

Inhalt

Einleitung	1
I Algebra in der Schule	5
1 Das Gerüst des Lehrgangs	5
2 Zur historischen Entwicklung des Algebraunterrichts	8
3 Zur Begründung des Lehrgangs	14
3.1 Bildungsziele	14
3.2 Das Problem der Gültigkeit	15
3.3 Das Problem der Angemessenheit	16
3.4 Das Problem des Wertes	17
II Zahlen	21
1 Zahlen in algebraischer Sicht	21
1.1 Algebraisches Verständnis der Zahlen	21
1.2 Axiomatische und konstruktive Begründungen der Zahlen	22
1.3 Das Problem der Bereichserweiterung	24
1.4 Zahl und Wirklichkeit	25
2 Zum Lernen des Zahlbegriffs	26
2.1 Lernen durch Erweiterung	26
2.2 Lernen in Stufen	28
2.3 Regellernen	29
2.4 Der Verknüpfungsbegriff als Leitbegriff	32
3 Natürliche Zahlen im Unterricht	33
3.1 Rechenoperationen und ihre Beziehungen	33
3.2 Rechenoperationen als Verknüpfungen	37
3.3 Zusätzliche Verknüpfungen natürlicher Zahlen	38
4 Bruchzahlen im Unterricht	41
4.1 Das Problem der Reihenfolge der Erweiterungen	41
4.2 Zugänge	42
4.3 Bruchrechnung	47
4.4 Verknüpfungseigenschaften	51
4.5 Strukturelle Vertiefung	53
5 Rationale Zahlen im Unterricht	54
5.1 Modelle	54
5.2 Über den Status der Vorzeichenregeln	55
5.3 Zugänge zu den Regeln	57
5.4 Das Problem der Regelformulierung	59
5.5 Das Problem der Differenzierung	60

5.6 Verknüpfungseigenschaften	61
6 Reelle Zahlen im Unterricht	62
6.1 Die Entdeckung irrationaler Zahlen	62
6.2 Das Problem der Numerik	64
6.3 Das Problem der Verknüpfungseigenschaften	68
III Terme	71
1 Die Formelsprache	71
1.1 Die Formelsprache als formale Sprache	72
1.2 Die Variablen	73
1.3 Zahlen und Größen	75
1.4 Modellbildung mit Termen	76
1.5 Deutung von Termumformungen	79
2 Schwierigkeiten beim Lernen der Formelsprache	80
2.1 Regeln und Regelhierarchien erfassen	80
2.2 Über Termumformungen sprechen	82
2.3 Üben von Termumformungen	85
2.4 Über den Umgang mit Fehlern bei Termumformungen	86
2.5 Fehleranalysen	87
3 Über das Lehren der Formelsprache	88
3.1 Vom Wert der Formelsprache	89
3.2 Der Computer als Werkzeug für die Formelsprache	90
3.3 Ziele beim Lehren der Formelsprache	92
3.4 Denken und Umformen	93
3.5 Zum Lernen der Formelsprache	95
4 Die Formelsprache im Unterricht	96
4.1 Intuitiver Umgang mit Variablen und Termen	96
4.2 Reflexionen über die Formelsprache	101
4.3 Erarbeitung der Termumformungen	105
4.4 Nutzung der Formelsprache	110
4.5 Erweiterung der Formelsprache	112
4.6 Neue Formelsprachen	115
4.7 Der Computer als Tutor für Termumformungen	118
IV Funktionen	121
1 Zum Begriff der Funktion	121
1.1 Entwicklung des Funktionsbegriffs	121
1.2 Funktionseigenschaften	123
1.3 Funktionstypen	124
1.4 Modellbildung mit Funktionen	125

2 Zum Lehren des Funktionsbegriffs	126
2.1 Der Funktionsbegriff als Unterrichtsgegenstand	126
2.2 Funktionales Denken	129
2.3 Umwelterschließung mit Funktionen	131
2.4 Der Computer als Werkzeug für Funktionen	136
2.5 Lernmodelle für den Funktionsbegriff	139
3 Der Funktionsbegriff im Unterricht	142
3.1 Rollen des Funktionsbegriffs	142
3.2 Vermittlung von Grunderfahrungen	144
3.3 Entdeckung von Funktionseigenschaften	147
3.4 Aufdecken von Zusammenhängen	157
3.5 Entdeckung neuer Funktionstypen	159
3.6 Das Problem der Umkehrfunktion	166
3.7 Funktionen und Relationen	167
3.8 Mit Funktionen operieren	169
3.9 Von den Funktionen zu den Folgen	172
3.10 Erweiterungen	175
3.11 Funktionen und Verknüpfungen	183
3.12 Relationen zwischen Funktionen	184
V Gleichungen	187
1 Gleichungen im Wandel	187
1.1 Schwächen der klassischen Gleichungslehre	188
1.2 Übertreibungen der Reform	192
1.3 Die Wiederentdeckung des Inhaltlichen	194
1.4 Beobachtungen des Schülerverhaltens	195
2 Gleichungen in den Themensträngen der Algebra	196
2.1 Zahlen und Gleichungen	197
2.2 Terme und Gleichungen	198
2.3 Funktionen und Gleichungen	199
2.4 Kurven und Gleichungen	200
3 Über das Lernen des Umgangs mit Gleichungen	203
3.1 Zum Lernen von Algorithmen für Gleichungen	203
3.2 Über Gleichungen und Umformungen reden	205
3.3 Das Problem der Sachaufgaben	207
4 Gleichungen im Unterricht	211
4.1 Entwicklung des Themenstrangs	211
4.2 Gleichungen und Ungleichungen in \mathbb{N}	212
4.3 Gleichungen in \mathbb{B}	216
4.4 Gleichungen in \mathbb{Q} als Rechenregeln	218

4.5 Das Lösen von Gleichungen in \mathbb{Q}	220
4.6 Gleichungstypen in \mathbb{Q}	226
4.7 Gleichungstypen in \mathbb{R}	232

VI Erkenntnis im Algebraunterricht	241
1 Sätze im Algebraunterricht	242
1.1 Regeln – Formeln – Sätze	242
1.2 Die Entdeckung des binomischen Satzes	244
1.3 Das Finden einer Summenformel	246
1.4 Existenzsätze	249
1.5 Beweisen im Algebraunterricht	252
1.6 Beweisen lehren	254
2 Begriffsbildung im Algebraunterricht	256
2.1 Begriffsbildung	256
2.2 Lernen durch Definitionen	257
2.3 Begriff und Problem	259
2.4 Paradoxien bei algebraischen Begriffen	261
3 Algebra als Theorie im Unterricht	263
3.1 Bezugstheorien	263
3.2 Theoretisches Beziehungsgefüge	264
3.3 Gruppe als algebraische Struktur	265
Literatur	271
Sachwörter	281