

# Inhalt

Vorwort 8

## Analysis

### 1 Funktionen 9

Definition 10

Elementare Funktionen 11

Zerlegen von Funktionen 12

Historisches 12

Generelle unterrichtliche  
Probleme 14

Die Begriffsbildung 15

Was veranlasst die Begriffs-  
bildung? 16

Vom Sinn des Funktionsbegriffs 18

Schreib- und Sprechweise 19

Veranschaulichung 20

### 2 Grenzwerte 21

Definition 22

Grenzwertsätze 22

Historisches 23

Generelle unterrichtliche  
Probleme 24

Anlass der Begriffsbildung 26

Inhalt der Definition 27

Formulierung der Definition 27

Schreib- und Sprechweise 28

Vorschlag: Ein möglicher unter-  
richtlicher Weg zum Grenzwert 28

Bestimmung von Grenzwerten 33

Spezielle Grenzwerte 35

Existenz. Die Zahl  $e$  36

Grenzwerte in realem Bezug 37

### 3 Stetigkeit 41

Definition 42

Unstetigkeit 43

Erste Folgerungen 43

Stetigkeit zusammengesetzter  
Funktionen 44

Historisches 44

Generelle unterrichtliche  
Probleme 46

Von der Zwischenwerteigenschaft zur Stetigkeit	46
Abgrenzung gegen Unstetigkeit	48
Veranschaulichung der Stetigkeit	49
Veranschaulichung eines Existenzsatzes	49
Stetigkeit in der Schulanalyse?	50

#### **4 Ableitung 51**

Das Grundproblem der Analysis	52
Definition der Ableitung	52
Zerlegungsformel. Differenziale	53
Tangente. Tangentenfunktion	53
Differenzierbarkeit und Stetigkeit	54
Historisches	55
Generelle unterrichtliche Probleme	58
Vorschlag zur Hinführung	59
Schreib- und Sprechweise	61
Festigung der Definition. Ableitung in realem Bezug	61
Die Frage der Existenz	66
Erstes Problemlösen mit $f'$	68
Von $f'$ zu $f$	70

#### **5 Integral 73**

Definition	74
Ergänzende Definitionen	75
Eigenschaften von Integralen	76
Die Frage der Existenz	76
Berechnung von Integralen	77
Historisches	78
Generelle unterrichtliche Probleme	79
Welcher Integralbegriff ist der Schule angemessen?	81
Zur Hinführung	81
Veranschaulichung der Überlegungen	82
Definition des Integrals	83
Festigung der Definition	84
Ermitteln von Integralen	88

Schreib- und Sprechweise 89  
Von  $f(a)$  mittels  $f'$  zu  $f(b)$ . Der  
Hauptsatz 91

- 6 Regeln zur Bestimmung von Ableitungen und Stammfunktionen 93**
- Stammfunktionen 94
  - Der methodische Grundgedanke 95
  - Grundfunktionen 95
  - Regeln für das Ableiten zusammengesetzter Funktionen 96
  - Regeln für das Aufsuchen von Stammfunktionen zusammengesetzter Funktionen 96
  - Historisches 98
    - Generelle unterrichtliche Probleme 99
    - Spezielle Funktionen 99
    - Summen- und Differenzregel 103
    - Faktorregel 104
    - Produktregel 104
    - Reziprokenregel 106
    - Quotientenregel 107
    - Kettenregel 107
    - Inversenregel 111
    - Anmerkung zur Formulierung der Integrationsregeln 113
- 7 Anwendung der Infinitesimalrechnung bei der Untersuchung und Bestimmung von Funktionen 115**
- Vorbemerkung 116
  - Lokales Verhalten einer Funktion 117
  - Globales Verhalten einer Funktion 117
  - Integralfunktionen 118
  - Integralfunktionen und Stammfunktionen 119
  - Der Hauptsatz 119
  - Differenziation und Integration als inverse Operationen 120
  - Historisches 120
    - Generelle unterrichtliche Probleme 121
    - Beschränktheit 122
    - Monotonie 123
    - Extremstellen. Extremwerte 123
    - Wendepunkte 128
    - Bestimmung von Funktionen 129

