

Inhalt

<i>Einführung</i>	9
<i>1. Rechnen mit natürlichen Zahlen</i>	11
1.1 Begriff der natürlichen Zahl	12
1.1.1 Kardinalzahlmodell	12
1.1.2 Darstellung am Zahlenstrahl	17
1.1.3 Natürliche Zahlen in kardinaler und ordinaler Verwendung und zur Bezeichnung von Operatoren	18
1.2 Addition und Subtraktion	21
1.2.1 Addition und Subtraktion im Kardinalzahlmodell	21
1.2.2 Addition und Subtraktion am Zahlenstrahl. Verschiedene Auffassungen der Addition	25
1.3 Multiplikation und Division	30
1.3.1 Multiplikation und Division im Kardinalzahlmodell	30
1.3.2 Multiplikation und Kreuzmenge	33
1.3.3 Multiplikation und Division am Zahlenstrahl. Verschiedene Auffassungen der Multiplikation	34
1.4 Rechengesetze der Addition und der Multiplikation	37
1.4.1 Rechengesetze der Addition	38
1.4.2 Rechengesetze der Multiplikation	39
1.4.3 Bedeutung der Rechengesetze. Verknüpfungsgebilde	41
1.5 Zahldarstellung in Positionssystemen. Schriftliche Rechenverfahren ...	44
1.5.1 Potenzschreibweise. Positionssysteme	44
1.5.2 Schriftliche Rechenverfahren	47
<i>2. Teilbarkeitslehre</i>	51
2.1 Inhalt der Teilbarkeitslehre	51
2.2 Teilbarkeitsrelation	52
2.3 Primzahlen, zusammengesetzte Zahlen	61
2.4 Teilmengen. Vielfachenmengen. K.g.V., g.g.T.	63
2.4.1 Gemeinsame Teiler	63
2.4.2 Gemeinsame Vielfache	68
2.4.3 Zusammenhänge	70
2.5 Teilbarkeitsregeln	72
2.5.1 Mathematische Voraussetzungen	72
2.5.2 Teilbarkeitsregeln bei dekadischer Zahldarstellung	76
2.5.3 Ergänzende Bemerkungen	81

3. <i>Lehre von den Größen</i>	85
3.1 Begriff der Größe. Meßprozeß. Stufen der Begriffsbildung	85
3.1.1 Größen	85
3.1.2 Messen. Maßzahl, Maßeinheit	89
3.1.3 Stufengang bei der Einführung in einen Größenbereich	95
3.2 Die einzelnen Größenarten, insbesondere Inhaltsmaße	100
3.3 „Größenbereich“ als Strukturbegriff	106
3.3.1 Hinführung zur axiomatischen Theorie	106
3.3.2 Axiomatische Beschreibung eines („Bürgerlichen“) Größenbereichs ..	110
4. <i>Bruchzahlen, Bruchrechnung</i>	115
4.1 Zur Entwicklung und Begründung der Bruchrechnung	115
4.1.1 Herkömmliche Bruchrechnung	115
4.1.2 Bruchzahlen in der Mathematik und der modernen Didaktik	121
4.1.2.1 Einführung unter dem Gesichtspunkt der Zahlbereichserweiterung .	121
4.1.2.2 Einführung mittels des Begriffes „Größenbereich“	126
a) Brüche als Größen	127
b) Brüche als Operatoren	131
4.1.2.3 Neukonzeptionen der Bruchrechnung in der Schule	139
4.2 Ein möglicher Lehrgang der Bruchrechnung	142
4.2.1 Einführung der Bruchzahlen	142
4.2.2 Rechnen mit Bruchzahlen	146
4.3 Dezimalbruchschreibweise. Rechnen mit Dezimalbrüchen	152
5. <i>Relationen, Funktionen, Strukturen (Gebilde)</i>	159
5.1 Relationen, Funktionen	160
5.1.1 Relationen in einer Menge. Ordnungs- und Äquivalenzrelationen	160
5.1.2 Relationen zwischen zwei Mengen; Funktionen	172
5.1.2.1 Der allgemeine Relationsbegriff	172
5.1.2.2 Funktionen (Begriff, Darstellung, Zusammensetzung, Umkehrung) .	174
5.1.3 Zur Bedeutung und unterrichtlichen Behandlung von Relationen und Funktionen (Ergänzungen)	185
5.2 Strukturen (Gebilde)	190
5.2.1 Verknüpfungs- und Ordnungsgebilde	190
5.2.2 Zur Bedeutung und unterrichtlichen Behandlung von Strukturen (Ergänzungen)	197
6. <i>Angewandtes Rechnen</i>	209
6.1 Didaktik und Methodik der „Dreisatzrechnung“	209
6.1.1 Didaktische Analyse der herkömmlichen Dreisatzrechnung. Abbildungen von Größenbereichen	209

