

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	1
I Einführung	5
1 Zufall und Wahrscheinlichkeit	5
2 Mathematik des Zufalls	7
II Wahrscheinlichkeit	11
1 Entwicklung der klassischen Wahrscheinlichkeit	11
1.1 Berühmte historische Beispiele und einige interessante Briefwechsel	11
1.2 Aufgaben und Ergänzungen	21
2 Zur geschichtlichen Entwicklung der Stochastik	24
3 Schritte zur Mathematisierung	30
3.1 Zum Modellbildungsprozess	30
3.2 Aufgaben und Ergänzungen	39
4 Endliche Wahrscheinlichkeitsräume (Teil 1)	40
4.1 Das Axiomensystem von Kolmogoroff	40
4.2 Folgerungen aus dem Axiomensystem – Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten	46
4.3 Ein zum Axiomensystem von Kolmogoroff äquivalentes Axiomensystem	56
4.4 Die Laplace-Verteilung (Gleichverteilung)	60
4.5 Aufgaben und Ergänzungen	64
5 Geometrische Wahrscheinlichkeiten	67
5.1 Vier Beispiele: Glücksrad, Zielscheibe, Paradoxon von Bertrand, Nadelproblem von Buffon	67

5.2	Aufgaben und Ergänzungen	75
6	Kombinatorisches Zählen	75
6.1	Abzählen	76
6.2	Allgemeines Zählprinzip der Kombinatorik	78
6.3	Kombinatorische Figuren	83
6.3.1	Permutationen ohne Wiederholung - Geordnete (Stich-) Proben ohne Zurücklegen	84
6.3.2	Permutationen mit Wiederholung - Geordnete (Stich-) Proben mit Zurücklegen	89
6.3.3	Kombinationen ohne Wiederholung - Ungeordnete (Stich-) Proben ohne Zurücklegen	91
6.3.4	Kombinationen mit Wiederholung - Ungeordnete (Stich-) Proben mit Zurücklegen	97
6.3.5	Die kombinatorischen Figuren im Überblick	100
6.4	Anwendungen der kombinatorischen Figuren	101
6.4.1	k -stellige Sequenzen mit Wiederholungen bei vorgegebenen Vielfachheiten	101
6.4.2	Permutationen mit Fixpunkten - Rencontre-Problem	103
6.5	Vier-Schritt-Modell zur Lösung von Kombinatorikaufgaben - Ein didaktischer Aspekt	111
6.6	Aufgaben und Ergänzungen	114
7	Endliche Wahrscheinlichkeitsräume (Teil 2)	119
7.1	Bedingte Wahrscheinlichkeit - Stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen	119
7.2	Bernoulli-Ketten	141
7.3	Totale Wahrscheinlichkeit und Satz von Bayes	148
7.4	Aufgaben und Ergänzungen	162

III Simulation und Zufallszahlen	169
1 Begriffserklärungen und Beispiele	169
2 Aufgaben und Ergänzungen	184
IV Zufallsvariable, Erwartungswert und Varianz	187
1 Zufallsvariable und die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen	187
2 Kumulative Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen	194
3 Erwartungswert und Varianz diskreter Zufallsvariablen	196
4 Aufgaben und Ergänzungen	204
V Spezielle diskrete Verteilungen	207
1 Binomialverteilung	207
2 Hypergeometrische Verteilung	211
3 Geometrische Verteilung (Pascal-Verteilung)	215
4 Aufgaben und Ergänzungen	219
VI Ungleichung von Tschebyscheff und Schwaches Gesetz der großen Zahlen von Bernoulli	223
1 Ungleichung von Tschebyscheff	223
2 Schwaches Gesetz der großen Zahlen	228
3 Aufgaben und Ergänzungen	231

VII Allgemeine Wahrscheinlichkeitsräume	233
1 Abzählbar-unendliche Wahrscheinlichkeitsräume	233
2 Überabzählbar-unendliche Wahrscheinlichkeitsräume	236
2.1 Die Menge \mathbb{R} und das System der Borelmengen auf \mathbb{R}	236
2.2 Abstrakte Wahrscheinlichkeitsräume	241
3 Aufgaben und Ergänzungen	243
VIII Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{I}))$	245
1 Verteilungsfunktionen und Dichtefunktionen	247
2 Verteilungsfunktionen zu vorgegebenen Dichtefunktionen	252
2.1 Konstruktion einer stetigen Verteilungsfunktion zu einer Dichtefunktion	252
2.2 Die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten durch Integrale über eine Dichtefunktion	254
3 Rechteckverteilung	256
4 Exponentialverteilung	258
5 Normalverteilung (Gauß-Verteilung)	262
5.1 Eigenschaften der Dichtefunktion	263
5.2 Die Standard-Normalverteilung	265
5.3 Approximation der Binomialverteilung mittels der Normalverteilung	271
5.4 Die Sigma-Regeln für die Normalverteilung	272
6 Erwartungswert und Varianz für Verteilungsfunktionen mit Dichten	273

7	Ausblick: Abstrakte Zufallsvariable	279
7.1	Messbare Abbildungen	279
7.2	Zufallsvariable mit Werten in \mathbb{R}	281
8	Aufgaben und Ergänzungen	282
IX	Lösungshinweise zu den Aufgaben	287
	Literatur	311
	Register	317