

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	13
A) Die Übung – ein Zentralbegriff im Mathematikunterricht	
1. Kennzeichnung der Übung nach ihrem didaktischen Schwerpunkt	15
1.1 Die Rechenfertigungsübung	15
1.1.1 Unterscheidung Rechenfertigkeit–Rechenfähigkeit	15
1.1.2 Das didaktische Ziel der Rechenfertigungsübung	15
1.2 Die operative Übung	16
1.2.1 Das operative Denken	16
1.2.2 Die Bedeutung operativer Übungen im Mathematikunterricht	17
1.2.3 Die operative Übung als Stufe des Lernprozesses	17
1.3 Das Zehnminutenrechnen	19
1.3.1 Das didaktische Ziel des Zehnminutenrechnens	19
1.3.2 Schwerpunkte der täglichen Kurzübung	19
1.3.3 Übungsformen	19
1.4 Die Übung als Stufe einer Unterrichtseinheit	19
1.4.1 Der didaktische Ort der Übung innerhalb einer Einführungsstunde	19
1.4.2 Die Durchführung der Übung	20
2. Prinzipien für die Durchführung effektiver Übungen	20
2.1 Wechsel im Übungsvollzug	20
2.2 Grundsätze für die Anordnung des Übungsstoffes	20
2.2.1 Vom Leichten zum Schweren	20
2.2.2 Die Berücksichtigung der kognitiven Funktionen	21
2.3 Der Wechsel in der Arbeitsform	21
2.3.1 Mündliches Rechnen	21
2.3.2 Die schriftlichen Rechenformen	22
2.4 Die Arbeitstechniken	22
2.4.1 Übersicht der möglichen Arbeitstechniken	22
2.4.2 Die Einführung neuer Arbeitstechniken	23
2.4.3 Wann lohnt sich der Zeitaufwand?	23
2.5 Wechsel der Sozialformen	23
2.5.1 Arbeit mit der ganzen Klasse	23
2.5.2 Die Alleinarbeit	24
2.5.3 Die Partnerarbeit	24
2.5.4 Die Gruppenarbeit	24
2.6 Die Notwendigkeit einer Differenzierung	24
2.7 Kontrollverfahren	25
2.7.1 Die Selbstkontrolle	25
2.7.2 Die Fremdkontrolle	25
2.7.3 Die Eigenkontrolle	26

2.8	Die Arbeitsmittel	27
2.8.1	Lernmittelfreie Arbeitsmittel	27
2.8.2	Ergänzende Arbeitsmittel	28
2.8.3	Selbstgefertigte Arbeitsmittel	28
3.	Anmerkungen zum Übungsteil	29
3.1	Hinweise zur Arbeitserleichterung	29
3.1.1	Material für die Hand des Lehrers	29
3.1.2	Arbeitssparender Einsatz von Arbeitsblättern	29
3.2	Die Anordnung der Übungen	29
3.3	Die Beschreibung der Übungen	30
3.4	Grundlegende Bezeichnungen	31
3.4.1	Gleichungsdarstellung	31
3.4.2	Operatordarstellung	31

B) Kennzeichnung der Übungen und Durchführungsvorschläge

Die Erweiterung des Zahlenraumes

1.	Der Zahlenraum bis 100	33
1.1	Übungen zum Erkennen, Kennzeichnen, Lesen, Bestimmen und Zeigen von Zahlen und deren Mächtigkeit	33
1.1.1	Das Zahlenband	33
1.1.2	Die Punktetafel	33
1.1.3	Ziffernmäßige Darstellung des Zahlenraumes	34
1.1.4	Zeichnerische Darstellung von Zahlen	36
1.2	Die Position einer Zahl	36
1.2.1	Benachbarte Zahlen	36
1.2.2	Vergleich von Zahlen	40
1.2.3	Vergleich von Zahlen mit gleichen Ziffern	43
1.2.4	Das Ordnen von Zahlen	44
1.3	Einfache Rechnungen	46
1.3.1	Zahlenfolgen	46
1.3.2	Ergänzen auf den nächsten Zehner	47
1.3.3	Ergänzen auf Hundert	48
1.3.4	Das Zerlegen von Zahlen	49
1.3.5	Halbieren/Verdoppeln	52
2.	Der Zahlenraum bis 1000	55
2.1	Übungen zum Erkennen, Kennzeichnen, Lesen, Bestimmen und Zeigen von Zahlen und deren Mächtigkeit	55
2.1.1	Übungsformen	55

