

INHALT

1	EINIGE EINLEITENDE GEDANKEN ZUR ELEMENTAREN ALGEBRA	1
1.1	Was leistet der derzeitige Unterricht aus elementarer Algebra?	1
1.2	Worum geht es in der elementaren Algebra?	6
1.3	Was könnte Unterricht aus elementarer Algebra leisten?	10
1.4	Trennung von Inhalt und Form	15
1.5	Eine Ideologie: Stereotypes Üben	19
1.6	Eine andere Ideologie: Sauberes Erklären	24
1.7	Lernen als Abbilden oder Konstruieren	31
1.8	Zum Erlernen der algebraischen Notation	34
1.9	Elementare Algebra und Computer	37
	Auslagerung von Verfahren	37
	Computer als Lehr- und Lernhilfsmittel	40
	Erweiterungen der Notation durch den Computer	41
2	VARIABLE, TERME UND FORMELN	44
2.1	Aspekte des Variablenbegriffs	44
	Was sind Variable?	44
	Drei Aspekte	45
	Reduktionen des Variablenbegriffs	47
	Einflüsse der Aspekte auf die Gleichungslehre	49
	Objekt- und Metasprache in der Gleichungslehre	52
2.2	Zum Sinn von Termen und Formeln	55
2.3	Unterrichtsvorschläge zur Einführung von Variablen im 5. bzw. 6. Schuljahr	65
	Beispiel 1: Zahlentricks	65
	Beispiel 2: Fahrt mit dem Eurocity	67
	Beispiel 3: Einnahmen beim Sportfest	72
	Beispiel 4: Paketverschnürungen	73
	Beispiel 5: Schneidemaschinen	75
	Beispiel 6: Väter, Söhne und Bausteine	76
3	FUNKTIONALE ASPEKTE VON FORMELN	79
3.1	Variablenaspekte, anders betrachtet	79
	Ein Exkurs in die Hochschulmathematik	84
	Variablenaspekte anderer Autoren	85
3.2	Empirische Beobachtungen zu funktionalen Aspekten von Formeln	86
3.3	Unterrichtsvorschläge	88

4	TEXTE UND FORMELN	93
4.1	Ein Umkehrfehler	93
	Erklärungsversuche für den Umkehrfehler	96
4.2	Vom Text zur Formel: Ein Dreischritt-Modell	97
	Additive Umkehrfehler	102
	Fehlererklärungen im Dreischritt-Modell	103
4.3	Fehler im ersten Prozeßschritt	104
	Episodisches Denken als Hindernis	105
4.4	Fehler im zweiten Prozeßschritt	106
4.5	Fehler im dritten Prozeßschritt	108
	Mißachtung semantischer Konventionen	108
	Gleichheit als Entsprechung	111
	Auswahl und Anordnung von Symbolen	113
4.6	Interpretieren von Formeln	117
4.7	Unterrichtsvorschläge, die sich aus dem Dreischrittmodell ergeben	119
4.8	Traditionelle Textaufgaben in neuem Gewand	123
	Direkte und indirekte Proportionalität	123
	Prozentrechnen	125
5	THEORETISCHE ERGÄNZUNGEN ZU TEXTEN UND FORMELN	128
5.1	Erfordern Textaufgaben zwei Denksysteme?	128
5.2	Zahlen als Beziehung oder Objekte	132
6	VON DER ARITHMETIK ZUR ALGEBRA	135
6.1	Bedeutungsveränderungen von Zeichen und Schreibweisen	135
	Bedeutungsveränderung der Konkatenation	135
	Bedeutungsveränderungen der Operationszeichen	136
	Bedeutungsveränderungen des Gleichheitszeichens	137
	Eine empirische Untersuchung zur Verwendung des Gleichheitszeichens von Kindern	140
6.2	Veränderungen der Sichtweise von Termen und Formeln	142
	Geschlossene Darstellungen	142
	Handlungs- und Beziehungsaspekte von Formeln	144
	Wechsel von Handlungs- und Beziehungsaspekten	147
6.3	Veränderungen heuristischer Aktivitäten	149
6.4	Unterrichtsvorschläge zur veränderten Sichtweise von Termen und Formeln	151
	Terme als Zahlen	152
	Formeln als Beziehungen zwischen Zahlen	153
6.5	Variable vor Zahlen?	155

