

# 1. Elementare Newton'sche Mechanik

1.1	Die Newton'schen Gesetze (1687) und ihre Interpretation .....	1
1.2	Gleichförmig geradlinige Bewegung und Inertialsysteme.....	5
1.3	Inertialsysteme in relativer Bewegung .....	6
1.4	Impuls und Kraft.....	7
1.5	Typische Kräfte; Bemerkung über Maßeinheiten.....	9
1.6	Raum, Zeit und Kräfte.....	11
1.7	Das Zwei-Teilchen-System mit inneren Kräften .....	12
1.7.1	Schwerpunkts- und Relativbewegung.....	12
1.7.2	Gravitationskraft zwischen zwei Himmelskörpern (Kepler-Problem) .....	13
1.7.3	Schwerpunkts- und Relativimpuls im Zwei-Teilchen-System.....	17
1.8	Systeme von endlich vielen Teilchen .....	18
1.9	Der Schwerpunktsatz .....	19
1.10	Der Drehimpulssatz.....	20
1.11	Der Energiesatz.....	20
1.12	Das abgeschlossene $n$ -Teilchen-System .....	21
1.13	Galilei-Transformationen .....	22
1.14	Raum und Zeit der Mechanik bei Galilei-Invarianz .....	26
1.15	Konservative Kraftfelder .....	28
1.16	Eindimensionale Bewegung eines Massenpunktes.....	30
1.17	Bewegungsgleichungen in einer Dimension .....	31
1.17.1	Harmonischer Oszillator .....	31
1.17.2	Das ebene mathematische Pendel im Schwerfeld .....	33
1.18	Phasenraum für das $n$ -Teilchen-System (im $\mathbb{R}^3$ ).....	34
1.19	Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen der Bewegungsgleichungen .....	35
1.20	Physikalische Konsequenzen des Existenz- und Eindeigkeitssatzes .....	36
1.21	Lineare Systeme .....	39
1.22	Zur Integration eindimensionaler Bewegungsgleichungen.....	40
1.23	Das ebene Pendel bei beliebigem Ausschlag .....	42
1.24	Das Zwei-Teilchen-System mit Zentralkraft .....	44
1.25	Rotierendes Koordinatensystem: Coriolis- und Zentrifugalkräfte .....	48
1.26	Coriolis-Beschleunigung auf der Erde .....	49
1.27	Streuung zweier Teilchen, die über eine Zentralkraft miteinander wechselwirken: Kinematik.....	57
1.28	Zwei-Teilchenstreuung mit Zentralkraft: Dynamik.....	60
1.29	Coulomb-Streuung zweier Teilchen mit gleichen Massen und Ladungen.....	63
1.30	Ausgedehnte mechanische Körper.....	65
1.31	Virial und zeitliche Mittelwerte .....	69
	Anhang: Praktische Übungen .....	71

