

# Inhaltsverzeichnis<sup>1</sup>

## TEIL I FACHDIDAKTISCHE GRUNDFRAGEN DES MATHEMATIKUNTERRICHTS IN DER SEKUNDARSTUFE II

Verfasser: U.-P. Tietze (Kap. 1, 2, 3, 5), F. Förster (Kap. 4)

1	AUSWAHL UND BEGRÜNDUNG VON ZIELEN, INHALTEN UND METHODEN .....	1
1.1	Grundfragen und Entwicklungen in der Curriculumdiskussion .....	2
1.1.1	Der Reformaufbruch in den sechziger Jahren und die Konsequenzen als einführendes Beispiel einer Curriculumdiskussion .....	2
1.1.2	Historische Entwicklungen und didaktische Strömungen des Mathematikunterrichts .....	4
1.1.3	Elemente der didaktischen Curriculumdiskussion.....	10
	<i>Exkurs: Globale Curriculumrevision? *</i> .....	11
	<i>Exkurs: Taxonomie und Operationalisierung mathematischer Lernziele *</i> .....	12
	<i>Allgemeinbildung und Unterrichtskultur</i> .....	12
	<i>Wissenschaftsorientierung und Wissenschaftspropädeutik</i> .....	15
	<i>Exemplarisches Lehren und Lernen</i> .....	16
	<i>Vorstellungen von Lehrern zum Curriculum</i> .....	17
1.1.4	Merkmale von Grund- und Leistungskursen .....	17
	<i>Grund- und Leistungskurse aus der Sicht des Lehrers</i> .....	18
1.2	Zur Begründung von Zielen für den MU in der S II.....	20
1.2.1	Allgemeine und spezielle inhaltsbezogene Ziele .....	22
	<i>Die Vermittlung eines angemessenen Bildes von Mathematik als allgemeines inhaltsbezogenes Ziel</i> .....	23
	<i>Spezielle inhaltsbezogene Qualifikationen</i> .....	25
1.2.2	Allgemeine verhaltensbezogene Ziele .....	27
	<i>Ein Katalog allgemeiner verhaltensbezogener Lernziele für den MU der S II</i> .....	29
	<i>Vertiefung: Ergänzende Erläuterung allgemeiner verhaltensbezogener Lernziele *</i> .....	32
1.3	Fundamentale Ideen.....	37
	<i>Leitideen, bereichsspezifische Strategien, zentrale Mathematisierungsmuster</i> .....	40
1.4	Zur Rolle des Rechners im Mathematikunterricht .....	42
	<i>Mögliche Funktionen von Rechnern im Mathematikunterricht</i> .....	45
	<i>Wichtige Inhalte in neuem Licht</i> .....	47
	Aufgaben, Wiederholung, Ergänzung.....	48
2	LERNEN UND LEHREN VON BEGRIFFEN UND REGELN .....	50
2.1	Elemente des Begriffs- und Regellerns aus psychologischer Sicht.....	51
	<i>Sinnvolles rezeptives Lernen</i> .....	52
	<i>Subjektive Aspekte der Begriffsbildung</i> .....	54
	<i>Repräsentation</i> .....	55
2.2	Besonderheiten mathematischer Begriffs- und Theoriebildung.....	56
2.2.1	Begriffsbildung im Mathematikunterricht .....	57
	<i>Zur Bedeutung mathematischer Begriffe</i> .....	58
2.2.2	Begriffsentwicklung und Exaktifizieren * .....	60
	<i>Exkurs in die Algebra</i> .....	63
2.2.3	Elementarisieren – zum Verhältnis von Fach- und Schulmathematik * .....	64
2.3	Exkurs: Lern- und Lehrschwierigkeiten * .....	64
2.3.1	Einführende Überlegungen.....	65

<sup>1</sup> Abschnitte zur Vertiefung sind mit \* gekennzeichnet. Die Numerierung von Bildern und Schemata bezieht sich auf die Kapitel (oberste Gliederungsebene). Die Numerierung von Beispielen und Aufgaben erfolgt auf der Ebene der Hauptabschnitte (zweite Ebene, etwa Beispiel 2 in 2.3).

