

# Inhalt

## Einführung

1. Aufgabe und Wesen der Trigonometrie .....	15
2. Bedeutung und Einordnung der Trigonometrie .....	17
3. Einige historische Bemerkungen .....	18

## Teil I: Ebene Trigonometrie

### Kapitel 1: Das rechtwinklige Dreieck

4. Die trigonometrischen Funktionen spitzer Winkel .....	23
5. Berechnung rechtwinkliger Dreiecke, erste Anwendungen .....	25
6. Beziehungen der Winkelfunktionen untereinander .....	26
7. Funktionswerte für spezielle Winkel .....	31

### Kapitel 2: Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen

8. Die trigonometrischen Funktionen beliebiger Winkel .....	34
9. Die Periodizität der trigonometrischen Funktionen .....	39
10. Die Drehungs- und Spiegelsätze .....	40
11. Bestimmung des Arguments aus einem Funktionswert .....	44

### Kapitel 3: Die Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen

12. Die Funktionen von Winkelsummen und Winkeldifferenzen .....	45
13. Die Funktionen mehrfacher und geteilter Winkel .....	50
14. Die Verwandlungsformeln .....	55
15. Die Bedeutung der Additionstheoreme .....	58

### Kapitel 4: Berechnung der trigonometrischen Funktionen

16. Strenge Formeln für die trigonometrischen Funktionen bestimmter Winkel ..	62
17. Die Funktionen kleiner Winkel .....	67
18. Reihenentwicklungen der Winkelfunktionen .....	71
19. Trigonometrische Tafeln .....	76

### Kapitel 5: Das schiefwinklige Dreieck

20. Winkelbeziehungen im Dreieck .....	85
21. Der Sinussatz .....	88
22. Der Kosinussatz .....	91
23. Die Formeln von MOLLWEIDE und NEPER .....	94
24. Tangens der halben Dreieckswinkel .....	98
25. Ableitung der Dreieckssätze aus dem Kosinussatz .....	99
26. Die Grundaufgaben der Dreiecksauflösung, Hinweise für die praktische Rechnung .....	101
27. Formeln für die Fläche, den In- und Umkreisradius und den Umfang des Dreiecks .....	108
28. Differentialformeln des ebenen Dreiecks .....	111

### Kapitel 6: Weitere Beziehungen und Sätze für das schiefwinklige Dreieck

29. Der Satz von PAPPUS .....	117
30. Die Sätze von CEVA und MENELAOS .....	119
31. Der Satz von STEWART .....	122
32. Der Satz von MORLEY .....	124
33. Einige Sonderfälle der Dreiecksberechnung, der Dreiwinkelsatz, Ungleichungen für das Dreieck .....	127
34. Polygonzüge .....	136

### Kapitel 7: Trigonometrie des Vierecks

35. Die Teildreiecke .....	145
36. Winkelbeziehungen und goniometrische Formeln für das allgemeine Viereck .....	147
37. Gleichungen zwischen Seiten und Diagonalen im Viereck; Flächenformeln für das allgemeine Viereck .....	152
38. Trapez, Parallelogramm, Sehnen- und Tangentenviereck .....	155

### Kapitel 8: Ergänzungen zu den trigonometrischen Funktionen, weitere algebraische und geometrische Anwendungen

39. Trigonometrische Deutung der komplexen Zahlen, Binomialformel von MOIVRE, Anwendungen .....	160
40. Die Kreisbogen- oder Arcusfunktionen .....	166
41. Die Ableitungen der trigonometrischen Funktionen und der Arcusfunktionen, Mittelwerte der Kreisfunktionen Sinus und Kosinus .....	169
42. Kreisfunktionen und Exponentialfunktion .....	175
43. Periodizität der Exponentialfunktion, Anwendungen .....	181
44. Kreisfunktionen und Hyperbelfunktionen .....	184
45. Fortsetzung der Reihenentwicklungen der trigonometrischen Funktionen, die Reihen der Arcusfunktionen, Konvergenzfragen .....	189
46. Die unendlichen Produkte für Sinus und Kosinus .....	197

47. Methoden der Hilfswinkel (Trigonometrische Lösung quadratischer und kubischer Gleichungen, trigonometrische Logarithmierung) .....	201
48. Goniometrische Gleichungen .....	210
49. Die kubischen Gleichungen einiger regelmäßiger Vielecke .....	219

## Teil II: Sphärische Trigonometrie

### Kapitel 9: Vorbereitungen aus der sphärischen Geometrie

50. Übergang von der Geometrie in der Ebene zur Geometrie auf der Kugel	223
51. Kreise und Entfernungen auf der Kugel .....	224
52. Das sphärische Zweieck .....	227
53. Das sphärische Dreieck .....	228
54. Das Polardreieck .....	232
55. Dreikant und Polardreikant .....	233
56. Kongruenzsätze für Dreikant und sphärisches Dreieck .....	235

### Kapitel 10: Die Grundformeln der sphärischen Trigonometrie

57. Die Grundaufgaben der sphärischen Trigonometrie .....	238
58. Eine erste Ableitung für Sinus-, Seitenkosinus- und Sinus-Kosinus-Satz ...	239
59. Eine weitere Ableitung für Sinus-, Seitenkosinus- und Sinus-Kosinus-Satz .....	241
60. Winkelkosinussatz, polarer Sinus-Kosinussatz und Kotangenssatz .....	245
61. Die Bedeutung der Grundformeln für die Lösung sphärischer Dreiecksaufgaben .....	248
62. Ungleichungen zwischen den Seiten und Winkeln eines sphärischen Dreiecks .....	250

