

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	9
1. Verknüpfungen	13
1.1 Zahlen	14
1.1.1 ggT	14
1.1.2 Minimum	15
1.1.3 Differenzbetrag	15
1.1.4 $a * b = a$	16
1.1.5 $a \circ b = 3$	16
1.2 Reste	17
1.2.1 Stundenrechnen	17
1.2.2 Endstellenrechnen	18
1.2.3 Verallgemeinerung	18
1.3 Mengen	20
1.3.1 Vereinigung	20
1.3.2 Durchschnitt	20
1.3.3 Differenz	20
1.4 Punkte	21
1.4.1 Mittelpunkt	21
1.4.2 Spiegelpunkt	21
1.5 Operatoren	22
1.5.1 Deckabbildungen	22
1.5.1.1 Deckdrehungen eines Quadrates	22
1.5.1.2 Deckabbildungen eines (nichtquadratischen) Rechtecks	25
1.5.2 Permutationen	27
1.5.2.1 Permutationen von 2 Elementen	27
1.5.2.2 Permutationen von 3 Elementen	30
1.5.3 Weitere Operatorspiele	33

1.5.3.1	Bewegungen am Dreieck	33
1.5.3.2	Formen-Farben-Tausch	33
1.6	Erarbeitung des Begriffes „Verknüpfung“	35
1.7	Verknüpfungen als Abbildungen der Produktmenge $M \times M$ in die Menge M	40
1.8	Verknüpfungsgebilde / Algebraische Struktur	41
1.9	Veranschaulichungsmittel	44
1.9.1	Verknüpfungstafel	44
1.9.2	Pfeildiagramm	44
1.9.3	Black-box-Maschine	45
2.	Eigenschaften einfacher Verknüpfungsgebilde	47
2.1	Assoziativität / Halbgruppe	47
2.2	Kommutativität	51
2.3	Neutrales Element	57
2.4	Inverses Element	62
2.5	Regularität	68
3.	Gruppen	73
3.1	Definition	73
3.2	Beispiele von Gruppen	76
3.2.1	Gruppen der Ordnung 2	76
3.2.1.1	$(\{+1, -1\}, \cdot)$	76
3.2.1.2	$(\{0,1\}, +_2)$	77
3.2.1.3	Permutationen von 2 Elementen	77
3.2.2	Gruppen der Ordnung 3	77
3.2.2.1	$(\{0,1,2\}, +_3)$	77
3.2.2.2	Bewegungen am Dreieck	78
3.2.2.3	Deckdrehungen eines gleichseitigen Dreiecks	78
3.2.3	Gruppen der Ordnung 4	78
3.2.3.1	Deckabbildungen eines (nichtquadratischen) Rechtecks	78
3.2.3.2	Formen-Farben-Tausch	79

3.2.3.3	Deckdrehungen eines Quadrates	79
3.2.3.4	$(\{0,1,2,3\}, +_4)$	79
3.2.4	Gruppe der Ordnung 5 $(\{0,1,2,3,4\}, +_5)$	79
3.2.5	Gruppen der Ordnung 6	80
3.2.5.1	Permutationen von 3 Elementen	80
3.2.5.2	Deckbewegungen eines gleichseitigen Dreiecks	80
3.2.5.3	$(\{0,1,2,3,4,5\}, +_6)$	81
3.2.6	Endliche Gruppen höherer Ordnung	81
3.2.6.1	Stundenrechnen	81
3.2.6.2	Endstellenrechnen	82
3.2.6.3	Endliche Gruppen der Ordnung n	82
3.2.7	Unendliche Gruppen	83
3.2.7.1	Die ganzen Zahlen unter der Addition $(\mathbb{Z}, +)$	83
3.2.7.2	Die geraden ganzen Zahlen unter der Addition $(G, +)$	83
3.2.7.3	Die positiven rationalen Zahlen unter der Multiplikation (\mathbb{Q}^+, \cdot)	83
3.2.7.4	Die rationalen Zahlen ohne Null unter der Multiplikation $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$	83
3.2.7.5	Die Menge aller Drehungen in der Ebene um einen festen Punkt P bezüglich des Nacheinanderausführens	84
3.2.7.6	Einige weitere unendliche Gruppen	84
3.3	<i>Äquivalente Gruppendifinitionen</i>	85
3.4	<i>Gruppen und Zahlbereichserweiterungen / Umkehrverknüpfungen</i>	91
3.5	<i>Gruppen und Gruppentafeln (Zusammenfassung)</i>	93
4.	Untergruppen / Zyklische Gruppen	95
4.1	<i>Definition der Untergruppe</i>	95
4.2	<i>Untergruppenkriterien</i>	98
4.3	<i>Satz von Lagrange</i>	101
4.4	<i>Zyklische Gruppen</i>	103
5.	Isomorphie	109
5.1	<i>Vorläufige Definition</i>	109

5.2	<i>Definition</i>	115
5.3	<i>Einige einfache Folgerungen</i>	119
5.4	<i>Abstrakte Gruppen</i>	121
5.5	<i>Denkökonomie durch Isomorphie</i>	125
6.	Ringe	129
6.1	<i>Distributive Verknüpfungsgebilde</i>	130
6.2	<i>Restklassenringe</i>	132
6.3	<i>Ringe</i>	139
6.4	<i>Integritätsringe</i>	141
7.	Körper	143
7.1	<i>Definition</i>	144
7.2	<i>Zusammenhang zwischen Körper und Integritätsring</i>	148
Anhang		
1.	Liste der benutzten Symbole	151
2.	Index	153
3.	Literaturhinweise	155