

Inhalt

1	Strukturen mit einer binären Operation	11
1.1	Gruppen und Halbgruppen	12
1.1.1	Der Gruppenbegriff	12
1.1.2	Additive bzw. multiplikative Schreibweise von Gruppen	14
1.1.3	Halbgruppen, Ordnung von Gruppen und Halbgruppen	16
1.2	Folgerungen aus Gruppen- und Halbgruppenaxiomen	18
1.2.1	Neutrale Elemente in Gruppen und Halbgruppen	18
1.2.2	Lösbarkeit von Gleichungen in Gruppen	20
1.2.3	Unterschiedliche Axiomensysteme für Gruppen	22
1.2.4	Potenzen von Gruppenelementen	24
1.3	Isomorphie	26
1.3.1	Begriff der Isomorphie	26
1.3.2	Isomorphie als Äquivalenzrelation	28
1.3.3	Übertragung von Struktureigenschaften durch Isomorphismen	30
1.4	Unterstrukturen	32
1.4.1	Untergruppen und Unterhalbgruppen	32
1.4.2	Durchschnitt von Untergruppen - Komplexe erzeugen Untergruppen	34
1.5	Nebenklassen - der Satz von LAGRANGE	36
1.5.1	Konstruktion von Nebenklassen	36
1.5.2	Zusammenhang zwischen Gruppenordnung und Ordnung einer Untergruppe	38
1.6	Zyklische Gruppen	40
1.6.1	Erzeugende Elemente	40
1.6.2	Struktur zyklischer Gruppen	42
1.7	Permutationsgruppen, Restklassengruppen und Gruppen von Deckabbildungen	44
1.7.1	Gruppen von Permutationen	44
1.7.2	Restklassengruppen	50
1.7.3	Der kleine FERMATsche Satz	52
1.7.4	Gruppen von Deckabbildungen	54
1.8	Isomorphieklassen von Gruppen kleiner Ordnung	60

2	Strukturen mit zwei binären Operationen	62
2.1	Ringe und Körper	62
2.1.1	Die Struktur eines Ringes	62
2.1.2	Die Struktur eines Körpers	64
2.2	Folgerungen aus Ring- und Körperaxiomen	66
2.2.1	Rechenregeln in Ringen	66
2.2.2	Nullteiler	68
2.2.3	Potenzgesetze und Gesetze der Vervielfachung in Ringen	70
2.3	Unterstrukturen von Ringen und Körpern	72
2.3.1	Unterringe und Unterkörper	72
2.3.2	Charakteristik von Ringen und Körpern - Primkörper	74
2.4	Isomorphe Einbettungen	76
3	Strukturerhaltende Abbildungen	78
3.1	Homomorphe Abbildungen	78
3.1.1	Gruppen- und Ringhomomorphismen	78
3.1.2	Eigenschaften homomorpher Abbildungen	80
3.1.3	Der Kern homomorpher Abbildungen	82
3.2	Homomorphiesätze	84
3.2.1	Normalteiler, Gruppenhomomorphismen und Faktorgruppen	84
3.2.2	Der Homomorphiesatz für Gruppen	86
3.2.3	Ideale, Restklassenringe, der Homomorphiesatz für Ringe	88
4	Konstruktion von Strukturen	90
4.1	Direkte Produkte	90
4.2	Konstruktion von Integritätsbereichen aus Halbringen	92
4.2.1	Von einer kommutativen regulären Halbgruppe zur Gruppe	92
4.2.2	Vom Modul $[\mathbb{Z}; +]$ zum Integritätsbereich $[\mathbb{Z}; +; \cdot]$	94
4.3	Konstruktion eines Quotientenkörpers aus einem Integritätsbereich	96
4.3.1	Zielstellungen und Ansätze bei der Konstruktion eines Quotientenkörpers	96
4.3.2	Existenz und Eindeutigkeit des Quotientenkörpers	98

4.4 Polynomringe	100
4.4.1 Addition und Multiplikation von Polynomen	100
4.4.2 Polynomringe und ihre Eigenschaften	102
4.4.3 Einsetzungshomomorphismen	104
4.5 Quadratische Erweiterungsringe	106
4.6 Körpererweiterungen	108
4.6.1 Zielstellungen und Ansätze für Körpererweiterungen	108
4.6.2 Einfache Körpererweiterungen	110
4.6.3 Algebraische Körpererweiterungen	112
5 Teilbarkeit	114
5.1 Teilbarkeit in Integritätsbereichen	114
5.1.1 Eigenschaften der Teilerrelation	114
5.1.2 Einheiten und Assoziiertheit	116
5.1.3 Primelemente	118
5.1.4 Größter gemeinsamer Teiler, kleinstes gemeinsames Vielfaches	120
5.2 Euklidische Ringe	122
5.2.1 Der euklidische Algorithmus im Ring der ganzen Zahlen	122
5.2.2 Teilbarkeitsaussagen in euklidischen Ringen	124
5.2.3 Zerlegung in Primelemente	126
5.2.4 Teilbarkeitsaussagen in ZPE-Ringen	128
5.2.5 Diophantische Gleichungen und lineare Kongruenzen	130
6 Algebraische Gleichungen	132
6.1 Abspaltung von Linearfaktoren	132
6.2 Die Menge \mathbb{C} der komplexen Zahlen als algebraisch abgeschlossener Körper	134
6.3 Darstellung von Nullstellen durch Radikale	136
6.4 Algebraische Behandlung von Konstruktionen mit Zirkel und Lineal	138

7	Angeordnete Strukturen	140
7.1	Positivitätsbereiche in Gruppen und Ringen	140
7.2	Ordnungsrelationen und Positivitätsbereiche	142
7.3	Archimedische Anordnungen und Dichtheit	144
7.4	Vollständig angeordnete Körper	146
	Lösungshinweise zu den Übungen	148
	Überblick über benutzte Symbole	167
	Literatur	168
	Sachverzeichnis	169