

INHALTSÜBERSICHT

KAPITEL I. EINLEITUNG 1

- § 1. Zum Standort dieser Arbeit 1
 - 1.1 Boolesche Algebra am Gymnasium: Bemerkungen zur Situation 1
 - 1.2 Beschreibung der mathematisch-didaktischen Analyse 9
 - 1.3 Spezielle Zielsetzungen und Methoden dieser Arbeit 22

- § 2. Überblick über die Arbeit 28

KAPITEL II. AXIOMATIK UND ELEMENTARE MODELLE 34

- § 3. Axiomatik der Booleschen Algebra 34
 - 3.1 Mathematische Grundlagen 34
 - 3.1.1 Allgemeines zu algebraischen Axiomensystemen 34
 - 3.1.2 Axiomensysteme für Boolesche Algebren 37
 - 3.2 Notationen und Bezeichnungen 49
 - 3.3 Didaktische Anmerkungen zur axiomatischen Behandlung der Booleschen Algebra in der Schule 57
 - 3.3.1 Formen von Axiomatik in der Mathematik 58
 - 3.3.2 Formen polymorpher abstrakter Axiomatik im Schulunterricht 60
 - 3.3.3 Exkurs zur didaktischen Funktion von Beispielen in polymorphen axiomatischen Theorien (deduktive Phase) 63
 - 3.3.4 Axiomatisierung bei der Booleschen Algebra 67
 - 3.3.5 Fertige Axiomensysteme für Boolesche Algebren 70

| | |
|---|-----|
| § 4. Einige elementare Modellklassen Boolescher Algebren | 73 |
| 4.1 <u>Darstellung der einzelnen Modellklassen</u> | 73 |
| 4.1.1 Mengenalgebren | 75 |
| 4.1.2 Exkurs: Endliche und atomare Boolesche Algebren | 80 |
| 4.1.3 Teileralgebren | 84 |
| 4.1.4 Beispiele aus dem Bereich der Logik | 85 |
| 4.1.5 Ereignisalgebren | 91 |
| 4.1.6 Schaltalgebra | 96 |
| 4.1.7 Idempotente in kommutativen Ringen mit Eins | 100 |
| 4.1.8 Zyklische Klassen von n-Ecken | 100 |
| 4.2 <u>Didaktische Aspekte</u> | 101 |
| 4.2.1 Erscheinungsformen der Modelle im Schulunterricht | 102 |
| 4.2.2 Auswahlkriterien für die Heranziehung konkreter Beispiele | 107 |
| 4.2.3 Konsequenzen | 111 |
| 4.2.4 Zum Verhältnis: Boolesche Algebra - Boolescher Ring | 120 |
| 4.2.5 Axiomatisierungsvorübungen in Modellen der Booleschen Algebra | 127 |
| | |
| KAPITEL III. AUFBAU EINER ELEMENTAREN ALGEBRAISCHEN THEORIE | 130 |
| | |
| § 5. Homomorphismen zwischen Booleschen Algebren | 130 |
| 5.1 <u>Abstrakte Darstellung</u> | 130 |
| 5.1.1 Homomorphismen zwischen algebraischen Strukturen | 130 |
| 5.1.2 Homomorphismen zwischen Booleschen Algebren | 132 |
| 5.2 <u>Beispiele</u> | 134 |
| 5.2.1 Homomorphismen zwischen Mengenalgebren | 134 |
| 5.2.2 Homomorphismen zwischen Ereignisalgebren | 143 |
| 5.2.3 Homomorphismen zwischen Booleschen Algebren zweiwertiger Funktionen | 146 |
| 5.3 <u>Didaktische Aspekte</u> | 151 |
| 5.3.1 Allgemeines zu Homomorphismen und zur Kategoriensprache | 151 |
| 5.3.2 Homomorphismen zwischen Booleschen Algebren | 157 |
| | |
| 6. Boolesche Unteralgebren und Koprodukte | 164 |
| 6.1 <u>Mathematische Darstellung</u> | 164 |
| 6.1.1 Allgemeines zur Unterobjektsrelation und zu Erzeugungsfragen | 164 |
| 6.1.2 Allgemeines zu Koprodukten | 170 |
| 6.1.3 Boolesche Unteralgebren | 173 |
| 6.1.4 Erzeugungsprobleme bei Booleschen Algebren | 176 |
| 6.1.5 Koprodukte Boolescher Algebren | 185 |

| | |
|---|-----|
| 6.2 <u>Beispiele</u> | 193 |
| 6.2.1 Mengenalgebren | 193 |
| 6.2.1.1 Durch Partitionen erzeugte Mengenalgebren | 193 |
| 6.2.1.2 Mengenalgebren über Produktmengen | 199 |
| 6.2.2 Beispiele aus anderen Bereichen | 206 |
| 6.3 <u>Didaktische Aspekte</u> | 212 |
| § 7. Boolesche Restklassenobjekte und Produkte Boolescher <u>Algebren</u> | 218 |
| 7.1 <u>Mathematische Darstellung</u> | 218 |
| 7.1.1 Allgemeines zu Quotientenobjekten und Restklassenalgebren | 218 |
| 7.1.2 Allgemeines zu Produkten | 222 |
| 7.1.3 Boolesche Restklassenalgebren | 224 |
| 7.1.4 Produkte Boolescher Algebren | 235 |
| 7.2 <u>Beispiele</u> | 239 |
| 7.2.1 Mengenalgebren | 239 |
| 7.2.2 Beispiele aus anderen Bereichen | 243 |
| 7.3 <u>Didaktische Aspekte</u> | 247 |
| 7.3.1 Allgemeines zu Äquivalenzrelationen | 247 |
| 7.3.2 Kongruenzrelationen | 248 |
| 7.3.3 Boolesche Restklassenalgebren | 253 |
| 7.3.4 Produkte algebraischer Strukturen | 256 |
| § 8. Bemerkungen zum Satz von Stone | 257 |
| 8.1 Mathematische Bemerkungen | 257 |
| 8.2 Didaktische Bemerkungen zum endlichen Fall | 263 |
| 8.3 Didaktische Bemerkungen zum allgemeinen Fall | 266 |
| KAPITEL IV. SCHLUSS | 269 |
| § 9. Zusammenfassung und Ausblick | 269 |
| 9.1 Hauptergebnisse der Arbeit | 269 |
| 9.2 Hinweise auf mögliche Weiterführungen | 274 |
| LITERATURVERZEICHNIS | 277 |