

Inhaltsübersicht

Vorwort		xxvii
Teil I	Mathematisches Grundwissen	1
Kapitel 1	Mengen und Aussagen	3
Kapitel 2	Natürliche und ganze Zahlen	43
Kapitel 3	Abbildungen, Äquivalenzrelationen und partielle Ordnungen	81
Teil II	Grundlagen der Diskreten Mathematik	117
Kapitel 4	Kombinatorik	119
Kapitel 5	Diskrete Wahrscheinlichkeitsrechnung	153
Kapitel 6	Algebraische Strukturen	193
Kapitel 7	Restklassenringe und Anwendungen	249
Kapitel 8	Homomorphismen und Faktorstrukturen	299
Teil III	Grundlagen der Linearen Algebra	331
Kapitel 9	Vektoren und Matrizen	333
Kapitel 10	Lineare Gleichungssysteme	375
Kapitel 11	Abstrakte Vektorräume und Anwendungen	417
Kapitel 12	Polynome	461
Kapitel 13	Formale Potenzreihen und rationale Funktionen	513

Teil IV	Grundlagen der Analysis	539
Kapitel 14	Die Axiomatik reeller Zahlen	541
Kapitel 15	Folgen	573
Kapitel 16	Reihen	613
Kapitel 17	Stetige Funktionen	653
Kapitel 18	Differentialrechnung	697
Kapitel 19	Integralrechnung	739
Literaturverzeichnis		781
Symbolverzeichnis		785
Register		793

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

xxvii

Teil I	Mathematisches Grundwissen	1
Kapitel 1	Mengen und Aussagen	3
	Einführung	4
1.1	Grundbegriffe der Mengenlehre	6
	A. Was ist eine Menge?	6
	B. Beschreibungen von Mengen	7
	C. Teilmengenbeziehung und Gleichheit bei Mengen	7
	D. Die Mächtigkeit einer Menge	8
	E. Eine Menge, die nicht fehlen darf	9
1.2	Grundlegende Zahlbereiche	9
	A. Mengenbezeichnungen für Zahlbereiche	9
	B. Zum Unterschied zwischen rationalen und reellen Zahlen	10
	C. Ein weiterer Grund für Zahlbereichserweiterungen	12
	D. Eine grundlegende Eigenschaft reeller Zahlen	12
	E. Die Lösung reeller quadratischer Gleichungen	13
1.3	Verknüpfungen von Mengen	15
	A. Vier grundlegende Verknüpfungen von Mengen	15
	B. Die disjunkte Mengenvereinigung	16
	C. Grundgesetze bei Mengenverknüpfungen	17
	D. Regeln bei Mächtigkeiten von endlichen Mengen	20
1.4	Aussagen und deren logische Verknüpfungen	21
	A. Wahrheitswerte logischer Aussagen	21
	B. Verknüpfungen von Aussagen und Wahrheitstafeln	22
	C. Zur Äquivalenz von Aussagen	23
	D. Die logische Grundlage dreier Beweismethoden	24
	E. Gesetzmäßigkeiten bei Verknüpfungen von Aussagen	26
	F. Normalformen bei aussagenlogischen Formeln	27
1.5	Potenzmenge und kartesische Produkte	27
	A. Die Potenzmenge einer Menge	27
	B. Mengensysteme	28
	C. Kartesische Produkte	29

1.6	Zur Bildung von mehrfachen Verknüpfungen	30
	A. Das Summen- und das Produktzeichen	30
	B. Grundregeln für das Rechnen mit Summen und Produkten	32
	C. n -fache kartesische Produkte	33
1.7	Verknüpfungen bei beliebigen Indexmengen	35
	A. Reihen – Summation unendlich vieler Zahlen	35
	B. Schnitte und Vereinigungen über Mengensystemen	35
	C. Existenz- und Allquantor	36
1.8	Exkurs: Das Auswahlaxiom	38
	Zusammenfassung	39
	Übungsaufgaben	40

Kapitel 2 Natürliche und ganze Zahlen 43

	Einführung	44
2.1	Vollständige Induktion	46
	A. Die Wohlordnungseigenschaft der natürlichen Ordnung	46
	B. Das Prinzip der vollständigen Induktion	47
	C. Zwei Beispiele zur vollständigen Induktion	49
	D. Die Fakultätsfunktion und deren Wachstumsverhalten	52
	E. Die geometrische Summe	54
	F. Die Summenregel aus der Kombinatorik	55
2.2	Primfaktorzerlegung	56
	A. Die Teilbarkeitsrelation	56
	B. Primzahlen	57
	C. Eine zweite Form des Prinzips der vollständigen Induktion	58
	D. Die Primfaktorzerlegung natürlicher Zahlen	60
	E. Ein naives Faktorisierungsverfahren	62
2.3	Darstellungen ganzer Zahlen	63
	A. Division mit Rest	63
	B. Die B -adische Darstellung einer ganzen Zahl	65
	C. Korrektheit und Terminierung bei Algorithmen	67
	D. Zur Komplexität eines Algorithmus	68
2.4	Der Euklidische Algorithmus	69
	A. Größte gemeinsame Teiler	69
	B. Die Berechnung des ggT zweier Zahlen	70
	C. Die Berechnung der Vielfachsummandarstellung eines ggT	72
	D. Eine Anwendung des erweiterten Euklidischen Algorithmus	74
	E. Das kleinste gemeinsame Vielfache zweier ganzer Zahlen	74
	Zusammenfassung	75
	Übungsaufgaben	77