7	SCHÜLERFEHLER BEIM UMFORMEN	160
7.1	Schemata, Metawissen und Kontrolle	160
	Konnexionen	162
7.2	Ein Schemamodell für algebraische Umformungen	163
7.3	Fehler bei der Informationsaufnahme	166
	Unvollständige Informationsaufnahme	166
	Unzulässiges Strukturieren von Termen	171
7.4	Fehler bei dem Aufruf, der Verarbeitung oder Anwendung von Schemata	172
	Übergeneralisieren	172
	Unzulässiges Linearisieren	175
	Verwendung inadäquater Schemata	176
	Bildung unpassender Bedarfsschemata durch Metaschemata	179
	Rückgriff auf allgemeine Lebensweisheiten	181
	Verwendung zu offener Schemata	181
	Verwendung unpassender Ersatzschemata	184
	Interferenz von Schemata	184
	Nichtbeachtung von Prozedurhierarchien	185
7.5	Ausführungsstörungen	186
8	WEITERE BEOBACHTUNGEN ZU SCHÜLERFEHLERN BEIM UMFORMEN	188
8.1	Drei Komponenten des Gleichungslösens	188
8.2	Erkennen von Termstrukturen	190
	Termstrukturerkennen ohne Umformen	190
	Betrachten von Termen unter vorgegebenen Strukturen	194
	Ergänzen von Termen	195
	Termstrukturerkennen als allgemeine Fähigkeit	196
8.3	Anwenden von Regeln	197
	Inwiefern verwenden Schüler Regeln?	197
	Begründen von Umformungsschritten durch Regeln	200
8.4	Heuristische Strategien	202
	Übersicht	202
	Abkürzende Beschreibung einer Strategie	203
	Welche Strategien dominieren?	205
	Heuristische Strategien und Rechtfertigung	205
9	AFFEKTIVE ASPEKTE VON SCHÜLERFEHLERN	206
9.1	Rationales Denken und Wunschenken	206
9.2	Tiefenpsychologische Aspekte	212
	Ängstlichkeit und regelhaftes Denken	214

10	UMFORMUNGSREGELN	216
10.1	Beschreibung und Begründung von Umformungsschritten	216
10.2	Die „Geometrie der Terme“	218
10.3	Regeln zum Umformen von Gleichungen	219
	Elementarumformungsregeln und Waageregeln	219
	Didaktischer Vergleich der Elementarumformungs- und Waageregeln	222
	Konsequenzen für den Unterricht	227
10.4	Regeln zum Umformen von Termen	227
	Zur Argumentationsbasis bei Termumformungen	227
	Metaschemata und Bedarfsregeln	229
10.5	Zum Sinn des Umformens	233
	Warum formen wir Formeln und Terme um?	233
	Was leisten Umformungsregeln?	235
10.6	Unterrichtsvorschläge zur Einführung von Regeln	236
	Einführung von Gleichungsumformungsregeln	236
	Einführung von Termumformungsregeln	239
10.7	Bewußtes Anwenden von Gleichungsumformungsregeln	242
	Spielerisches und zielgerichtetes Umformen	244
10.8	Bewußtes Anwenden von Termumformungsregeln	245
	Eine mögliche Abfolge von Lernschritten	246
	Kombination von Gleichungs- und Termumformen	252
	Bewußtmachen von Fehlern	252
11	ERKENNEN VON TERMSTRUKTUREN	254
11.1	Aufgaben zum Erkennen von Termstrukturen	255
11.2	Auf- und Abbau von Termen	257
11.3	Substituieren	259
12	FORMELN UND FUNKTIONEN	262
12.1	Variablenaspekte bei Funktionen	263
12.2	Unterrichtsvorschläge zur funktionalen Betrachtung von Formeln (etwa ab dem 9. Schuljahr)	267
	Eine Aufgabensequenz: Meßgläser	267
	Eine weitere Aufgabensequenz: Verkehrsunfälle	270
	Aufstellen von Formeln aus der Kenntnis von Eigenschaften	272
Literatur		273