

Inhalt

| | |
|--|----|
| <i>Vorwort</i> | 9 |
| <i>I. Einführung in den Begriff der Gruppe</i> | 11 |
| 1. Die Bedeutung des Gruppenbegriffs | 11 |
| 2. Voraussetzungen für den Aufbau der Gruppentheorie | 12 |
| 3. Verknüpfungen in Zahlbereichen | 13 |
| 3.1. Innere Verknüpfung – Abgeschlossenheit | 13 |
| 3.2. Assoziativität | 14 |
| 3.3. Kommutativität | 15 |
| 3.4. Das neutrale Element | 15 |
| 3.5. Inverse Elemente | 16 |
| 4. Verknüpfungen von Abbildungen | 18 |
| 5. Präzise Fassung des Gruppenbegriffs | 24 |
| 5.1. Die Gruppenaxiome | 24 |
| 5.2. Die Eindeutigkeit des neutralen Elements und der inversen Elemente | 25 |
| <i>II. Beispiele endlicher Gruppen</i> | 29 |
| 1. Die Drehungsgruppe des gleichseitigen Dreiecks | 30 |
| 2. Eine Permutationsgruppe mit 3 Elementen | 33 |
| 3. Isomorphe Gruppen | 35 |
| 4. Eine Restklassengruppe | 37 |
| 5. Die Symmetrische Gruppe \mathfrak{S}_3 und die Diedergruppe des Dreiecks | 40 |
| 6. Vierergruppen | 47 |
| 6.1. Die zyklische Vierergruppe | 47 |
| 6.2. Die Kleinsche Vierergruppe | 50 |

| | |
|---|-----|
| <i>III. Einstieg in die allgemeine Theorie der Gruppen</i> | 57 |
| 1. Allgemeine Eigenschaften von Gruppen | 57 |
| 2. Mögliche Änderungen im Axiomensystem | 59 |
| 3. Wichtige Rechenregeln | 60 |
| 4. Bedingungen für Untergruppen | 62 |
| 5. Halbgruppen | 65 |
| 6. Gruppenisomorphismus | 66 |
| | |
| <i>IV. Permutationen</i> | 70 |
| 1. Definition, Schreibweise | 70 |
| 2. Zerlegung in Zyklen | 72 |
| 3. Verknüpfung von Permutationen | 73 |
| 4. Die symmetrische Gruppe \mathfrak{S}_n | 75 |
| 5. Der Satz von Cayley | 77 |
| 6. Die alternierende Gruppe | 80 |
| | |
| <i>V. Untergruppen und Nebenklassen</i> | 89 |
| 1. Nebenklassen | 89 |
| 2. Der Satz von Lagrange | 92 |
| 3. Normalteiler | 95 |
| 4. Die Tetraedergruppe | 96 |
| 5. Geometrische Bedeutung der Untergruppen. Darstellung der Untergruppenstruktur durch Graphen | 101 |
| 6. Diedergruppen | 104 |
| | |
| <i>VI. Zyklische Gruppen</i> | 112 |
| 1. Definition und Gruppeneigenschaft | 112 |
| 2. Endliche und unendliche zyklische Gruppen | 113 |
| 3. Modelle endlicher zyklischer Gruppen | 115 |
| 3.1. Deckdrehungen des regelmäßigen n-Ecks | 115 |
| 3.2. Additive Restklassen | 116 |
| 4. Untergruppen zyklischer Gruppen | 119 |
| 5. Ordnung eines Elements | 122 |
| 5.1. Begriff und einfache Folgerungen | 122 |
| 5.2. Erzeugende Elemente in zyklischen Gruppen | 123 |
| 6. Erzeugendensystem einer Gruppe | 127 |

| | |
|---|-----|
| <i>VII. Direktes Produkt von Gruppen, prime Restklassengruppen</i> | 131 |
| 1. Zerlegung und Aufbau von Gruppen durch das direkte Produkt in Beispielen | 131 |
| 1.1. Die Kleinsche Vierergruppe | 131 |
| 1.2. Achtergruppen als direkte Produkte | 132 |
| 1.3. Eine Sechsergruppe als direktes Produkt | 134 |
| 2. Definition und Eigenschaften des direkten Produkts | 135 |
| 3. Zerlegung zyklischer Gruppen | 139 |
| 4. Die primen Restklassengruppen | 142 |
| | |
| <i>VIII. Homomorphismus, Automorphismus</i> | 149 |
| 1. Begriff des Homomorphismus | 149 |
| 2. Eigenschaften des Homomorphismus von Gruppen | 152 |
| 3. Der Homomorphiesatz | 154 |
| 4. Begriff des Automorphismus | 157 |
| 5. Die Automorphismengruppe | 159 |
| 6. Innere Automorphismen | 160 |
| 7. Konjugierte Untergruppen | 162 |
| 8. Invariante Untergruppen | 165 |
| 9. Die Ikosaedergruppe | 166 |
| | |
| <i>IX. Rückblick und Ausblick</i> | 174 |
| 1. Endliche Drehungsgruppen | 174 |
| 2. Die kongruenten Abbildungen der Ebene | 178 |
| 3. Ringe und Körper | 179 |
| | |
| <i>X. Lösungen der Aufgaben</i> | 181 |
| | |
| <i>Literaturverzeichnis</i> | 203 |
| | |
| <i>Register</i> | 209 |