Kapitel 3 Abbildungen, Äquivalenzrelationen und partielle Ordnungen

81

	Einführung	82
3.1	Grundlagen über Relationen	84
	A. Was ist eine Relation?	84
	B. Umkehrung und Verkettung von Relationen	84
	C. Gerichtete Graphen	85
3.2	Der Abbildungsbegriff	86
	A. Was versteht man unter einer Abbildung?	86
	B. Schreib- und Sprechweisen bei Abbildungen	87
	C. Spezielle Eigenschaften bei Abbildungen	88
	D. Die Urbildpartition zu einer Abbildung	90
	E. Zur Umkehrung von Abbildungen	91
	F. Die Verkettung von Abbildungen	92
3.3	Besonderheiten bei endlichen Mengen	93
3.4	Gleichmächtigkeit	96
	A. Was bedeutet die Gleichmächtigkeit zweier Mengen?	96
	B. Die Gleichmächtigkeit von \mathbb{N} , von \mathbb{Z} und von \mathbb{Q}	96
	C. Die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen	98
3.5	Ordnungsrelationen	100
	A. Partielle Ordnungen	100
	B. Einige Beispiele partieller Ordnungen	101
	C. Totale Ordnungen	102
3.6	Äquivalenzrelationen	103
	A. Was ist eine Äquivalenzrelation?	103
	B. Beispiele von Äquivalenzrelationen	103
	C. Äquivalenzklassen	105
	D. Restklassen modulo n	105
	E. Repräsentantensysteme	107
3.7	Exkurs: Kontinuumshypothese und Hasse-Diagramme	108
	A. Abbildungen und kartesische Produkte	108
	B. Zur Kontinuumshypothese	108
	C. Kleinste und größte Elemente in partiell geordneten Mengen	109
	D. Wohlordnungen als spezielle Ordnungen	109
	E. Darstellung partieller Ordnungen durch Hasse-Diagramme	110
	F. Reduktion und Normalformen	110
	Zusammenfassung	112
	Übungsaufgaben	114

Kapitel 4	Kombinatorik	119
	Einführung	120
4.1	Grundregeln des Zählens	122
	A. Die Summenregel	122
	B. Die Gleichmächtigkeitsregel	122
	C. Die Produktregel	123
	D. Die Potenzregel	124
4.2	Binomialkoeffizienten	125
	A. Potenzmengen und charakteristische Funktionen	125
	B. Was ist ein Binomialkoeffizient?	126
	C. Gesetzmäßigkeiten bei Binomialkoeffizienten	126
	D. Der Binomialsatz	129
4.3	Abbildungen auf endlichen Mengen	132
	A. Die Rückführung auf Standardmengen	132
	B. Die Anzahl der injektiven und bijektiven Abbildungen	132
	C. Formale Beweise	133
4.4	Das Inklusions-Exklusions-Prinzip	135
	A. Der Spezialfall bei Vereinigungen von drei Mengen	135
	B. Die allgemeine Inklusions-Exklusions-Formel	135
	C. Ein weiterer Beweis der Inklusions-Exklusions-Formel	137
	D. Die Siebformel	137
4.5	Anwendungen der Siebformel	138
	A. Die Euler-Funktion	138
	B. Die Multiplikativität der Euler-Funktion	140
	C. Die Anzahl der surjektiven Abbildungen zwischen zwei endlichen Mengen	141
4.6	Exkurs: Darstellung von Permutationen	142
	A. Eine erste Darstellungsmöglichkeit von Permutationen	142
	B. Die Zykelschreibweise	143
	C. Multiplikation von Zyklen	144
	D. Transpositionen – die einfachsten Permutationen	144
	E. Zur Eindeutigkeit der Darstellung von Permutationen	145
	Zusammenfassung	147
	Übungsaufgaben	149