<i>Schema und Prozedur</i> .....	66
<i>Lernschwierigkeiten in der Algebra</i> .....	67
2.3.2 Semantischer Aspekt: das Aufstellen und Interpretieren von Termen und Formeln .....	68
2.3.3 Syntaktisch-algorithmischer Aspekt .....	69
<i>Das algorithmische Lösen einfacher Aufgaben</i> .....	69
<i>„Generalregeln“ als Ursache von Fehlern</i> .....	72
<i>Zusätzliche Schwierigkeiten einer „höheren“ Algebra</i> .....	73
<i>Folgerungen und Konsequenzen</i> .....	74
2.4 Formen von Unterricht und Lehrverfahren .....	74
2.4.1 Einführung .....	74
<i>Exkurs: Modell-Lernen *</i> .....	75
2.4.2 Drei idealtypische Lehrverfahren .....	76
<i>Ausubels Verfahren des expositorischen Lehrens</i> .....	77
<i>Verfahren des entdeckenlassenden Lehrens im Sinne von Bruner</i> .....	78
<i>Der fragend-entwickelnde Unterricht</i> .....	80
2.5 Methodische Hinweise zum Lehren mathematischer Begriffe, Theorien und Regeln .....	82
2.5.1 Allgemeine methodische Hinweise und fachdidaktische Prinzipien .....	82
<i>Das Anerkennen von Vorwissen</i> .....	82
<i>Das Subsumieren unter Oberbegriffe: geeignete Ankerideen und Grundvorstellungen</i> .....	83
<i>Fachdidaktische Prinzipien</i> .....	84
2.5.2 Zur Planung des Begriffs- und Regellehrens .....	86
<i>Mittelfristige Planung</i> .....	86
<i>Kurzfristige Planung</i> .....	87
<i>Verstehen und Verstehenskontrolle</i> .....	88
Aufgaben, Wiederholung, Anregungen zur Diskussion .....	89
3 PROBLEME ENTDECKEN, PROBLEME LÖSEN .....	91
3.1 Einführendes Beispiel zum Problemlösen .....	92
<i>Problemkontext Lineares Optimieren</i> .....	92
3.2 Charakteristische Aspekte von Problemen .....	93
<i>Problemkontext Geometrische Objektstudien</i> .....	97
3.3 Heuristische Verfahrensregeln und prozeßorientierte Hilfen .....	98
3.3.1 Globale Heuristiken .....	99
3.3.2 Lokale Heuristiken .....	102
3.4 Ziele und Methoden eines problemorientierten Unterrichts .....	108
3.4.1 Vorstellungen über einen problemorientierten Unterricht und seine Ziele .....	108
3.4.2 Problemorientierung im alltäglichen Unterricht .....	110
3.4.3 Zur Förderung von Problemlösefähigkeiten .....	112
<i>Problemkontext Funktionen, Kurven und deren Krümmung</i> .....	114
3.5 Exkurs: Empirische Untersuchungen zum Problemlösen * .....	117
Quellen für Problemkontexte .....	119
Wiederholung, Aufgaben, Anregungen zur Diskussion .....	119
4 ANWENDEN, MATHEMATISIEREN, MODELLBILDEN .....	121
4.1 Mathematisieren und Modellbilden .....	121
<i>Der Modellbildungsprozeß</i> .....	121
<i>Deskriptive und normative Modelle</i> .....	125
<i>Möglichkeiten und Grenzen mathematischer Modellbildung</i> .....	126
4.2 Tendenzen und Strömungen zur Anwendungsorientierung von MU .....	128
4.2.1 Historische Entwicklungen und neuere Tendenzen in der fachdidaktischen Diskussion .....	128
4.2.2 Ziele eines anwendungsorientierten Mathematikunterrichts .....	131

4.3	Anwendungsorientierung im alltäglichen Mathematikunterricht .....	133
4.3.1	Unterrichtsbeispiele zum anwendungsorientierten Mathematikunterricht.....	134
	<i>Das Beispiel „Verkehrsdurchsatz“ .....</i>	134
	<i>Das Beispiel „AIDS-Test“ .....</i>	136
	<i>Von der Einkleidung zum Sachproblem.....</i>	137
	<i>Kleinvieh macht auch Mist – „Massentierhaltung“ und andere kleine Beispiele .....</i>	139
4.3.2	Welche Rolle spielt die Anwendungsorientierung in der Unterrichtspraxis? .....	140
4.3.3	Methodische Einzelfragen zum anwendungsorientierten MU .....	142
4.4	Exkurs: Numerische Mathematik im anwendungsorientierten MU * .....	145
	Wiederholung, Aufgaben, Anregungen zur Diskussion.....	148
5	BEWEISEN, BEGRÜNDEN, ARGUMENTIEREN.....	151
5.1	Beweisen, Begründen, Argumentieren – eine einführende Analyse.....	151
	<i>Der Beweis in der Fachwissenschaft .....</i>	151
	<i>Axiomensysteme .....</i>	152
	<i>Historischer Exkurs zum Beweisen, zur Rolle der Anschauung und</i> <i>der Formalisierung * .....</i>	153
	<i>Exkurs über die Rolle des Computers beim Beweisen * .....</i>	155
	<i>Anschauliches und präformales Beweisen; lokales und globales Ordnen.....</i>	156
	<i>Begründen und Argumentieren – Formen, Darstellung und Allgemeingültigkeit .....</i>	158
5.2	Zur Praxis des Beweisen .....	159
5.2.1	Der Begriff der Argumentationsbasis und subjektive Aspekte des Beweisen.....	159
	<i>Definitionen und Schlußregeln als Teil der Argumentationsbasis.....</i>	161
5.2.2	Praxis des Beweisen im Mathematikunterricht .....	164
5.3	Zielanalyse zum Begründen und Beweisen .....	166
5.4	Methodische Überlegungen zum Begründen und Beweisen .....	169
	<i>Überprüfen und Bewerten von Schülerbeweisen .....</i>	174
	<i>Kriterien für einen didaktisch guten Beweis .....</i>	175
	Wiederholung, Aufgaben, Anregungen zur Diskussion.....	176

