

Inhalt

Zur Einführung von Hans Aebli	XI
Vorwort	1
1. Denk- und lernpsychologische Grundlagen	5
1.1. Die Entwicklung des operatorischen Denkens bei Piaget	5
1.1.1. Vom voroperatorischen zum konkret-operatorischen Denken	7
1.1.1.1. Die elementaren logischen Operationen	8
1.1.1.1.1. Die Klassifikationen unter ihrem denkspsychologischen Aspekt	9
Die additiven Klassifikationen	9
Die multiplikativen Klassifikationen	14
Retroaktive und antizipatorische Mobilität	16
Einfache Multiplikationen oder Intersektionen	20
1.1.1.1.2. Die Klassifikationen unter ihrem logischen Aspekt	22
1.1.1.1.3. Die Seriationen	24
Vom voroperatorischen zum operatorischen Seriiierungsverhalten	25
Die Multiplikation asymmetrischer transitiver Relationen	28
1.1.1.1.4. Zusammenfassung	30
1.1.1.1.5. Tabelle 1: Typische Verhaltensweisen als Ausdruck der Entwicklung der elementaren logischen Strukturen	32
1.1.1.2. Der Zahlbegriff	35
1.1.1.2.1. Der logische Aspekt des Zahlbegriffs	35
1.1.1.2.2. Der denkspsychologische Aspekt des Kardinalzahlbegriffs	36
1.1.1.2.3. Quantität und Quotität	46
1.1.1.2.4. Der Ordinal- und der Kardinalzahlbegriff	48
1.1.1.2.5. Zusammenfassung	52
1.1.1.2.6. Tabelle 2: Typische Verhaltensweisen in der Entwicklung des Zahlbegriffs	53
1.1.1.3. Elementare arithmetische Operationen oder: L'arithmétique n'est pas la logique du pauvre	54
1.1.1.3.1. Weitere Aspekte des Zahlbegriffs	54
Die additive und die multiplikative Komposition der Zahl	55
Die Kommutativität der Addition	60
1.1.1.3.2. Die Iteration und das schlußfolgernde arithmetische Denken	63
Zur Konnexität der Folge der ersten natürlichen Zahlen	63
Die arithmetische Struktur der Iteration (+1)	64
Differenzen zwischen je zwei Zahlen der Zahlenreihe	65
Versuche an der Zahlenreihe zur kardinalen Iteration	67
Kompensatorische Operationen und die Struktur der Iteration	69

	Die arithmetische Struktur der Iteration, die Vielfachen von n und die Teilbarkeit der natürlichen Zahlen	72
1.1.1.3.3.	Die Iteration und Piagets erkenntnistheoretische Sicht des Zahlbegriffs	75
1.1.1.3.4.	Zusammenfassung	76
1.1.1.3.5.	Tabelle: Typische Verhaltensweisen als Ausdruck der Entwick- lung der elementaren arithmetischen Strukturen	78
1.1.1.4.	Räumliche (infralogische) Operationen	77
1.1.1.4.1.	Topologische Probleme	80
	Elementäre topologische Relationen	80
	Topologische Ordnungsrelationen: lineare und zyklische Ordnungen	82
	Knoten als topologische Gegebenheiten	86
1.1.1.4.2.	Probleme der projektiven Geometrie	89
	Einfache Probleme der Perspektive	89
	Der Drei-Berge-Versuch	92
	Die „spontane Darstellende Geometrie“	95
1.1.1.4.3.	Probleme der euklidischen Geometrie	98
	Das Koordinatensystem	98
	Der Stadtplan und sein räumliches Bezugssystem	99
1.1.1.4.4.	Spezifisch metrische Probleme	105
	Das Messen von Längen und die Längeninvarianz	105
	Das Messen von Flächen und die Flächeninvarianz	109
	Der Begriff des Bruchs	112
1.1.1.4.5.	Zusammenfassung	115
1.1.1.4.6.	Tabelle 4: Typische Verhaltensweisen als Ausdruck der Entwicklung der infralogischen (räumlichen) Strukturen	118
1.1.1.5.	Vom voroperatorischen zum konkret-operatorischen Denken: Zusammenfassung	121
1.1.2.	Vom konkret-operatorischen zum formalen Denken	122
1.1.2.1.	Formales Denken ist hypothetisch-deduktives Denken. Das Problem der Dichte oder des spezifischen Gewichts	123
1.1.2.2.	Die Kombinatorik als konstituierendes Moment des formalen Denkens: Der Versuch mit dem Pendel	127
1.1.2.3.	Negation und Reziprozität — zwei Formen der Reversibilität: Der Versuch mit der Balkenwaage	129
1.1.2.4.	Arithmetische Strukturen im formalen Denken	132
1.1.2.5.	Vom konkret-operatorischen zum formalen Denken: Zusammenfassung	132
1.1.2.6.	Tabelle 5: Typische Verhaltensweisen im Übergang vom konkret-operatorischen zum formalen Denken	134
1.2.	Piagets Theorie der geistigen Entwicklung im weiteren Rahmen der heutigen Entwicklungs- und Kognitionspsychologie	135
1.2.1.	Die Strukturen in Piagets Theorie	135