Kapitel 5	Diskrete Wahrscheinlichkeitsrechnung	153
	Einführung	154
5.1	Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung	156
	A. Der Ergebnisraum	156
	B. Ereignisse	157
	C. Was versteht man unter einer Wahrscheinlichkeit?	158
	D. Grundregeln für das Arbeiten mit Wahrscheinlichkeitsräumen	160
5.2	Laplace-Modelle und vier Kugel-Modelle	162
	A. Was ist ein Laplace-Modell?	162
	B. Die vier grundlegenden Experimente als Kugel-Modelle . . .	163
	C. Die vier Kugel-Modelle nochmals im Überblick	165
5.3	Zufallsvariablen und induzierte Wahrscheinlichkeitsfunktionen	166
	A. Laplace-Modelle im Hintergrund	166
	B. Zufallsvariable und Transformation	168
	C. Schreibweisen beim Umgang mit Zufallsvariablen	170
	D. Indikatorvariablen und relative Häufigkeiten	170
5.4	Mehrstufige Experimente und bedingte Wahrscheinlichkeiten .	171
	A. Was versteht man unter einer bedingten Wahrscheinlichkeit?	171
	B. Zwei Beispiele für den Umgang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten	172
	C. Die Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit	173
	D. Die Formel von Bayes	174
	E. Ein Beispiel aus der Medizin	174
5.5	Stochastische Unabhängigkeit	176
	A. Die stochastische Unabhängigkeit zweier Ereignisse	176
	B. Stochastische Unabhängigkeit bei mehreren Ereignissen . . .	177
	C. Die Unabhängigkeit zweier Zufallsvariablen	177
5.6	Erwartungswert und Varianz	177
	A. Der Erwartungswert einer Zufallsvariablen	177
	B. Eine alternative Formel zur Berechnung des Erwartungswertes	179
	C. Die Varianz einer Zufallsvariablen	179
	D. Die wichtigsten Gesetzmäßigkeiten beim Bilden von Erwartungswerten	181
	E. Die wichtigsten Gesetzmäßigkeiten bei der Berechnung von Varianzen	183

5.7	Binomialverteilungen	185
	A. Bernoulli-Experimente und Bernoulli-Ketten	185
	B. Binomial-verteilte Zufallsvariablen	186
	C. Der Erwartungswert einer binomial-verteilten Zufallsvariablen	186
	D. Die Varianz einer binomial-verteilten Zufallsvariablen	188
	Zusammenfassung	189
	Übungsaufgaben	190
Kapitel 6 Algebraische Strukturen		193
	Einführung	194
6.1	Monoide	196
	A. Was versteht man allgemein unter einer Verknüpfung?	196
	B. Assoziative und kommutative Verknüpfungen	197
	C. Das neutrale Element: von der Halbgruppe zum Monoid	198
	D. Beispiele von Monoiden	199
6.2	Gruppen	203
	A. Invertierbarkeit	203
	B. Die Definition einer Gruppe und die Einheitengruppe eines Monoids	204
	C. Beispiele von Einheitengruppen und Gruppen	206
6.3	Untergruppen und der Satz von Lagrange	208
	A. Teilmonoide und Untergruppen	208
	B. Die Untergruppen von $(\mathbb{Z}, +, 0)$	210
	C. Zur Erzeugung von Teilmonoiden und zyklische Gruppen	211
	D. Linksnebenklassen von Untergruppen und der Satz von Lagrange	213
	E. Die Ordnung eines Gruppenelementes	215
6.4	Ringe und Körper	217
	A. Was versteht man unter der algebraischen Struktur eines Ringes?	217
	B. Allgemeine Rechengesetze bei Ringen	219
	C. Integritätsbereiche	220
	D. Die Einheitengruppe eines Ringes, Schiefkörper und Körper	221
	E. Grundlegende Beispiele von Ringen	222
	F. Eine Übersicht verschiedener Kategorien von Ringen	224
6.5	Der Körper der komplexen Zahlen	225
	A. Grundmenge, Verknüpfungen und Nachweis der Körpereigenschaft	225
	B. Die reellen Zahlen als Teilkörper der komplexen Zahlen	228

	C. Imaginäre Einheit, Real- und Imaginärteil	228
	D. Die konjugiert Komplexe und der Betrag einer komplexen Zahl	230
	E. Die Darstellung komplexer Zahlen durch Polarkoordinaten	231
	F. Die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus	232
6.6	Der Schiefkörper der Quaternionen	234
	A. Die Grundmenge und die Verknüpfungen bei Quaternionen	234
	B. Der Nachweis der Schiefkörpereigenschaft	234
6.7	Exkurs: Verbände und Boole'sche Algebren	237
	A. Die Definition eines Verbandes	237
	B. Gesetzmäßigkeiten bei allgemeinen Verbänden	237
	C. Einige Beispiele von Verbänden	239
	D. Die Vollständigkeit eines Verbandes sowie kleinstes und größtes Element	239
	E. Komplementarität und Distributivität	240
	F. Boole'sche Verbände	241
	Zusammenfassung	243
	Übungsaufgaben	245