2.1.2	Veranschaulichungsmöglichkeiten	55
2.1.3	Gezeichnete Zahlen	56
2.1.4	Zahlenmatrix	56
2.2	Das Zerlegen von Zahlen	57
2.2.1	Die Zerlegung in Vielfache der Stufenzahlen	57
2.2.2	Die Zerlegung in Stellenwerte	59
2.2.3	Vergleich Stellenwertschreibweise und Stufenzahlschreibweise	59
2.3	Das Schreiben und Bilden von Zahlen unter besonderer Beachtung der Stellenwerte	60
2.3.1	Das Zahlendiktat	60
2.3.2	Zahlen selbst bilden	60
2.3.3	Würfelspiele	61
2.3.4	Der Vergleich von Zahlen	61
2.3.5	Das Ordnen von Zahlen	61
2.4	Einfache Rechnungen	62
2.4.1	Benachbarte Zahlen	62
2.4.2	Schrittweises Ergänzen	63
2.4.3	Zahlenfolgen	64
2.4.4	Halbieren/Verdoppeln	64
2.4.5	Übungen in den Randzehnern eines Hunderters	65
2.4.6	Vergleich von Termen einfacher Art	66
2.5	Das Rechnen mit Größen	67
2.5.1	Benennungen und ihre Abkürzungen	67
2.5.2	Die Umrechnung	68
2.5.3	Übungsformen	68
2.5.4	Variationen der Darstellung	69
3.	Der Zahlenraum bis 1 000 000	70
3.1	Veranschaulichungen	70
3.1.1	Das Zahlenband	70
3.1.2	Die Punkttafel für den Bereich bis 10 000	71
3.1.3	Die zeichnerische Darstellung von Zahlen	72
3.1.4	Veranschaulichung durch Längenvergleich	72
3.2	Die Einordnung einer Zahl in unser Zahlensystem	72
3.2.1	Benachbarte Zahlen	72
3.2.2	Das Ordnen von Zahlen	76
3.2.3	Zerlegung in Vielfache der Stufenzahlen	77
3.2.4	Zerlegung in Stellenwerte	79
3.2.5	Das Suchen und Bilden von Zahlen	79
3.2.6	Würfelspiele	80
3.3	Der dekadische Aufbau unseres Zahlensystems	80
3.3.1	Die Einführung der Multiplikation mit Zehnerpotenzen durch Operatoren	80
3.3.2	Verknüpfungen reversibler Operationen mit Zehnerpotenzen	83
3.3.3	Umkehroperatoren	86
3.3.4	Die Addition/Subtraktion von Zehnerpotenzen und deren Vielfache	87
3.3.5	Analogiebildungen	90

3.4	Einfache Rechnungen	92
3.4.1	Schrittweises Ergänzen	92
3.4.2	Halbieren/Verdoppeln	94
3.4.3	Zahlenfolgen	94
3.5	Übungen an den Nahtstellen	96
3.5.1	Übungen im ersten Hunderter eines Tausenders	96
3.5.2	Übungen im letzten Hunderter eines Tausenders	97
3.5.3	Zeichnerische Veranschaulichung	98