### Kapitel 11: Die logarithmizierbaren Formeln des sphärischen Dreiecks

63. Die Halbstückrelationen .....	254
64. Die Gleichungen von DELAMBRE und von NEPER .....	257
65. Die Formeln von L'HUIPLIER und SERRET .....	261

### Kapitel 12: Lösung der Grundaufgaben für das sphärische Dreieck

66. Rechnerische Lösung der Grundaufgaben .....	269
67. Diskussion der Grundaufgabe 5 .....	275
68. Zeichnerische Lösungen für die Grundaufgaben .....	277

### Kapitel 13: Das rechtwinklige und das rechtseitige Dreieck

69. Die Grundformeln für das rechtwinklige Dreieck, die NEPERSche Regel ...	282
70. Andere Herleitung der Grundformeln des rechtwinklig sphärischen Dreiecks .....	285

71. Auflösung des rechtwinkligen Dreiecks .....	286
72. Berechnung des rechtseitigen, gleichschenkligen und gleichseitigen Dreiecks .....	290

### **Kapitel 14: Weitere Beziehungen und Sätze für das allgemeine sphärische Dreieck**

73. Der Eckensinus .....	292
74. Die Höhen und die Radien für Um- und Inkreis des sphärischen Dreiecks	295
75. Fläche des sphärischen Dreiecks .....	300
76. Weitere Beziehungen zwischen den Seiten und Winkeln des sphärischen Dreiecks, die Sätze von STEWART, CEVA, MENELAOS und LEXELL .....	302
77. Differentialformeln für das sphärische Dreieck .....	309
78. Zusammenhang zwischen sphärischer und ebener Trigonometrie .....	312
79. Verallgemeinerung des sphärischen Dreiecksbegriffes .....	316

### **Kapitel 15: Stereometrische Anwendungen, weitere sphärische Aufgaben**

80. Anwendungen der Projektionssätze .....	324
81. Begriff der Ecke, regelmäßige sphärische Polygone, Aufteilung der Kugeloberfläche .....	327
82. Trigonometrische Konstruktion und Berechnung der regelmäßigen Polyeder	332
83. Die Vierpunktbeziehung, der Satz von PTOLEMÄUS für die Kugel .....	339
84. EULERS Tetraederformel, Umkugelradius für das Tetraeder .....	341
85. Kreispotenz und Potenzlinie auf der Kugel .....	343
86. Kreisbüschel auf der Kugel, Berührung zweier Kugeln .....	348

## **Teil III: Trigonometrische Lösung von Aufgaben der mathematischen Geographie, Geodäsie und sphärischen Astronomie**

### **Kapitel 16: Grundaufgaben der mathematischen Geographie**

87. Gestalt und Größe der Erde .....	355
88. Geographische Koordinaten auf der Erdkugel .....	357
89. Parallelkreis- und Meridianbögen, Zonenflächen .....	359
90. Entfernungen, Kurswinkel und Flächen .....	361
91. Die Loxodrome .....	367
92. Die Peilungsaufgaben .....	370
93. Verschiedene Aufgaben zur mathematischen Geographie .....	373

### **Kapitel 17: Einige kartographische Netzentwürfe**

94. Grundbegriffe der Kartenentwurfslehre .....	376
95. Das Abbildungsgesetz für die echten azimutalen Entwürfe .....	379
96. Zeichnerische Lösung sphärischer Aufgaben mit Hilfe der stereographischen und gnomonischen Projektion .....	382
97. Die normale und die transversale Mercatorprojektion .....	391

### Kapitel 18: Geodätische Aufgaben

98. Der Satz von LEGENDRE und die SOLDNERSche Additamentenmethode . . . . .	396
99. Berechnung geodätischer Dreiecke und Vierecke nach LEGENDRE und SOLDNER . . . . .	403
100. Geodätische Koordinatensysteme auf der Kugel . . . . .	407
101. Geographische Koordinaten und Polarkoordinaten auf der Kugel . . . . .	408
102. Geodätische Linearkoordinaten auf der Kugel . . . . .	418
103. Transformation geodätischer Linearkoordinaten auf der Kugel . . . . .	424
104. Geodätische Abbildungen . . . . .	427

### Kapitel 19: Grundbegriffe der sphärischen Astronomie

105. Aufgabe und Arbeitsweise der sphärischen Astronomie . . . . .	430
106. Die scheinbare Himmelskugel . . . . .	431
107. Die Koordinatensysteme der sphärischen Astronomie . . . . .	433
108. Das astronomische Fundamentaldreieck . . . . .	436
109. Die scheinbare tägliche Bewegung der Gestirne . . . . .	439
110. Sternzeit und Sonnenzeit . . . . .	446
111. Sonnenuhren . . . . .	451
112. Anwendung der Grundformeln der sphärischen Astronomie . . . . .	453
113. Einige Verfahren der astronomischen Zeit-, Orts- und Azimutbestimmung	458
Schrifttum . . . . .	471
Sachregister . . . . .	475
Namenregister . . . . .	481