Kapitel 7 Restklassenringe und Anwendungen 249

	Einführung	250
7.1	Modulares Rechnen	252
	A. Die Kongruenz modulo n und Restklassenarithmetik	252
	B. Der Restklassenring \mathbb{Z}_n	254
	C. Einheiten modulo n	255
	D. Welche Restklassenringe sind Körper?	258
	E. Effizientes Potenzieren in Restklassenringen	258
	F. Die Sätze von Euler und Fermat	260
	G. Die Ordnung modulo n und primitive Elemente in Restklassenkörpern	261
7.2	Das RSA-Public-Key-Cryptosystem	262
	A. Grundbegriffe der Kryptographie	262
	B. Beschreibung der Schlüssel beim RSA-System	263
	C. Die korrekte Arbeitsweise des RSA-Systems	264
	D. Schlüsselgenerierung und Sicherheit beim RSA-System	265
	E. Ein Beispiel zum RSA-System	267
7.3	Das Grundmodell bei fehlerkorrigierenden Codes	270
	A. Grundbegriffe der Codierungstheorie	270
	B. Die Eigenschaft der „Linearität“ bei Codes	272
	C. Weitere Aspekte des Grundmodells der Codierungstheorie	273
	D. Anforderungen an gute Codes	276

7.4	Kugelpackungsschranke und (7,4)-Hamming-Code	277
	A. Minimalabstand und Korrekturleistung eines Codes	277
	B. Die Kugelpackungsschranke und perfekte Codes	279
	C. Beispiele perfekter Codes	281
7.5	Prüfzeichencodierung	283
	A. Der ISBN-Code	283
	B. Eigenschaften des ISBN-Codes	284
	C. Der EAN-Code	286
7.6	Exkurs: Der Chinesische Restsatz	287
	A. Einführendes Beispiel und allgemeine Problemstellung	287
	B. Die Beschreibung der Lösungsmenge	288
	C. Die Lösbarkeit bei relativ primen Restsystemen	289
	D. Die iterative Berechnung der Lösung	292
	Zusammenfassung	294
	Übungsaufgaben	296
Kapitel 8 Homomorphismen und Faktorstrukturen		299
	Einführung	300
8.1	Homomorphismen bei Gruppen	302
	A. Strukturertretende Abbildungen auf Monoiden und Gruppen	302
	B. Spezielle Eigenschaften bei Gruppen-Homomorphismen	303
	C. Kern und Bild bei Gruppen-Homomorphismen	304
	D. Urbilder bei Gruppen-Homomorphismen	305
	E. Nochmals zur Ordnung eines Gruppenelementes	307
	F. Beispiele von Gruppen-Homomorphismen	307
8.2	Normalteiler und Faktorgruppen	308
	A. Äquivalenzen modulo einer Untergruppe und Normalteiler	308
	B. Kongruenzrelationen auf Gruppen neutrale Klassen und Normalteiler	310
	C. Kerne von Homomorphismen als neutrale Klassen	312
	D. Verknüpfung von Klassen und Faktorgruppen	312
	E. Neutrale Klassen als Kerne von Homomorphismen	314
8.3	Homomorphismen bei Ringen und Ideale	314
	A. Was ist ein Teilring von R ?	314
	B. Was ist ein Ring-Homomorphismus?	315
	C. Was ist der Kern eines Ring-Homomorphismus?	315
	D. Ideale	315
	E. Hauptidealbereiche	316
	F. Die Charakteristik eines Körpers	317

8.4	Kongruenzen bei Ringen, Ideale und Faktoringe	318
	A. Kongruenzrelationen auf Ringen	318
	B. Faktoringe und die Klassenmultiplikation	319
	C. Maximale Ideale und Körper als Faktoringe	320
8.5	Exkurs: Homomorphiesätze	322
	A. Der Homomorphiesatz für Gruppen	322
	B. Ein weiteres Beispiel: Alternierende Gruppen	323
	C. Der Homomorphiesatz für Ringe	324
	D. Nochmals der Chinesische Restsatz	324
	Zusammenfassung	326
	Übungsaufgaben	328

Teil III Grundlagen der Linearen Algebra 331

Kapitel 9 Vektoren und Matrizen 333

	Einführung	334
9.1	Vektorräume	336
	A. n -Tupelräume als Vektorräume	336
	B. Die Axiomatik abstrakter Vektorräume	337
	C. Matrixräume	339
	D. Spezielle Klassen quadratischer Matrizen	340
	E. Zeilen- und Spaltenvektoren als Matrizen	341
	F. Eine Übersicht über Vektoren und Matrizen	342
9.2	Teilräume und deren Erzeugung	343
	A. Was versteht man unter einem Teilraum?	343
	B. Linearkombinationen, lineare Hülle und Erzeugung von Vektorräumen	345
	C. Endlich erzeugte Vektorräume und kanonische Basen	347
9.3	Matrixalgebren	348
	A. Die Matrixmultiplikation	348
	B. Spezialfälle bei der Matrixmultiplikation	349
	C. Gesetzmäßigkeiten bei der Matrixmultiplikation	350
	D. Die quadratischen Matrizen als \mathbb{K} -Algebra	351
	E. Invertierbare Matrizen	354
9.4	Lineare Abbildungen	357
	A. Was ist eine \mathbb{K} -lineare Abbildung?	357
	B. Matrizen als \mathbb{K} -lineare Abbildungen	358
	C. Darstellung linearer Abbildungen als Matrizen	358
	D. Die Matrixmultiplikation als Hintereinanderausführung linearer Abbildungen	360