## **8 Infinitesimalrechnung in realem Bezug 131**

Vorab: Grundsätzliches zum Thema „Größen“ 132

Mathematische Beschreibung realer Sachverhalte 136

Infinitesimalrechnung und Realität 137

Anmerkung zum Thema Anwendungen 137

Generelle unterrichtliche Probleme 138

Der springende Punkt: Lokal statt global 139

Mathematisieren einer gegebenen Situation 142

Übergang von Größen zu Maßzahlen 143

Von der Näherungssumme zum Integral 144

Die Frage der Formulierung 145

Umgangssprachliche Fassung mathematischer Überlegungen 146

Zur Auswahl der sog. Anwendungen 147

Anwendungsbeispiele 147

## **Analytische Geometrie**

### **9 Vorbemerkungen zur „analytischen“ Geometrie 159**

Wege zum Rechnen in der Geometrie 160

Koordinatensysteme. Zahlen als Punktkoordinaten 160

Lagebeziehungen 162

Analytische Geometrie und lineare Algebra 163

Analytische Geometrie in der Schule 164

Koordinaten- oder Vektorgeometrie? 165

Historisches 166

## **10 Vektoren 169**

Vektorräume 170

Lineare Unabhängigkeit 171

Basis. Dimension 171

Punkträume 172

Generelle unterrichtliche  
Probleme 173

Pfeilklassen als Veranschaulichung  
einer Lagebeziehung 174

Pfeilklassen als Rechenobjekte  
geometrischer Art 174

Addieren von Pfeilklassen 175

S-Multiplikation 176

Zum Begriff des Vektorraums 177

Lineare Unabhängigkeit 178

Basis. Koordinaten 179

Dimension 181

Hilfsmittel: Lineare Gleichungs-  
systeme (LGS) 181

## **11 Verwendung von Vektoren zur relativen Ortsbestimmung 183**

Ortsvektoren 184

Koordinaten 185

Generelle unterrichtliche  
Probleme 186

Übergang von Punkten zu  
Vektoren 186

Übergang von Vektoren zu Punkten.  
Ortsvektoren 187

Darstellung einer Geraden mittels  
Koordinaten 189

Darstellung einer Geraden mittels  
Vektoren 191

Darstellung einer Ebene im Raum  
mittels Vektoren 192

Teilverhältnisse 192

## **12 Multiplizieren von Vektoren mit Vektoren 195**

Allgemeines zur Einführung einer  
Multiplikation 196

Skalares Produkt von Vektoren 197

Vektorielltes Produkt von Vektoren 198

Generelle unterrichtliche  
Probleme 199

Geometrische Reichweite des bisherigen Rechnens mit Vektoren	200
Eine mögliche Hinführung zur skalaren Multiplikation	201
◦ als Rechenart	202
Praxis der skalaren Multiplikation	203
Anwendungen der skalaren Multiplikation	204
Vektorielle Multiplikation	209
Anwendungen der vektoriellen Multiplikation	210
Die vektorielle Multiplikation im Rahmen der Schulmathematik	213

### **13 Vektorielle Größen 215**

Wirklichkeit und Modell	216
Skalare Größen	216
Gerichtete Größen	217
Vektoren aus der Sicht der Mathematik	217
Vektoren aus der Sicht der Physik	218
Zusammenhang beider Sichtweisen	219
Gebundene und freie gerichtete Größen	220
„Ortsvektoren“ in Mathematik und Physik	221
Grundsätzliches zur Verwendung von Vektoren in der Physik	221
Einheiten bei gerichteten Größen	222
Historisches	223
Generelle unterrichtliche Probleme	223
Wege als gerichtete Größen	225
Geschwindigkeiten als gerichtete Größen	225
Winkelgeschwindigkeit als gerichtete Größe	226
Kräfte	227
Physikalische Arbeit	230
Drehmoment	230
Flächenvektoren	231