## 2. Die Prinzipien der kanonischen Mechanik

2.1	Zwangsbedingungen und verallgemeinerte Koordinaten.....	79
2.1.1	Definition von Zwangsbedingungen.....	79
2.1.2	Generalisierte Koordinaten.....	81
2.2	Das d'Alembert'sche Prinzip.....	81
2.2.1	Definition der virtuellen Verrückungen.....	81
2.2.2	Statischer Fall.....	82
2.2.3	Dynamischer Fall.....	82
2.3	Die Lagrange'schen Gleichungen.....	84
2.4	Einfache Anwendungen des d'Alembert'schen Prinzips.....	85
2.5	Exkurs über Variationsprinzipien.....	87
2.6	Hamilton'sches Extremalprinzip.....	89
2.7	Die Euler-Lagrange-Gleichungen.....	90
2.8	Einige Anwendungen des Hamilton'schen Prinzips.....	91
2.9	Lagrangefunktionen sind nicht eindeutig.....	93
2.10	Eichtransformationen an der Lagrangefunktion.....	94
2.11	Zulässige Transformationen der verallgemeinerten Koordinaten.....	95
2.12	Die Hamiltonfunktion und ihr Zusammenhang mit der Lagrangefunktion.....	97
2.13	Legendre-Transformation für den Fall einer Variablen.....	98
2.14	Legendre-Transformation im Fall mehrerer Veränderlicher.....	99
2.15	Kanonische Systeme.....	101
2.16	Einige einfache kanonische Systeme.....	101
2.17	Variationsprinzip auf die Hamiltonfunktion angewandt.....	103
2.18	Symmetrien und Erhaltungssätze.....	104
2.19	Satz von E. Noether.....	105
2.20	Infinitesimale Erzeugende für Drehung um eine Achse.....	106
2.21	Exkurs über die Drehgruppe.....	108
2.22	Infinitesimale Drehungen und ihre Erzeugenden.....	110
2.23	Kanonische Transformationen.....	112
2.24	Beispiele von kanonischen Transformationen.....	116
2.25	Die Struktur der kanonischen Gleichungen.....	117
2.26	Lineare, autonome Systeme in einer Dimension.....	118
2.27	Kanonische Transformationen in kompakter Notation.....	119
2.28	Zur symplektischen Struktur des Phasenraums.....	121
2.29	Der Liouville'sche Satz.....	125
2.29.1	Lokale Form.....	125
2.29.2	Integrale Form.....	126
2.30	Beispiele zum Liouville'schen Satz.....	127
2.31	Die Poisson-Klammer.....	130
2.32	Eigenschaften der Poisson-Klammern.....	133
2.33	Infinitesimale kanonische Transformationen.....	135
2.34	Integrale der Bewegung.....	136
2.35	Hamilton-Jacobi'sche Differentialgleichung.....	139
2.36	Einfache Anwendungen der Hamilton-Jacobi'schen Differentialgleichung.....	140
2.37	Hamilton-Jacobi-Gleichung und integrable Systeme.....	144
2.37.1	Lokale Glättung von Hamilton'schen Systemen.....	145
2.37.2	Integrable Systeme.....	149
2.37.3	Winkel- und Wirkungsvariable.....	153
2.38	Störungen an quasiperiodischen Hamilton'schen Systemen....	155

2.39	Autonome, nichtausgeartete Hamilton'sche Systeme in der Nähe von integrierbaren Systemen .....	157
2.40	Beispiele, Mittelungsmethode .....	159
2.40.1	Anharmonischer Oszillator .....	159
2.40.2	Mittelung von Störungen .....	161
	Anhang: Praktische Übungen .....	163
<b>3.</b>	<b>Mechanik des starren Körpers</b>	
3.1	Definition des starren Körpers .....	171
3.2	Infinitesimale Verrückung eines starren Körpers .....	173
3.3	Kinetische Energie und Trägheitstensor .....	174
3.4	Eigenschaften des Trägheitstensors .....	176
3.5	Der Satz von Steiner .....	181
3.6	Beispiele zum Satz von Steiner .....	182
3.7	Drehimpuls des starren Körpers .....	184
3.8	Kräftefreie Bewegung von starren Körpern .....	185
3.9	Die Euler'schen Winkel .....	187
3.10	Definition der Euler'schen Winkel .....	189
3.11	Die Bewegungsgleichungen des starren Körpers .....	189
3.12	Die Euler'schen Gleichungen .....	192
3.13	Anwendungsbeispiel: Der kräftefreie Kreisel .....	195
3.14	Kräftefreier Kreisel und geometrische Konstruktionen .....	198
3.15	Der Kreisel im Rahmen der kanonischen Mechanik .....	201
3.16	Beispiel: Symmetrischer Kinderkreisel im Schwerfeld .....	204
3.17	Anmerkung zum Kreiselproblem .....	207
3.18	Symmetrischer Kreisel mit Reibung: Der „Aufstehkreisel“ .....	208
3.18.1	Eine Energiebetrachtung .....	210
3.18.2	Bewegungsgleichungen und Lösungen konstanter Energie .....	211
	Anhang: Praktische Übungen .....	216
<b>4.</b>	<b>Relativistische Mechanik</b>	
4.1	Schwierigkeiten der nichtrelativistischen Mechanik .....	220
4.2	Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit .....	223
4.3	Die Lorentz-Transformationen .....	224
4.4	Analyse der Lorentz- und Poincaré-Transformationen .....	230
4.4.1	Drehungen und Spezielle Lorentz-Transformationen .....	233
4.4.2	Bedeutung der Speziellen Lorentz-Transformationen .....	236
4.5	Zerlegung von Lorentz-Transformationen in ihre Komponenten .....	237
4.5.1	Satz über orthochrone eigentliche Lorentz-Transformationen .....	237
4.5.2	Korollar zum Zerlegungssatz und einige Konsequenzen .....	239
4.6	Addition von relativistischen Geschwindigkeiten .....	242
4.7	Galilei- und Lorentz-Raumzeit-Mannigfaltigkeiten .....	245
4.8	Bahnkurven und Eigenzeit .....	249
4.9	Relativistische Dynamik .....	251
4.9.1	Relativistisches Kraftgesetz .....	251
4.9.2	Energie-Impulsvektor .....	252
4.9.3	Die Lorentz-Kraft .....	256
4.10	Zeitdilatation und Längenkontraktion .....	257
4.11	Mehr über die Bewegung kräftefreier Teilchen .....	259
4.12	Die Konforme Gruppe .....	262