6.1.1.1 Proportionale Abbildungen	211
6.1.1.2 „Antiproportionale“ Abbildungen	218
6.1.2 Dreisatzrechnung in moderner Behandlung	223
6.2 Prozent- und Zinsrechnung	228
6.2.1 Prozentrechnung	228
6.2.2 Zinsrechnung, Zinseszins	232
6.3 Sachrechnen	237
6.3.1 Bedeutung und Inhalt des Sachrechnens	237
6.3.2 Lösungshilfen beim Sachrechnen	245
6.4 Rechenhilfsmittel beim angewandten Rechnen	249
6.4.1 Herkömmliche Rechenhilfsmittel (Tabellen, logarithmisches Rechnen, Rechenstab)	250
6.4.2 Taschenrechner und Algorithmen im Unterricht	260
6.4.2.1 Taschenrechner	260
6.4.2.2 Algorithmen. Der „algorithmische Aspekt“ im Unterricht	264
6.5 Anhang: Zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik	277
7. <i>Rationale Zahlen, Reelle Zahlen, Potenzen und Wurzeln</i>	281
7.1 Einführung der ganzen Zahlen	281
7.1.1 Zur Problematik der ganzen Zahlen im Unterricht	281
7.1.2 Ganze Zahlen in der Mathematik und der modernen Didaktik	284
7.1.2.1 Einführung unter dem Gesichtspunkt der Zahlbereichserweiterung	285
7.1.2.2 Einführung mittels des Begriffes „Skalenbereich“	289
a) Weg I: Operationen in \mathbb{Z} als Abbildungen von Skalenbereichen	291
b) Weg II: Operationen in \mathbb{Z} als Verkettungen von Abbildungen (Operatoren)	297
c) Zur didaktischen Eignung der Einführungswege I und II	302
7.1.3 Ein möglicher Lehrgang des Rechnens mit ganzen Zahlen	304
7.2 Zahlbereichserweiterung zu den rationalen Zahlen	312
7.3 Zahlbereichserweiterung zu den reellen Zahlen	315
7.3.1 Zur Problematik der irrationalen Zahlen im Unterricht	315
7.3.2 Reelle Zahlen in der Mathematik und der modernen Didaktik	318
7.3.2.1 Axiomatische Beschreibung der reellen Zahlen	319
7.3.2.2 Konstruktive Einführungen der reellen Zahlen	326
7.3.3 Möglichkeiten der Behandlung im Unterricht	330
7.4 Potenzen und Wurzeln. Spezielle Funktionen	336
7.4.1 Potenzen mit rationalen Exponenten. Wurzeln	338
7.4.2 Potenzfunktionen	344
7.4.3 Potenzen mit reellen Exponenten. Exponentialfunktionen	347

8. Rechnen mit Termen. Gleichungslehre	351
8.1 Mengenlehre und Aussagenlogik. Bedeutung für die Algebra	352
8.1.1 Mengen und ihre Bedeutung. Mengenalgebra	352
8.1.2 Aussagenlogik und ihre Bedeutung	357
8.2 Terme. Termumformungen	363
8.3 Gleichungslehre	365
8.3.1 Neuorientierung. Propädeutische Stufe	365
8.3.2 Systematische Behandlung der Gleichungslehre (Lösungsverfahren) ..	366
<i>Literaturverzeichnis</i>	369
<i>Register</i> (Schlagwortverzeichnis)	375

Hinweise zur Benutzung des Buches

Textverweisungen erfolgen durch die kursiv gesetzten Nummern der Abschnitte (zum Beispiel (2.3)) oder Unterabschnitte (zum Beispiel (3.1.2), (6.1.1.2)).

Abbildungen sind durch die Nummer des Abschnittes und fortlaufende Buchstaben gekennzeichnet (zum Beispiel 3.1b).

Fußnoten sind kapitelweise numeriert. Die zitierte Literatur ist zur Erleichterung des Studiums im *Literaturverzeichnis* am Schluß kapitelweise zusammengefaßt.