlen (135) 3. Die Multiplikation bei ganzen und gebrochenen Zahlen (136) 4. Das Messen (Enthaltensein) bei ganzen und gebrochenen Zahlen (139) 5. Das Teilen (Verteilen) bei ganzen und gebrochenen Zahlen (140)

**§ 24 Die Anschauungsmittel in der Bruchrechnung** ..... 141

**§ 25 Die Verteilung der Bruchrechnung auf die verschiedenen Schuljahre** ..... 146

1. Grundsätzliche Überlegungen (146) 2. Erste Ebene der Behandlung (Grundschule): Handelnder Umgang mit konkreten Brüchen (146) 3. Zweite Ebene der Behandlung (fünftes Schuljahr): Anschauliches Rechnen mit Brüchen (147) 4. Dritte Ebene der Behandlung (sechstes Schuljahr): Systematisch-abstrakte Behandlung der Bruchrechnung (148)

### **ZWEITER TEIL: UNTERRICHTSPRAKTISCHE AUSFÜHRUNGEN**

**§ 26 Anschauliches Rechnen mit Brüchen im fünften Schuljahr — Zweite Ebene der Behandlung** ..... 149

1. Behandlung der Bruchfamilie Halbe-Viertel-Achtel (150) 2. Die Bruchfamilie Drittel-Sechstel-Zwölftel (155) 3. Die Bruchfamilie Fünftel-Zehntel (155) 4. Multiplikation und Division in der Bruchrechnung des fünften Schuljahres (155) 5. Gemischte Zahlen (157)

**§ 27 Die Erweiterung der Grundlagen für das Bruchrechnen im sechsten Schuljahr — Dritte Ebene der Behandlung** ..... 158

1. Die unbegrenzte Menge der Bruchzahlen (158) 2. Der Bruch als Teil von mehreren Ganzen (159)

- § 28 Erweitern und Kürzen von Brüchen** ..... 160  
 1. Erweitern von Brüchen (160) 2. Kürzen von Brüchen (162) 3. Zur Schreibweise des Erweiterns und Kürzens (162)
- § 29 Addition und Subtraktion von Brüchen** ..... 163  
 1. Addition und Subtraktion gleichnamiger Brüche (163) 2. Gleichnamigmachen von Brüchen — der Hauptnenner (164) 3. Addition und Subtraktion ungleichnamiger Brüche (166)
- § 30 Multiplikation eines Bruches mit einer ganzen Zahl** ..... 167  
 1. Grundsätzliche Überlegungen (167) 2. Stufengang (168)
- § 31 Division eines Bruches durch eine ganze Zahl** ..... 169  
 1. Grundsätzliche Überlegungen (169) 2. Stufengang (171)
- § 32 Der Bruchvergleich als Vorbereitung der schwierigen Operationsfälle der Bruchrechnung** ..... 175  
 1. Die von der Grundschule her bekannten Formen des Vergleichens (175) 2. Der Bruchvergleich — es werden beliebige ganzzahlige Größen miteinander verglichen (176) 3. Der Bruch als Vielfaches eines Ganzen (178)
- § 33 Multiplikation mit einem Bruch (der Multiplikator ist ein Bruch)** ..... 179  
 1. Der Multiplikand ist eine ganze Zahl (179) 2. Der Multiplikand ist ein Bruch — Bruch mal Bruch (181)
- § 34 Messen mit einem Bruch (Enthaltensein)** ..... 182  
 1. Die zu messende Größe ist ein ganzzahliges Vielfaches des Maßes oder der Meßgröße (183) 2. Die zu messende Größe ist kein ganzzahliges Vielfaches des Maßes oder der Meßgröße (das Vielfache ist eine Bruchzahl) (183)
- § 35 Division durch einen Bruch** ..... 184  
 1. Das Teilen durch einen Bruch wird von Beispielen der Schlußrechnung aus eingeführt (185) 2. Das Teilen durch einen Bruch wird als Umkehrung des Malnehmens — Bruch mal Bruch — entwickelt (186) 3. Das Teilen durch einen Bruch wird vom Bruchvergleich her bestimmt (189) 4. Das Teilen wird in Analogie zum Messen durchgeführt (189) 5. Übungsreihen zur Division durch einen Bruch (190)

