

# INHALT

Logische Abhängigkeit der einzelnen Abschnitte . . . . .	10
§ 0. Terminologie und ein Satz über Funktionengleichungen . . . . .	11
§ 1. Teilbarkeitslehre . . . . .	18
1.A Definitionen . . . . .	18
1.B Vielfachenmengen . . . . .	20
1.C Das kleinste gemeinsame Vielfache . . . . .	25
1.D Der größte gemeinsame Teiler . . . . .	27
1.E Primzahlen . . . . .	32
1.F Primfaktorzerlegung . . . . .	35
1.G Exponentenfolgen . . . . .	38
§ 2. Rationale Zahlen . . . . .	45
2.A Vorbereitungen . . . . .	45
2.B Nennermengen und Quotientenmengen . . . . .	47
2.C Addition in $Q\mathcal{N}$ . . . . .	51
2.D Multiplikation in $Q\mathcal{N}$ . . . . .	55
2.E Anordnung in $Q\mathcal{N}$ . . . . .	62
2.F Einbettungen . . . . .	65
2.G Ergänzungen . . . . .	69
§ 3. Gebilde und Gruppen . . . . .	73
3.A Verknüpfungen und Gebilde . . . . .	73
3.B Matrizen . . . . .	78
3.C Gruppen . . . . .	84
3.D Wichtige Beispiele von Gruppen . . . . .	87
3.E Untergruppen . . . . .	93
3.F Nebenklassen und der Satz von Lagrange . . . . .	96
§ 4. Morphismen . . . . .	104
4.A Morphismen von Gebilden . . . . .	104
4.B Matrizen . . . . .	110
4.C Gruppenmorphismen . . . . .	112
4.D Permutationsgruppen . . . . .	121
§ 5. Zyklische Gruppen . . . . .	125
5.A Von einem Element erzeugte Untergruppen . . . . .	125
5.B Kennzeichnungen von $(\mathbb{Z}, +)$ . . . . .	131
5.C Zyklische Gruppen . . . . .	136
§ 6. Direkte Produkte . . . . .	141
6.A Definitionen . . . . .	141
6.B Die Addition von Matrizen . . . . .	142

6.C Die multiplikative Gruppe der rationalen Zahlen . . . . .	143
6.D Quadratzahlen in $\mathbb{Q}$ . . . . .	148
§ 7. Ringe und Körper . . . . .	151
7.A Definitionen und einfache Eigenschaften . . . . .	151
7.B Matrizenringe . . . . .	155
7.C Einheitengruppen, Körper . . . . .	157
7.D Additive und multiplikative Gruppen von $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ . . . . .	161
7.E Kennzeichnung von $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q} \setminus \mathcal{N}$ . . . . .	163
7.F Die Isomorphie von Quotientenringen . . . . .	170
§ 8. Die Gruppe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ . . . . .	174
8.A Die Gruppe $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +_1)$ und ihre endlichen Untergruppen . . . . .	174
8.B Gegenüberstellung von $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ . . . . .	177
8.C Struktureigenschaften von $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ . . . . .	178
§ 9. Endomorphismenringe . . . . .	183
9.A Die Gruppe $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$ . . . . .	183
9.B Multiplikationen auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . . . . .	184
9.C Endomorphismen: Definition und Beispiele . . . . .	187
9.D Endomorphismen: Allgemeine Theorie . . . . .	190
9.E Die Darstellung von $[\text{End}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +), \oplus, \circ]$ mit Matrizen . . . . .	195
9.F Noch einmal Multiplikationen auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . . . . .	200
§ 10. Angeordnete Ringe und Körper . . . . .	205
10.A Definitionen und einfache Eigenschaften . . . . .	205
10.B Die Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ . . . . .	208
10.C Anordnungen von $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ . . . . .	213
10.D Einbettung von $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ in $\mathbb{R}$ . . . . .	217
10.E $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ als angeordnete Gebilde . . . . .	220
10.F Beschreibung des Körpers $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen . . . . .	222
Alphabete . . . . .	224
Liste der wichtigsten Symbole . . . . .	225
Sachverzeichnis . . . . .	226