Der additive Bereich

4.	Operative Übungen zum Verständnis der Rechengesetze	100
4.1	Die Einführung der Addition und Subtraktion	100
4.1.1	Die Vereinigungsmenge	100
4.1.2	Die Restmenge	101
4.1.3	Veranschaulichungsmöglichkeiten	101
4.1.4	Darstellung der Addition/Subtraktion auf Zahlenschemata	104
4.1.5	Das Operatormodell	105
4.2	Das Kommutativgesetz	108
4.2.1	Inhalt des Kommutativgesetzes	108
4.2.2	Zeichnerische Darstellungen	109
4.2.3	Darstellung auf Zahlenschemata	110
4.2.4	Übungsvarianten bei ziffernmäßiger Darstellung	110
4.2.5	Der Umkehroperator	112
4.3	Das Assoziativgesetz der Addition	114
4.3.1	Inhalt des Assoziativgesetzes	114
4.3.2	Zeichnerische Darstellungen	114
4.3.3	Wir suchen den einfachsten Lösungsweg	115
4.4	Die Ausgleichsgesetze	117
4.4.1	Inhalt der Ausgleichsgesetze	117
4.4.2	Das Zerlegen von Zahlen	118
4.4.3	Suchen gleichwertiger Terme	121
4.4.4	Wir suchen den vorteilhaftesten Lösungsweg	123
4.5	Das Einüben grundlegender additiver Kenntnisse	124
4.5.1	Kennzeichnung der grundlegenden additiven Kenntnisse	124
4.5.2	Einübung durch dekadische Analogien	124
4.5.3	Variationen der Darstellung	125
4.5.4	Nachbaraufgaben	127
4.6	Übungen zum besseren Verständnis des Zehnerüberganges	128
4.6.1	Der fließende Übergang	128
4.6.2	Die Addition/Subtraktion mit zerlegten Zahlen	130
4.6.3	Die Addition/Subtraktion von gemischten Zehnerzahlen	132
4.7	Abziehen und Ergänzen	135
4.7.1	Unterscheidung	135
4.7.2	Zeichnerische Darstellungen	136
4.7.3	Ziffernmäßige Darstellungen	138

5.	Übungen zur Neueinführung von Rechentechniken	139
5.1	Die halbschriftliche Addition	139
5.1.1	Die verschiedenen Wege bei der halbschriftlichen Addition	139
5.1.2	Vertiefende Übungen	140
5.1.3	Ausnützen von Rechenvorteilen durch Anwendung der Ausgleichsgesetze	142
5.2	Die halbschriftliche Subtraktion	142
5.3	Die schriftliche Addition	143
5.3.1	Vorübungen mit der Stellenwerttafel	143
5.3.2	Die Addition ohne Übergänge	144
5.3.3	Die Addition mit Übergängen	145
5.4	Die schriftliche Subtraktion	148
5.4.1	Zwei methodische Wege der schriftlichen Subtraktion	148
5.4.2	Die schriftliche Subtraktion ohne Übergang	149
5.4.3	Die schriftliche Subtraktion mit Übergängen	150
6.	Automatisierende Übungen	152
6.1	Mechanische Übungen mit dem Ziel der sicheren Beherrschung der Rechentechniken	152
6.1.1	Die Aufgaben sind einzeln lösbar	152
6.1.2	Aufgabenstellungen mit den Zahlenschemata	156
6.1.3	Die Aufgaben sind selbst zu bilden	159
6.1.4	Ergänzungsaufgaben	161
6.1.5	Kettenrechnungen mit begrenzter Gliederzahl	163
6.1.6	Rundläufe	168
6.1.7	Rechenuhr und Rechenrad	169
6.2	Übungen, die zugleich die Kombinationsfähigkeit fördern	172
6.2.1	Die Verknüpfung zweier Zahlen ist gesucht	172
6.2.2	Der Rechenturm	173
6.2.3	Relationen	174
6.2.4	Mehrere Zahlen sind zu verknüpfen	176
6.2.5	Zauberquadrate	179
6.2.6	Weg durch Zahlenquadrate suchen	184