## V. Die dezimale Bruchrechnung

### ERSTER TEIL: GRUNDSÄTZLICHE ÜBERLEGUNGEN

- § 36 Zum Begriff des Dezimalbruches** ..... 192  
 1. Geschichtliches (192) 2. Die Besonderheit der Dezimalbrüche (192) 3. Die Verwandlung gemeiner Brüche in Dezimalbrüche (193) 4. Zur Sprechweise der Dezimalbrüche — Dezimalzahl oder Dezimalbruch? (195)

**§ 37 Grundsätzliche didaktische Überlegungen ..... 196**

1. Die dezimale Bruchrechnung als Sonderfall der gewöhnlichen Bruchrechnung (196)
2. Die Voraussetzungen für die Einführung in die dezimale Bruchrechnung (198)
3. Die Verteilung der dezimalen Bruchrechnung auf das fünfte und sechste Schuljahr (199)

**ZWEITER TEIL: UNTERRICHTSPRAKTISCHE AUSFÜHRUNGEN**

**§ 38 Einführung der Dezimalbrüche Zehntel, Hundertstel und Tausendstel — fünftes Schuljahr ..... 200**

**I. ZEHNTEL IN DEZIMALER FORM**

1. Konkrete Zehntel am Meterstab (200)
2. Zehntel ohne Benennung (202)
3. Ganze und Zehntel als Dezimalzahlen (202)
4. Rechnen mit dezimalen Zehnteln (202)

**II. HUNDERTSTEL UND TAUSENDSTEL IN DEZIMALER FORM**

1. Konkrete Hundertstel (Tausendstel) am Meterstab (203)
2. Hundertstel (Tausendstel) ohne Benennung (203)
3. Ganze und Hundertstel (Tausendstel) als Dezimalzahlen (204)
4. Rechnen mit dezimalen Hundertsteln (Tausendsteln) (204)

**§ 39 Die Dezimalbrüche Zehntel bis Tausendstel in ihrem Zusammenhang — fünftes Schuljahr ..... 204**

**§ 40 Operationen mit Dezimalzahlen im fünften Schuljahr ..... 206**

1. Addition und Subtraktion von Dezimalzahlen (207)
2. Multiplikation und Division von Dezimalzahlen mit einstelligen ganzen Zahlen (208)

**§ 41 Einführung der Dezimalzahlen mit vier und mehr Stellen — sechstes Schuljahr ..... 211**

1. Die dezimale Bruchrechnung im sechsten Schuljahr (211)
2. Die Wiederholung der ein- bis dreistelligen Dezimalzahlen (212)
3. Die Einführung der vier- und mehrstelligen Dezimalzahlen (212)

**§ 42 Erweitern und Kürzen von Dezimalzahlen — Auf- und Abrunden ..... 213**

1. Erweitern und Kürzen (213)
2. Auf- und Abrunden der Dezimalzahlen (215)

**§ 43 Addition und Subtraktion von Dezimalzahlen ..... 215**

1. Kopfrechnen und halbschriftliches Rechnen (216)
2. Schriftliches Addieren und Subtrahieren (217)

**§ 44 Multiplikation einer Dezimalzahl mit einer ganzen Zahl .... 218**

1. Kopfrechnen und halbschriftliches Rechnen (218)
2. Schriftliches Multiplizieren (220)

**§ 45 Division einer Dezimalzahl durch eine ganze Zahl ..... 223**

1. Kopfrechnen und halbschriftliches Rechnen (223)
2. Schriftliches Dividieren (224)

**§ 46 Multiplikation einer Dezimalzahl mit einer Dezimalzahl .... 225**

1. Kopfrechnen (225)
2. Schriftliches Multiplizieren (226)

**§ 47 Division einer Dezimalzahl durch eine Dezimalzahl ..... 227**

1. Kopfrechnen (227)
2. Schriftliches Dividieren (228)

- § 48 Gewöhnliche und dezimale Brüche im Zusammenhang . . . . 230**  
1. Verwandlung gewöhnlicher Brüche in dezimale Brüche (230) 2. Verwandlung dezimaler Brüche in gewöhnliche Brüche (231) 3. Dezimale Brüche und gewöhnliche Brüche in einer Aufgabe (231)

## **VI. Die Schlußrechnung**

### **ERSTER TEIL: GRUNDSÄTZLICHE ÜBERLEGUNGEN**

- § 49 Die Schlußrechnung in der Grundschule und in der Hauptschule . . . . . 234**

1. Die Besonderheit der Schlußrechnung (234) 2. Die Schlußrechnung in der Grundschule und in der Hauptschule (234)

- § 50 Orientierender Überblick über die Schlußrechnung in didaktischer und methodischer Sicht . . . . . 235**