## TEIL II ANALYSIS

Verfasser: M. Klika (Kap. 6, Abs. 8.1, 8.3), U.-P. Tietze (Kap. 7, Abs. 8.2), F. Förster (Kap. 9)

6	HISTORISCHE ENTWICKLUNG, BEZIEHUNGSNETZE UND FUNDAMENTALE IDEEN.....	178
6.1	Entwicklung der Infinitesimalrechnung.....	179
6.2	Leitideen und fachlicher Hintergrund.....	183
6.2.1	Reelle Zahlen. Funktions-, Grenzwert- und Stetigkeitsbegriff .....	184
	<i>Zum Funktionsbegriff .....</i>	185
	<i>Funktionen von mehreren Variablen .....</i>	187
	<i>Zum Kurvenbegriff.....</i>	188
	<i>Zum Grenzwert- und Stetigkeitsbegriff.....</i>	188
6.2.2	Ableitung und Integral.....	190
	<i>Zum Ableitungsbegriff.....</i>	191
	<i>Ableitungsfunktion, Stammfunktion .....</i>	196
	<i>Globale Sätze .....</i>	197
	<i>Zum Integralbegriff .....</i>	198
	<i>Bogenlänge und Krümmung .....</i>	200
6.3	Zentrale Mathematisierungsmuster und bereichsspezifische Strategien.....	201
6.3.1	Verwendungssituationen und Zentrale Mathematisierungsmuster .....	201
	<i>Mathematisierungsmuster in Physik und Technik .....</i>	202
	<i>Mathematisierungsmuster in Biologie, Chemie, Medizin .....</i>	206
	<i>Mathematisierungsmuster in Wirtschafts- und Sozialwissenschaften.....</i>	207