9.5	Komplexe Zahlen und Quaternionen als Matrixalgebren	361
	A. Veranschaulichung linearer Abbildungen auf \mathbb{R}^2	361
	B. Die komplexen Zahlen als Matrixalgebra	362
	C. Die Quaternionen als Matrixring über \mathbb{C}	364
	D. Die Quaternionen als Matrixalgebra über \mathbb{R}	365
9.6	Exkurs: Kerne von linearen Abbildungen und Faktorräume . . .	367
	A. Der Kern einer linearen Abbildung	367
	B. Faktorräume und Kongruenzrelationen bei Vektorräumen . .	367
	Zusammenfassung	369
	Übungsaufgaben	371

Kapitel 10 Lineare Gleichungssysteme 375

	Einführung	376
10.1	Die Struktur der Lösungsmenge	378
	A. Was ist ein lineares Gleichungssystem?	378
	B. Grundproblemstellungen	379
	C. Eine erste Analyse der Lösungsmenge	379
10.2	Die Lösungsmenge bei einer Gleichung	381
	A. Der einfachste Fall	381
	B. Eine Gleichung mit zwei Variablen	382
	C. Ein konkretes Zahlenbeispiel	382
	D. Die Lösungsmenge bei $(1, n)$ -Systemen	384
	E. Einige einfache Beispiele	385
10.3	Elementare Zeilenumformungen	389
	A. Zielsetzung	389
	B. Die drei Arten elementarer Zeilenumformungen	390
	C. Die zu Zeilenumformungen gehörende Äquivalenzrelation . .	392
10.4	Treppenmatrizen und der Gauß-Algorithmus	393
	A. Normierte Treppenmatrizen	393
	B. Pivotierung und Transformation in Treppengestalt	394
	C. Der Gauß-Algorithmus	396
	D. Ein Beispiel zum Gauß-Algorithmus	398
10.5	Die Lösungsmenge bei allgemeinen Problemen	400
	A. Ein vorbereitendes Resultat	400
	B. Die Entscheidung der Lösbarkeit	400
	C. Die Beschreibung des homogenen Lösungsraumes	402
	D. Zusammenfassung und Beispiele	403
10.6	Invertierbare Matrizen	406
	A. Elementarmatrizen	406
	B. Die Eindeutigkeit des Ergebnisses beim Gauß-Algorithmus . .	409
	C. Invertierbarkeitskriterien für Matrizen	410
	D. Test auf Invertierbarkeit und Berechnung der Inversen	

Zusammenfassung	413
Übungsaufgaben	414

Kapitel 11 Abstrakte Vektorräume und Anwendungen 417

Einführung	418
11.1 Basen	420
A. Lineare Unabhängigkeit und lineare Abhängigkeit	420
B. Beispiele zur linearen (Un-)Abhängigkeit	422
C. Minimale Erzeugersysteme alias Basen	423
D. Spaltenraum und Zeilenraum einer Matrix	424
E. Berechnung einer Basis des Spaltenraumes einer Matrix	425
11.2 Die Dimension eines Vektorraumes	427
A. Die Gleichmächtigkeit von je zwei Basen	427
B. Beispiele zum Dimensionsbegriff	429
C. Charakterisierungen von Basen und die Dimension von Teilräumen	430
11.3 Zur Darstellung linearer Abbildungen	432
A. Zur Existenz von injektiven, surjektiven, bijektiven linearen Abbildungen	432
B. Koordinatisierung allgemeiner Vektorräume	433
C. Darstellung allgemeiner linearer Abbildungen als Matrizen	433
D. Verkettung allgemeiner linearer Abbildungen	434
E. Dimensionsformeln und die Summenbildung bei Vektorräumen	436
11.4 Eigenwerte und Eigenvektoren	437
A. Was versteht man unter einem ϕ -invarianten Teilraum?	437
B. Darstellungen unter Berücksichtigung ϕ -invarianter Teilräume	438
C. Zur Diagonalisierbarkeit von ϕ	439
D. Die Suche nach Eigenwerten	443
11.5 Orthogonalität und Decodieren bei Hamming-Codes	444
A. Standard-Skalarprodukt und Orthogonalität	444
B. Innere versus äußere Darstellung bei Teilräumen	446
C. Generator- und Kontrollmatrix beim (7, 4)-Hamming-Code	446
D. Grundlagen zur Theorie allgemeiner linearer Codes	447
E. Ein Decodierverfahren für den (7, 4)-Hamming-Code	449
F. Die Familie der binären Hamming-Codes	450
11.6 Exkurs: Nicht endlich erzeugbare Vektorräume	451
A. Der Vektorraum aller Abbildungen von L nach \mathbb{K}	451
B. Der Teilraum der Abbildungen mit endlichem Träger	452
C. Basen für allgemeine Vektorräume	454
Zusammenfassung	456