1. Übersicht über die Schlußformen nach ihrem funktionalen Zusammenhang (235)  
2. Übersicht über die traditionellen methodischen Stufen (237) 3. Übersicht über die verschiedenen Lösungswege (239)

- § 51 Der Funktionsbegriff in didaktischer Sicht als Grundlage der Schlußrechnung . . . . . 243**

1. Vorbemerkung (243) 2. Didaktische Überlegungen zum Funktionsbegriff (244)  
3. Psychologische Überlegungen zum Funktionsbegriff (247) 4. Folgerungen aus den didaktischen und psychologischen Überlegungen (249)

- § 52 Die indirekte oder umgekehrte Fragestellung bei den Aufgaben der Schlußrechnung . . . . . 250**

1. Ein Beispiel zur Verdeutlichung (250) 2. Der mathematische Zusammenhang zwischen direkter und umgekehrter Fragestellung (251) 3. Die psychologischen Schwierigkeiten bei der umgekehrten Fragestellung (251) 4. Die schriftlichen Lösungsformen bei der umgekehrten Fragestellung (252)

### **ZWEITER TEIL: DIE UNTERRICHTSPRAKTISCHE GESTALTUNG DER SCHLUSSRECHNUNG**

- § 53 Die Verteilung der Schlußrechnung auf die verschiedenen Schuljahre . . . . . 255**

1. Fünftes Schuljahr (255) 2. Sechstes Schuljahr (255) 3. Siebentes Schuljahr (256)  
4. Achtes Schuljahr (256)

- § 54 Einführung in die Schlußrechnung mit geradem Verhältnis . . . 256**

1. Anschauliche Darstellung der funktionalen Abhängigkeit (257) 2. Zahlenmäßige Darstellung der funktionalen Abhängigkeit in Form der Preistabelle (257) 3. Vertiefen der Einsicht in die funktionale Abhängigkeit durch Vergleichen von Wertepaaren (258) 4. Operatorische Übungen zur Anwendung der funktionalen Gesetzmäßigkeit (259) 5. Zusammenfassung

- § 55 Weiterführung der Schlußrechnung mit geradem Verhältnis in den verschiedenen Schuljahren . . . . . 261**

1. Die Weiterführung im fünften Schuljahr (261) 2. Die Weiterführung im sechsten Schuljahr (263) 3. Die Weiterführung im siebenten und achten Schuljahr (265)

**§ 56 Die Sachaufgaben des Zwei- und Dreisatzes . . . . . 266**

**§ 57 Die graphische Darstellung der funktionalen Abhängigkeit mit geradem linearen Verhältnis . . . . . 268**

1. Einführung der graphischen Darstellung (368) 2. Die graphische Darstellung als Rechenhilfe (270)

**§ 58 Die Schlußrechnung mit umgekehrtem Verhältnis . . . . . 271**

1. Die Sachbezogenheit der funktionalen Abhängigkeit mit umgekehrtem Verhältnis (271) 2. Methodische Einführung der funktionalen Abhängigkeit mit umgekehrtem Verhältnis (272) 3. Zwei verschiedene Lösungsmethoden für die Aufgaben mit umgekehrtem Verhältnis (274) 4. Die graphische Darstellung der Abhängigkeit mit umgekehrtem Verhältnis (276) 5. Weitere unterrichtspraktische Hinweise (276)

**§ 59 Der zusammengesetzte Schluß . . . . . 276**

## **VII. Die Prozentrechnung**

### **ERSTER TEIL: ALLGEMEINE PROZENTRECHNUNG**

**§ 60 Zur begrifflichen Orientierung innerhalb der Prozentrechnung . . . . . 279**

1. Geschichtliches (279) 2. Allgemeine und angewandte Prozentrechnung (279) 3. Grundbegriffe und Grundaufgaben der Prozentrechnung (280)

**§ 61 Der Prozentbegriff und sein Zusammenhang mit den verschiedenen Lösungsformen der Grundaufgaben . . . . . 281**

1. Zwei verschiedene Auffassungen des Prozentbegriffs (281) 2. Die verschiedenen Lösungsformen der Grundaufgaben (283) 3. Zwei weitere Lösungsformen für die zweite Grundaufgabe (285) 4. Die Lösung nach der Formel (286)

**§ 62 Übersicht über den methodischen Aufbau der Prozentrechnung . . . . . 287**

1. Grundsätzliche methodische Überlegungen (287) 2. Übersicht in Form eines Stufenanges (288)

**§ 63 Die methodische Einführung des Prozentbegriffs als Hunderstelbruch — Durcharbeitung des Beziehungszusammenhangs . . . . . 289**