1.2.1.1.	Die logisch-mathematischen Strukturen	136
1.2.1.2.	Die psychologische Relevanz der logisch-mathematischen Strukturen	138
1.2.1.3.	Aebli: „Gruppierungen“ sind keine Tiefenstrukturen des Denkens	141
1.2.2.	Piagets Äquilibrationstheorie	141
1.2.2.1.	Die Kritik an Piagets Äquilibrationsmodell	144
1.2.2.2.	Das Problem der Motivation	146
	Piagets intrinsische Motivation	146
	Aebli's Modifikation von Piagets Motivationstheorie	147
1.2.2.3.	Die psychologisch-pädagogische Relevanz des Äquilibrations- modells	148
1.2.3.	Zur Problematik von Piagets Stufentheorie	148
1.2.3.1.	Die Synchronizität der Operationen und das Problem der <i>décalages</i>	149
1.2.3.2.	Aebli's Interpretation der <i>décalages</i> im Rahmen eines — gegenüber Piaget — erweiterten Entwicklungsbegriffs	151
1.2.3.3.	Flavell/Wohlwills Stellung zur Synchronizität der Operationen und zum Problem der <i>décalages</i>	154
1.2.3.4.	Abschließende Betrachtung und pädagogisch-psychologische Konsequenzen aus der Diskussion von Piagets Stufentheorie	156
1.2.4.	Die Rolle der Sprache in der Entwicklung der kognitiven Strukturen	157
1.2.4.1.	Das Verhältnis von Sprache und Denken bei Piaget	157
1.2.4.2.	Furth: Denken ohne Sprache	163
1.2.4.3.	Schichtenspezifische Sprachformen und ihr Einfluß auf die kognitive Entwicklung	164
1.2.4.4.	Pädagogisch-psychologische Konsequenzen	166
1.2.5.	Bruners Theorie der kognitiven Entwicklung	167
1.2.5.1.	Die Theorie der Genfer Schule und ihre Modifikation durch Bruner	167
1.2.5.2.	Bruners Theorie in den Versuchssituationen	169
	Versuche zur Bildung von Äquivalenzrelationen	169
	Versuch zur multiplen Klassifikation	171
	Versuch zum Umgang mit relationalen Begriffen	174
	Invarianzversuche	176
	Fragespiele	179
1.2.5.3.	Die Strukturen der Sprache und der kognitiven Verhaltens- weisen	182
1.2.6.	Produktives und kreatives Denken	182
1.2.6.1.	Kreativität als Erweiterung des Intelligenzkonzepts	184
1.2.6.2.	Piagets Konstruktivismus als eine Theorie des kreativen Denkens	189
1.3.	Lernpsychologische Aspekte	193

1.3.1.	Entwicklung und Lernen bei Piaget	193
1.3.2.	Vom Erlernen operatorischer Strukturen	195
1.3.2.1.	Lernversuche und für den Lernprozeß relevante Faktoren	195
1.3.2.2.	Die didaktische Konsequenz: operatorisches Üben	202
1.3.3.	Lernpsychologische Konsequenzen aus Bruners Theorie der kognitiven Entwicklung	205
1.3.4.	Zum Problem der Förderung des kreativen Denkens	213
1.3.5.	Das Transferproblem	215
1.3.5.1.	Piagets <i>structures d'ensemble</i> und das Transferproblem	216
1.3.5.2.	Bruners Repräsentationsweisen und das Transferproblem	220
1.3.6.	Unterrichtssituation und Lehrerverhalten als relevante Faktoren für den Erwerb kognitiver Strukturen	221
1.3.6.1.	Die Unterrichtssituation ist anders	221
1.3.6.2.	Lehrerverhalten und kognitive Entwicklung	223
2.	Analyse der Unterrichtsmethoden der mathematischen Früherziehung	225
2.1.	Unser Standort und die allgemeine Fragestellung	225
2.1.1.	Kriterien für eine Analyse	225
2.1.2.	Unser Vorgehen	230
2.2.	Charakterisierung der Unterrichtsmethoden nach ihren wesentlichen denkpsychologischen Merkmalen	231
2.2.1.	Ganzheits- und gestaltpsychologisch orientierte Methoden	231
2.2.1.1.	J. Wittmann: Der ganzheitliche analytisch-synthetische Rechen- unterricht als „mengengeometrisches Rechnen“	231
2.2.1.2.	Karaschewskis Präzisierung und Modifizierung des Wittmannschen Rechenunterrichts	243
2.2.1.3.	Das Gestaltrechnen nach Kern/Gieding	251
2.2.2.	Operative oder operatorische Methoden	258
2.2.2.1.	Operatives Rechnen nach Fricke/Besuden	258
2.2.2.2.	Stübe: Ordnungsrelationen in der Grundschule	279
	Ein Exkurs von theoretischer Bedeutung	286
2.2.2.3.	Bärmann/Resag: Verschränkung von Mengenlehre und Zahlen- rechnen	287
2.2.2.4.	Brinkmann: Ein „Lehrgang operativer Denkschulung“	298
2.2.3.	Mengentheoretisch orientierte Methoden	301
2.2.3.1.	Der Aufbau der Mathematik bei Dienes	301
2.2.3.2.	Der konstruktiv-dynamische Lehrgang von N. Picard für den Anfangsunterricht in Mathematik	324

2.2.3.3.	Neunzig/Sorger: Wir lernen Mathematik	333
2.2.3.4.	Bauersfeld u. a.: „alef“ — Wege zur Mathematik	346
2.2.4.	Die Analyse nach den weiteren Kriterien	377
2.2.4.1.	Mathematikunterricht und Kreativität	377
2.2.4.2.	Die Unterrichtsmethoden und das Transferproblem	383
2.2.4.3.	Die Sprache im Mathematikunterricht	386
2.2.4.4.	Die Motivation im Mathematikunterricht	390
2.2.4.5.	Denkerziehung im Bereich der infralogischen Strukturen	393
2.3.	Über die Rolle des Denkens in der mathematischen Früherziehung: Zusammenfassung	400
	Nachwort: Über die pädagogisch-anthropologische Dimension der mathematischen Früherziehung	405
	Literatur	408