Der multiplikative Bereich

7.	Die Einführung der multiplikativen Operationen	186
7.1	Die Multiplikation	186
7.1.1	Vorkurs	186
7.1.2	Kennenlernen der Multiplikation als verkürzte Addition	187
7.1.3	Veranschaulichungsmöglichkeiten	188
7.1.4	Darstellung auf den Grundschemata	189
7.1.5	Die Einführung der Multiplikation über die Produktmenge	190
7.1.6	Der Maloperator	192
7.2	Die Division	192
7.2.1	Unterscheidung von Messen und Teilen	192

7.2.2	Die Einführung der Division im Sinne des Messens	192
7.2.3	Die Division im Sinne des Verteilens	195
7.2.4	Zeichnerische Gegenüberstellung Messen – Verteilen	196
7.2.5	Der Geteiltoperator	198
7.3	Die Einführung der Einmaleinsreihen	198
7.3.1	Zeichnerische Darstellungen	198
7.3.2	Der zahlenmäßige Aufbau einer Einmaleinsreihe	200

8. Operative Übungen zum Verständnis der multiplikativen Rechengesetze . . 201

8.1	Das Kommutativgesetz	201
8.1.1	Inhalt des Kommutativgesetzes	201
8.1.2	Zeichnerische Darstellungen	201
8.1.3	Einzeichnen der Tauschaufgaben in die Grundschemata	203
8.1.4	Gezeichnete Aufgaben in Gleichungen umsetzen	204
8.1.5	Übungsvarianten bei ziffernmäßiger Darstellung	204
8.1.6	Übungen, die die Reversibilität besonders berücksichtigen	207
8.2	Das Assoziativgesetz	209
8.2.1	Inhalt des Assoziativgesetzes	209
8.2.2	Zeichnerische Darstellungen	209
8.2.3	Gegenüberstellung im Baumdiagramm	212
8.2.4	Das Erstellen gleichwertiger Multiplikationsfolgen mit vorgegebenen Zahlen	213
8.2.5	Die Anwendung des Assoziativgesetzes der Multiplikation bei der Division	214
8.2.6	Multiplikative Zerlegungen	216
8.2.7	Die Zerlegung einer Zahl in ihre Primfaktoren	218
8.2.8	Die praktische Anwendung der multiplikativen Zerlegung	219
8.3	Das Distributivgesetz der Multiplikation	221
8.3.1	Inhalt des Distributivgesetzes	221
8.3.2	Zeichnerische Darstellungen	221
8.3.3	Ein zweistelliger Faktor wird additiv zerlegt	223
8.3.4	Die Anwendung des Distributivgesetzes bei der Division durch Zerlegen in Vielfache des Divisors	225
8.3.5	Halbieren/Verdoppeln	227
8.3.6	Der Aufbau neuer Einmaleinsreihen durch Addition oder Subtraktion bereits bekannter Reihen	231
8.4	Die Ausgleichsgesetze	232
8.4.1	Inhalt der Ausgleichsgesetze	232
8.4.2	Zeichnerische Darstellungen	233
8.4.3	Ziffernmäßige Darstellungen	234
8.4.4	Das Bewußtmachen des Veränderungsoperators	234
8.4.5	Die Russische Multiplikation	236
8.4.6	Vereinfachen der Division durch Kürzen	236