6.3.2 Bereichsspezifische Strategien .....	211
Wiederholung, Aufgaben, Anregungen zur Diskussion .....	216
<b>7 ALLGEMEINE DIDAKTISCHE FRAGEN ZUM ANALYSISUNTERRICHT .....</b>	<b>218</b>
7.1 Fachdidaktische Strömungen und Entwicklungen zum Analysisunterricht .....	218
7.1.1 Ein historischer Überblick .....	218
7.1.2 Positionen gegen die Neue Mathematik .....	220
7.1.3 Positionen gegen das Vorherrschende „sinnentleerter Kalküle“ .....	221
<i>Problemorientierung</i> .....	222
<i>Anwendungsorientierung</i> .....	223
<i>Der Rechner im Analysisunterricht</i> .....	224
<i>Schülerorientierte Analysis – eine andere Unterrichtskultur</i> .....	226
7.1.4 Das Schulbuch im Analysisunterricht .....	228
7.2 Der Analysisunterricht aus der Sicht des Lehrers .....	232
<i>Der formale und der anwendungsbezogene Aspekt der Analysis</i> .....	234
7.3 Der Schüler im Analysisunterricht .....	236
<i>Das „Analysis-Bild“ des Schülers</i> .....	236
<i>Algebrabezogene Lernprobleme im Analysisunterricht</i> .....	236
<i>Graphen- und anschauungsbezogene Schwierigkeiten und Probleme zur</i> <i>Beziehung zwischen formalem und graphischem Aspekt</i> .....	238
<i>Begrifflich-logische Probleme</i> .....	238
7.4 Zur Rechtfertigung und zur Realisierung eines veränderten Analysisunterrichts .....	240
Wiederholung, Aufgaben, Anregungen zur Diskussion .....	241
<b>8 DIDAKTISCHE DISKUSSION VON EINZELTHEMEN .....</b>	<b>244</b>
8.1 Reelle Zahlen, Funktionen, Grenzwerte, Stetigkeit .....	244
8.1.1 Reelle Zahlen .....	244
8.1.2 Funktionen .....	245
<i>Transzendente Funktionen</i> .....	248
<i>Zur Exponentialfunktion</i> .....	249
<i>Zur Logarithmusfunktion</i> .....	250
<i>Zu trigonometrischen Funktionen</i> .....	250
<i>Funktionen von mehreren Veränderlichen</i> .....	251
8.1.3 Folgen-, Grenzwert- und Stetigkeitsbegriff .....	252
<i>Zum Stetigkeitsbegriff</i> .....	255
8.2 Differentialrechnung .....	257
8.2.1 Einführung des Ableitungsbegriffs .....	257
<i>Zwei Grundvorstellungen zum Ableitungsbegriff</i> .....	257
<i>Zum Begriff der Tangente</i> .....	259
<i>Einstiege in die Differentialrechnung</i> .....	261
<i>Ableitungsfunktion, Stammfunktion, graphisches Ab- und Aufleiten</i> .....	263
8.2.2 Ableitungsregeln und die Ableitung elementarer Funktionen .....	264
<i>Rationale Funktionen und Wurzelfunktionen</i> .....	264
<i>Produkt-, Quotienten- und Kettenregel</i> .....	265
<i>Ableitung der Winkelfunktionen</i> .....	267
<i>Ableitung der Exponential- und Logarithmusfunktionen</i> .....	268
8.2.3 Untersuchung von Funktionen mit Hilfe der Differentialrechnung .....	271
<i>Monotonie und Krümmung</i> .....	271
<i>Lokale Eigenschaften von Funktionen (Extrem- und Wendestellen)</i> .....	272
<i>Extremwertaufgaben und Funktionsbestimmungen</i> .....	273
<i>Approximation und Interpolation</i> .....	274
8.2.4 Exaktifizierungen und Vertiefungen .....	275
<i>Begriffsklärungen und Erörterung von Fehlvorstellungen</i> .....	275

<i>Ein lokales und globales Ordnen der zentralen Sätze der Analysis</i> .....	276
<i>Vertiefende Betrachtungen zur Approximation</i> .....	277
8.3 Zur Integralrechnung .....	279
8.3.1 Grundverständnis und Zugänge zum Integralbegriff .....	280
<i>Andere Zugänge</i> .....	284
8.3.2 Zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.....	284
8.3.3 Integrationskalkül und Numerische Verfahren .....	287
Wiederholung, Aufgaben, Anregungen zur Diskussion.....	292
<b>9 BEISPIELE ZUR PROBLEM- UND ANWENDUNGSORIENTIERUNG IM ANALYSISUNTERRICHT</b> .....	296
9.1 Funktionen, Kurven, Kurvenscharen und grafikfähige TR.....	296
9.1.1 Einführung in das Arbeiten mit dem grafikfähigen Taschenrechner .....	296
9.1.2 Beispiele zur Untersuchung von Funktionen und Kurvenscharen.....	300
<i>Ortskurven von Parabelscharen</i> .....	300
<i>Klassifikation einer Funktionsschar</i> .....	301
<i>Kurvenscharen: Rollkurven (Kreiszykloiden)</i> .....	302
9.2 Optimieren, Interpolieren und Approximieren .....	304
9.2.1 Das Extremwertproblem „Milchtüte“ .....	306
9.2.2 Das allgemeine isoperimetrische Problem.....	308
9.2.3 Die „Trassierung von Autobahnkreuzen“.....	309
9.3 Wachstumsfragen und Dynamische Systeme .....	311
9.3.1 Wachstumsfragen: Differentialgleichungen, Differenzgleichungen .....	311
<i>Einfache Wachstumsmodelle</i> .....	312
<i>Differenzgleichungen oder Differentialgleichungen im MU?</i> .....	315
<i>Exkurs: Chaos bei der logistischen Abbildung *</i> .....	316
9.3.2 Systemdynamik * .....	317
<i>Die Sensitivität von Systemen</i> .....	318
<i>Vernetzung – Wechselwirkung zwischen Populationen, Räuber-Beute-Systeme</i> .....	318
<i>Zeitverzögerte Rückkopplungen</i> .....	320
Wiederholung, Aufgaben, Anregungen zur Diskussion.....	322
<b>LITERATURVERZEICHNIS</b> .....	325
<b>STICHWORTVERZEICHNIS</b> .....	341