	Einführung	462
12.1	Polynomringe	464
	A. Faltung versus punktweise Multiplikation	464
	B. Die Algebra der formalen Potenzreihen	466
	C. Die Teilalgebra der Polynome	468
	D. Eine „Herleitung“ der Faltungsformel	470
	E. Schreibtechnische Vereinfachungen und die Bedeutung des Symbols x	471
12.2	Arithmetische Eigenschaften von Polynomen	473
	A. Die Einheiten von $\mathbb{K}[x]$	473
	B. Teilbarkeit und Assoziiertheit bei Polynomen	474
	C. Die Polynomdivision	475
	D. Größte gemeinsame Teiler bei Polynomen	477
	E. Irreduzibilität und Faktorisierbarkeit	479
12.3	Auswertung und Nullstellen	481
	A. Was versteht man unter der Auswertung eines Polynoms?	481
	B. Nullstellen bei Polynomen	483
	C. Zur Gleichheit zweier Polynome	485
	D. Effiziente Auswertung: das Horner-Schema	485
12.4	Interpolation	487
	A. Was versteht man unter Interpolation?	487
	B. Das Interpolationspolynom	488
	C. Die Interpolationsformel nach Lagrange	489
	D. Die Interpolation nach Newton	491
	E. Interpolation und Chinesischer Restsatz	492
12.5	Polynom-Restklassen und zyklische Codes	493
	A. Rechnen modulo einem Polynom	493
	B. Restklassenkörper bei Polynomen	494
	C. Zyklische Codes	495
12.6	Diskrete und schnelle Fourier-Transformation	497
	A. Die Auswertungs-Interpolations-Methode	497
	B. Was ist die diskrete Fourier-Transformation?	498
	C. Die schnelle Fourier-Transformation	500
	D. Die inverse Fourier-Transformation	502
12.7	Anwendungen in der Linearen Algebra	503
	A. Das Minimalpolynom einer Matrix	503
	B. Eigenwerte als Nullstellen des Minimalpolynoms	504
	C. Zum Grad des Minimalpolynoms einer Matrix	505
	Zusammenfassung	506
	Übungsaufgaben	509

Kapitel 13	Formale Potenzreihen und rationale Funktionen	513
	Einführung	514
13.1	Der Ring der formalen Potenzreihen	516
	A. Die Einheiten von $\mathbb{K}[[x]]$	516
	B. Invertieren von Linearfaktoren – Geometrische Reihen	517
13.2	Der Körper der rationalen Funktionen	518
	A. Der Quotientenkörper von $\mathbb{K}[x]$	518
	B. Das Rechnen mit rationalen Funktionen	519
13.3	Partialbruchzerlegung	520
	A. Erster Teil der Partialbruchzerlegung	520
	B. Der Spezialfall bei Zerfall in Linearfaktoren	524
	C. Zweiter Teil der Partialbruchzerlegung	526
13.4	Exkurs: Schieberegisterfolgen und lineare Rekursionen	527
	A. Was versteht man unter einer linearen Schieberegisterfolge?	527
	B. Lineare Schieberegisterfolgen als rationale Funktionen	529
	C. Das Lösen linearer Rekursionen	530
	Zusammenfassung	534
	Übungsaufgaben	535

Teil IV Grundlagen der Analysis 539

Kapitel 14 Die Axiomatik reeller Zahlen 541

	Einführung	542
14.1	Angeordnete Körper	544
	A. Was versteht man unter einer Anordnung eines Körpers?	544
	B. Der zu einer Anordnung gehörende Positivbereich	545
	C. Grundregeln bei angeordneten Körpern	547
	D. Konsequenzen aus der Anordnung eines Körpers	548
14.2	Absolutbetrag und Bewertungen	550
	A. Der Absolutbetrag bei angeordneten Körpern	550
	B. Grundregeln für das Rechnen mit Beträgen	550
	C. Die komplexen Zahlen als bewerteter Körper	551
	D. Grundregeln für das Rechnen mit Bewertungen	553
	E. Die p -adischen Bewertungen	554
14.3	Archimedisch angeordnete Körper	554
	A. Die Bernoulli-Ungleichung	554
	B. Das archimedische Axiom	555
	C. Konsequenzen des archimedischen Axioms	555
14.4	Vollständig angeordnete Körper	557
	A. Beschränkte und unbeschränkte Mengen	557
	B. Intervalle in angeordneten Körpern	558