1. Erste Stufe des Vergleichs: Die Vergleichszahl ist ein beliebiger Bruch (290) 2. Zweite Stufe des Vergleichs: Der Vergleichsbruch wird in Hundertsteln ausgedrückt (292) 3. Dritte Stufe des Vergleichs: Die Bezeichnung „Prozent“ wird eingeführt (293) 4. Durcharbeitung des Prozentbegriffs mit Hilfe des Prozentblattes (294)

**§ 64 Anbahnung der rechnerischen Fertigkeit an einfachen Rechenaufgaben — Erste Ebene der Behandlung . . . . . 296**

1. Ein Hinweis zur sprachlichen und schriftlichen Darstellungsform (296) 2. Anbahnung der rechnerischen Fertigkeit im operativen Umgang mit dem Prozentbegriff (296) 3. Sachaufgaben (301)

<b>§ 65 Weiterführung der rechnerischen Fertigkeit an schwierigen Rechenfällen — Zweite Ebene der Behandlung</b> .....	<b>302</b>
1. Notwendige Vorübungen (302) 2. Die erste Grundaufgabe (304) 3. Die zweite Grundaufgabe (305) 4. Die dritte Grundaufgabe (308) 5. Prozentsätze über 100% (308) 6. Die angewandten Aufgaben der Prozentrechnung (310)	

<b>§ 66 Besondere Übungen zur Erhaltung des Verständnisses und der Rechenfertigkeit in der Prozentrechnung</b> .....	<b>311</b>
1. Überschlagentes Rechnen in der Prozentrechnung (311) 2. Zusammenfassende Wiederholung zum Verständnis des Prozentsatzes und seiner Berechnung (313) 3. Die täglichen Rechenübungen in der Prozentrechnung (314)	

<b>§ 67 Zeichnerische Hilfen in der Prozentrechnung</b> .....	<b>316</b>
1. Schaubilder in der Prozentrechnung (316) 2. Graphische Lösung von Prozentaufgaben (316)	

## ZWEITER TEIL: ANGEWANDTE PROZENTRECHNUNG

<b>§ 68 Die Gewinn- und Verlustrechnung</b> .....	<b>320</b>
1. Die neuen Begriffe (320) 2. Methodische Überlegungen (321)	

<b>§ 69 Die Rabattrechnung: Barzahlung, Rabatt und Skonto</b> .....	<b>322</b>
1. Begriffliches (322) 2. Didaktisches (323)	

<b>§ 70 Die Gewichtsrechnung: Brutto — Tara — Netto</b> .....	<b>324</b>
---	------------

<b>§ 71 Die Zinsrechnung — Zinseszinsen</b> .....	<b>324</b>
1. Die neuen Begriffe in der Zinsrechnung (324) 2. Die Grundaufgaben der Zinsrechnung und ihre Lösungsformen (327) 3. Die ratenweise Tilgung einer Hypothekenschuld — Tilgungs- oder Amortisationsplan (332) 4. Vom Normalverfahren abweichende Berechnungsmethoden der Zinsen (334) 5. Zinseszinsrechnung (336)	

## VIII. Die Verhältnisrechnung und ihre Anwendungen

<b>§ 72 Grundsätzliche Überlegungen zur Verhältnisrechnung</b> .....	<b>339</b>
1. Arithmetisches und geometrisches Verhältnis (339) 2. Die Verhältnisrechnung in ihrer Beziehung zur Bruchrechnung und Prozentrechnung (340)	

<b>§ 73 Unterrichtspraktische Behandlung der Verhältnisrechnung</b> .....	<b>340</b>
1. Zur Einführung (340) 2. Das Rechnen mit Zahlenverhältnissen (341)	

<b>§ 74 Die Verteilungs- oder Gesellschaftsrechnung</b> .....	<b>342</b>
1. Arithmetisches Verhältnis (343) 2. Geometrisches Verhältnis (344) 3. Arithmetisch-geometrisches Verhältnis (344)	

<b>§ 75 Die Mischungsrechnung</b> .....	<b>345</b>
1. Übersicht nach Sachgesichtspunkten (345) 2. Übersicht nach methodischen Gesichtspunkten (346)	

<b>§ 76 Die Durchschnittsrechnung</b> .....	<b>350</b>
1. Zum Begriff des Durchschnitts (350) 2. Methodische Überlegungen (350)	