# Stochastik

## 14 Zufallsexperimente 233

Zufällige Erscheinungen 234

Ergebnismengen 235

Zufallsexperimente 235

Empirisches Gesetz der großen  
Zahlen 236

Wahrscheinlichkeiten 237

Ereignisse und ihre Wahrscheinlich-  
keiten 237

Klassische Definition der Wahrschein-  
lichkeit 238

Historisches 239

Generelle unterrichtliche  
Probleme 240

Vollständige Liste von Möglich-  
keiten 241

Mehr oder weniger gewiß? 242

Wie gewiß? 243

Zufallsexperimente 245

Ereignisse 247

Wahrscheinlichkeit eines  
Ereignisses 248

Gleichverteilungen 248

Hilfsmittel: Kombinatorik 249

## 15 Berechnen von Wahrscheinlich- keiten 255

Ereignisraum 257

Additionssatz 257

Bedingte Wahrscheinlichkeits-  
verteilung 258

Totale Wahrscheinlichkeit. Satz von  
BAYES 258

Unabhängigkeit von Ereignissen 259

Multiplikationssatz für unabhängige  
Ereignisse 259

Generelle unterrichtliche  
Probleme 260

Rechnen mit Ereignissen 261

Additionssatz 261

Übergang zur bedingten Wahr-  
scheinlichkeitsverteilung 262

Allgemeiner Multiplikations-  
satz 264

Unabhängigkeit 264

Der spezielle Multiplikations-  
satz 266

Verbindung von Additions- und  
Multiplikationssatz 267

## **16 Zufallsvariablen 273**

Zufallsvariablen 274

Diskrete Zufallsvariablen 275

Stetige Zufallsvariablen 275

Erwartungswert und Varianz einer  
Zufallsvariablen  $X$  276

Die Zufallsvariable  $aX + b$  277

Gemeinsame Wahrscheinlichkeits-  
verteilung von zwei Zufallsvariablen  
 $X$  und  $Y$  277

Die Zufallsvariablen  $X + Y$  und  $X \cdot Y$  278

Generelle unterrichtliche  
Probleme 279

Einführung von Zufalls-  
variablen 279

Wahrscheinlichkeitsverteilung einer  
Zufallsvariablen 280

Kennzahlen einer Zufalls-  
variablen 281

Die Zufallsvariable  $aX + b$  281

Wiederholte Durchführung eines  
Zufallsexperiments 282

Gemeinsame Wahrscheinlich-  
keitsverteilung zweier Zufalls-  
variablen 284

Die Summenvariable von  $X$   
und  $Y$  284

Die Produktvariable von  $X$   
und  $Y$  286

## **17 Spezielle Wahrscheinlichkeits- verteilungen 287**

Binomialverteilungen 288

POISSON-Verteilungen 289

Geometrische Verteilungen 290

Hypergeometrische Verteilungen 290

GAUSS- oder Normalverteilungen 291

Grenzwertsätze von

DE MOIVRE und LAPLACE 292

Der Zentrale Grenzwertsatz 293

Generelle unterrichtliche  
Probleme 295

Auswahl und Abfolge 295



Binomialverteilte Zufallsvariablen	296
Das Problem großer n-Werte	297
Lokale Näherung	298
Globale Näherung	300
Normalverteilungen	301
Normalverteilung als „Grenzverteilung“	303
Weitere spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen	305

## **18 Mathematische Statistik 307**

Grundgesamtheit. Stichprobe	308
„Grundgesamtheit“ und „Stichprobe“ mathematisch	310
Das Grundproblem	310
Stichprobenfunktionen	311
Schätzen von $\mu$ bei normalverteilter Grundgesamtheit	313
Signifikanztest für die Hypothese $\mu = \mu_0$ bei normalverteilter Grundgesamtheit	314
Hypothese und Gegenhypothese	315
Mögliche Fehler beim Testen	316
Güte eines Tests	317
Generelle unterrichtliche Probleme	318
Grundgesamtheit	318
Stichprobe	320
Das Grundproblem	320
Das Stichprobenmittel als Zufallsvariable	321
Die Stichprobenvarianz als Zufallsvariable	322
Stichprobenfunktionen	322
Wahrscheinlichkeitsverteilung des Stichprobenmittels	323
Grundsätzliches zum Schätzen bzw. Testen	324
Vertrauensintervalle für $\mu$	325
Testen von Hypothesen	326
Was heißt „Ergebnis einer Stichprobe“? Prüfvariable	327
Was heißt „sehr unwahrscheinlich“? Irrtumswahrscheinlichkeit	328
Signifikanztest	330

Zweiseitiger und einseitiger  
Signifikanztest 330  
Zweiseitig oder einseitig? 331  
Nullhypothese und Gegen-  
hypothese 332  
Wahl der Nullhypothese 332  
Entscheidung bei Unsicher-  
heit 333  
Das Risiko einer Fehlentschei-  
dung 335  
Wie „gut“ ist ein Test? 337

**Register 339**