	C. Supremum und Infimum, Maximum und Minimum	559
	D. Das Vollständigkeitsaxiom	561
14.5	Wurzeln und die Unvollständigkeit der rationalen Zahlen . . .	562
	A. Zur Existenz von Wurzeln	562
	B. Konsequenzen für die Existenz vollständiger Anordnungen .	563
	C. Gesetzmäßigkeiten beim Rechnen mit Wurzeln	564
14.6	Exkurs: Die reellen Zahlen als Dedekind-Schnitte	565
	A. Was versteht man unter einem Dedekind-Schnitt?	565
	B. Die reellen Zahlen als die Menge aller Dedekind-Schnitte . .	566
	C. Die Ausnahmestellung der reellen Zahlen	568
	Zusammenfassung	569
	Übungsaufgaben	570

Kapitel 15 Folgen

	Einführung	573
	Einführung	574
15.1	Häufungspunkte und Grenzwerte	576
	A. Fast überall geltende Eigenschaften bei Folgen	576
	B. Was ist ein Häufungspunkt, was ein Grenzwert?	577
	C. Ein Grundrepertoire an konvergenten Folgen	580
	D. Uneigentliche Konvergenz	582
15.2	Grenzwertsätze	583
15.3	Beschränktheit, Monotonie und Teilfolgen	587
	A. Beschränktheit bei Folgen	587
	B. Monotonie bei Folgen	588
	C. Der Begriff der Teilfolge	589
15.4	Konvergenzkriterien und Charakterisierungen der Vollständigkeit	591
	A. Intervallschachtelungen	591
	B. Konvergenz bei monotonen und beschränkten Folgen	593
	C. Die Euler'sche Zahl	595
	D. Limes superior und Limes inferior	596
	E. Zur Approximation k -ter Wurzeln	599
15.5	Landau-Symbole	600
	A. Die O -Notation	600
	B. Die Ω -, die Θ - und die o -Notation	602
	C. Zum Wachstumsverhalten von Funktionen	602
	D. Zur Effizienz von Algorithmen	604
	E. Die Komplexität eines Problems	604
15.6	Exkurs: Cauchy-Folgen	605
	A. Was versteht man unter einer Cauchy-Folge?	605
	B. Das Cauchy-Kriterium der Vollständigkeit	606
	Zusammenfassung	608
	Übungsaufgaben	610

Kapitel 16	Reihen	613
	Einführung	614
16.1	Konvergenzkriterien bei Reihen	616
	A. Die zu einer Folge gehörende Reihe	616
	B. Die geometrische und die harmonische Reihe	617
	C. Das Leibniz- und das Cauchy-Konvergenzkriterium	618
	D. Absolute Konvergenz, Majoranten- und Minorantenkriterium	621
	E. Das Quotienten- und das Wurzelkriterium bei Reihen	623
	F. Die Reihendarstellung der Euler'schen Zahl	626
16.2	Der Konvergenzbereich bei Potenzreihen	628
	A. Potenzreihen aus analytischem Blickwinkel	628
	B. Der Konvergenzradius bei Potenzreihen	628
	C. Das Quotienten- und das Wurzelkriterium bei Potenzreihen	630
	D. Der Identitätssatz für Potenzreihen	632
	E. Reihen mit allgemeinem Entwicklungspunkt	633
16.3	Konvergenzverhalten bei Umordnung und Faltung	634
	A. Umordnungen bei Reihen	634
	B. Konvergenz bei Faltung von Reihen	635
16.4	Reihendarstellungen rationaler und reeller Zahlen	637
	A. Die B -adische Darstellung einer reellen Zahl	637
	B. Zur Eindeutigkeit der B -adischen Darstellung	639
	C. Rationale Zahlen mit endlicher B -adischer Darstellung	640
	D. B -adische Darstellungen von rationalen im Vergleich zu irrationalen Zahlen	641
	E. Zur Gleitkomma-Darstellung reeller Zahlen	643
16.5	Wartezeitprobleme und geometrische Verteilungen	644
	A. Grundlagen bei abzählbar unendlichen Wahrscheinlichkeitsräumen	644
	B. Ein Wartezeitproblem	645
	Zusammenfassung	648
	Übungsaufgaben	650

Kapitel 17	Stetige Funktionen	653
	Einführung	654
17.1	Der Stetigkeitsbegriff	656
	A. Was versteht man unter Stetigkeit?	656
	B. Gleichmäßig stetige und Lipschitz-stetige Funktionen	657
17.2	Stetigkeit bei elementaren Funktionen	659
	A. Das Folgenkriterium zur Stetigkeit	659
	B. Die punktweise Verknüpfung stetiger Funktionen	660