9. Operative Übungen zum Verständnis der multiplikativen Verknüpfungen . . 237

9.1	Das multiplikative Umfeld einer Zahl	237
9.1.1	Nachbaraufgaben	237

9.1.2	Nachbareinmaleinszahlen suchen	239
9.1.3	Rechnen mit Restklassen	241
9.2	Das Herausstellen verwandter Beziehungen	244
9.2.1	Kennzeichnung der Übungen	244
9.2.2	Zeichnerische Darstellung verwandter Beziehungen	244
9.2.3	Übungsvarianten	246
9.2.4	Die Auswirkungen multiplikativer Veränderungen beim Quotienten	249
9.3	Das Erarbeiten von Teiler- und Vielfachenbeziehungen	253
9.3.1	Die Teilermenge	253
9.3.2	Gemeinsame Teiler	258
9.3.3	Die Vielfachenmenge	260
9.3.4	Gemeinsame Vielfache	264
10.	Automatisierende Übungen	267
10.1	Mechanische Übungen mit dem Ziel der Beherrschung der Einmaleinsreihen	268
10.1.1	Das Einprägen einzelner Reihen	268
10.1.2	Das gleichzeitige Üben mehrerer Einmaleinsreihen	273
10.1.3	Der Vergleich multiplikativer Terme	279
10.1.4	Würfelspiele	282
10.2	Übungen, die zugleich die Kombinationsfähigkeit fördern	284
10.2.1	Multiplikative Einzelverknüpfungen sind gesucht	284
10.2.2	Mehrere multiplikative Terme sind zu verquicken	285
10.3	Die Verknüpfung additiver und multiplikativer Rechenoperationen	291
10.3.1	Die Reihenfolge der Operationen ist vorgeschrieben	291
10.3.2	Die Operationen sind variabel	296
11.	Die Einführung neuer multiplikativer Rechentechniken	304
11.1	Die Zehnervielfachen	304
11.1.1	Zeichnerische Darstellungen	304
11.1.2	Die Multiplikation in Stellenwertschreibweise	305
11.1.3	Additive Zerlegung des Multiplikators/Dividenden in gleich große Summanden	306
11.1.4	Multiplikative Zerlegung des Multiplikators/Divisors	307
11.1.5	Vergleich zwischen der Einmaleinsreihe und den dazugehörigen Zehnervielfachen	311
11.1.6	Operative Übungen mit Zehnervielfachen	312
11.1.7	Anwendungsbeispiele	316
11.1.8	Rechenfertigungsübungen	318
11.2	Die halbschriftliche Multiplikation	318
11.2.1	Wiederholende Übungen	318
11.2.2	Die Multiplikation der Vielfachen der Stufenzahlen	318
11.2.3	Darstellungsvarianten	319
11.2.4	Die Übung abweichender Zerlegungsformen	321
11.3	Die halbschriftliche Division	323
11.3.1	Die Zerlegung des Dividenden	323

11.3.2	Die schrittweise Einführung der halbschriftlichen Division	325
11.3.3	Darstellungsvarianten	327
11.3.4	Die Übung abweichender Zerlegungsformen	328
11.4	Die schriftliche Multiplikation	330
11.4.1	Der Multiplikator ist einstellig	330
11.4.2	Die Multiplikation mit glatten Zehnerzahlen	333
11.4.3	Die Multiplikation mit gemischten Zahlen	334
11.4.4	Die Multiplikation drei- und mehrstelliger Zahlen	336
11.5	Die schriftliche Division	337
11.5.1	Die Division mit einstelligem Divisor im Stellenwertschema	337
11.5.2	Das Normalverfahren der schriftlichen Division mit einstelligem Divisor	341
11.5.3	Das überschlagende Rechnen	343
11.5.4	Dividieren mit zweistelligen Divisoren	345
12.	Übungen, die die schriftliche Beherrschung der Grundrechenarten voraus- setzen	347
12.1	Rechenfertigungsübungen	347
12.1.1	Einzelterme sind zu lösen	347
12.1.2	Vergleich von Termen	350
12.1.3	Kettenrechnungen	352
12.2	Übungen, die zugleich die Kombinationsfähigkeit fördern	355
12.2.1	Die Operationen sind festgelegt	355
12.2.2	Die Operationen sind variabel	357
12.2.3	Zerlegungen	359
	Verzeichnis der mehrfach einsetzbaren Folien	363
	Quellenverzeichnis	365