	C. Umkehrung und Verkettung bei stetigen Funktionen	661
	D. Stetige Fortsetzbarkeit von Funktionen	663
17.3	Eigenschaften stetiger Funktionen	666
	A. Zwischenwertsätze bei stetigen Funktionen	666
	B. Maximum und Minimum bei stetigen reellwertigen Funktionen	667
17.4	Stetigkeit bei Funktionenfolgen und Potenzreihen	670
	A. Die punktweise Konvergenz bei Funktionenfolgen	670
	B. Die gleichmäßige Konvergenz bei Funktionenfolgen	670
	C. Die Supremumsnorm bei beschränkten Funktionen	672
	D. Die Stetigkeit von Potenzreihen	672
17.5	Exponential- und Logarithmusfunktionen	674
	A. Die Funktionalgleichung zur Exponentialfunktion	674
	B. Das Verhalten der Exponentialfunktion auf \mathbb{Q} und auf \mathbb{R}	675
	C. Der natürliche Logarithmus	677
	D. Exponential- und Logarithmenfunktionen zu allgemeinen Basen	678
	E. Potenzfunktionen mit reellen Exponenten	679
	F. Die Poisson-Verteilung	680
17.6	Trigonometrische Funktionen	682
	A. Das Verhalten der Exponentialfunktion auf der imaginären Achse	682
	B. Die Definition von Sinus und Cosinus	683
	C. Funktionale Eigenschaften von Sinus und Cosinus	684
	D. Die Potenzreihendarstellung von Cosinus und Sinus	685
	E. Was ist π ?	685
	F. Die Formel von de Moivre	688
17.7	Exkurs: Das schwache Gesetz der großen Zahlen	689
	Zusammenfassung	692
	Übungsaufgaben	694

Kapitel 18 Differentialrechnung 697

	Einführung	698
18.1	Die Ableitung einer Funktion	700
	A. Was versteht man unter der Differenzierbarkeit einer Funktion?	700
	B. Die geometrische Interpretation der Ableitung	701
	C. Differenzierbarkeitskriterien	701
	D. Einige Beispiele differenzierbarer Funktionen	703

18.2	Ableitungsregeln	705
	A. Die Linearität der Ableitung	705
	B. Produkt- und Quotientenregel	706
	C. Die Kettenregel	708
	D. Die Ableitung bei Umkehrfunktionen	710
	E. Höhere Ableitungen	712
18.3	Mittelwertsätze und Extrema	713
	A. Unterscheidung verschiedener Extremalstellen	713
	B. Die Mittelwertsätze der Differentialrechnung	714
	C. Kriterien für Monotonie und Extrema	716
	D. Regeln von de l'Hôpital	718
18.4	Approximation durch Taylor-Polynome	722
	A. Was ist ein Taylor-Polynom?	722
	B. Der Satz von Taylor	724
	C. Ein weiteres Kriterium für lokale Extremalstellen	726
	D. Taylor-Reihen und analytische Funktionen	727
18.5	Exkurs: Zur iterativen Lösung von Gleichungen	729
	A. Ein allgemeines Iterationsprinzip	729
	B. Ein Fixpunktsatz	729
	C. Das Newton-Verfahren	731
	D. Die Regula falsi	733
	Zusammenfassung	734
	Übungsaufgaben	736

Kapitel 19 Integralrechnung 739

	Einführung	740
19.1	Integration von Treppenfunktionen	742
	A. Was versteht man unter einer Treppenfunktion?	742
	B. Was ist das Integral einer Treppenfunktion?	743
	C. Ober-, Unter- und Riemann-Integral	744
	D. Eigenschaften des Riemann-Integrals	746
19.2	Riemann-integrierbare Funktionen	748
	A. Gleichmäßige Approximation durch Treppenfunktionen	748
	B. Die Riemann-Integrierbarkeit stetiger Funktionen	749
	C. Der Mittelwertsatz der Integralrechnung	750
19.3	Integration als Umkehrung der Differentiation	750
	A. Additionsregel und Integralfunktion	750
	B. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	751
	C. Stammfunktionen	752

19.4	Integrationsregeln	755
	A. Substitutionsregel und Transformationsformel	755
	B. Die Regel der partiellen Integration	757
	C. Integration bei rationalen Funktionen	759
19.5	Integration bei Funktionenfolgen	760
	A. Vertauschung von Integral und Grenzwertbildung	760
	B. Integration und Stammfunktionen von Potenzreihen	761
	C. Vertauschung von Differenzieren und Grenzwertbildung	763
	D. Differenzieren von Potenzreihen	763
19.6	Uneigentliche Integrale und der zentrale Grenzwertsatz	768
	A. Integration über unbeschränkten Intervallen	768
	B. Verteilungsfunktionen und Dichten	768
	C. Der zentrale Grenzwertsatz	771
	D. Integration bei undefinierten Stellen	773
	Zusammenfassung	775
	Übungsaufgaben	777

Literaturverzeichnis	781
-----------------------------	-----

Symbolverzeichnis	785
--------------------------	-----

Register	793
-----------------	-----