## 5. Geometrische Aspekte der Mechanik

5.1	Mannigfaltigkeiten von verallgemeinerten Koordinaten .....	266
5.2	Differenzierbare Mannigfaltigkeiten.....	269
5.2.1	Der Euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ .....	269
5.2.2	Glatte oder differenzierbare Mannigfaltigkeiten .....	270
5.2.3	Beispiele für glatte Mannigfaltigkeiten.....	272
5.3	Geometrische Objekte auf Mannigfaltigkeiten .....	276
5.3.1	Funktionen und Kurven auf Mannigfaltigkeiten .....	277
5.3.2	Tangentialvektoren an eine glatte Mannigfaltigkeit.....	280
5.3.3	Das Tangentialbündel einer Mannigfaltigkeit.....	281
5.3.4	Vektorfelder auf glatten Mannigfaltigkeiten .....	283
5.3.5	Äußere Formen .....	286
5.4	Kalkül auf Mannigfaltigkeiten .....	288
5.4.1	Differenzierbare Abbildungen von Mannigfaltigkeiten.....	289
5.4.2	Integralkurven von Vektorfeldern .....	291
5.4.3	Äußeres Produkt von Einsformen.....	292
5.4.4	Die äußere Ableitung .....	294
5.4.5	Äußere Ableitung und Vektoren im $\mathbb{R}^3$ .....	296
5.5	Hamilton-Jacobi'sche und Lagrange'sche Mechanik.....	299
5.5.1	Koordinaten-Mannigfaltigkeit $Q$ , Geschwindigkeitsraum $TQ$ und Phasenraum $T^*Q$ .....	299
5.5.2	Die kanonische Einsform auf dem Phasenraum.....	303
5.5.3	Die kanonische Zweiform als symplektische Form auf $M$ .....	306
5.5.4	Symplektische Zweiform und Satz von Darboux.....	308
5.5.5	Die kanonischen Gleichungen.....	311
5.5.6	Die Poisson-Klammer.....	315
5.5.7	Zeitabhängige Hamilton'sche Systeme .....	318
5.6	Lagrange'sche Mechanik und Lagrangegleichungen.....	320
5.6.1	Zusammenhang der beiden Formulierungen der Mechanik .....	320
5.6.2	Die Lagrange'sche Zweiform .....	322
5.6.3	Energie als Funktion auf $TQ$ und Lagrange'sches Vektorfeld .....	323
5.6.4	Vektorfelder auf dem Geschwindigkeitsraum $TQ$ und Lagrange'sche Gleichungen .....	325
5.6.5	Legendre-Transformation und Zuordnung von Lagrange- und Hamiltonfunktion .....	327
5.7	Riemann'sche Mannigfaltigkeiten in der Mechanik .....	329
5.7.1	Affiner Zusammenhang und Paralleltransport .....	330
5.7.2	Parallele Vektorfelder und Geodäten .....	332
5.7.3	Geodäten als Lösungen von Euler-Lagrange-Gleichungen .....	333
5.7.4	Der kräftefreie, unsymmetrische Kreisel .....	335

## 6. Stabilität und Chaos

6.1	Qualitative Dynamik.....	337
6.2	Vektorfelder als dynamische Systeme.....	338
6.2.1	Einige Definitionen für Vektorfelder und ihre Integralkurven.....	340
6.2.2	Gleichgewichtslagen und Linearisierung von Vektorfeldern.....	343
6.2.3	Stabilität von Gleichgewichtslagen.....	346
6.2.4	Kritische Punkte von Hamilton'schen Vektorfeldern.....	349
6.2.5	Stabilität und Instabilität beim kräftefreien Kreisel.....	352

<b>6.3</b>	<b>Langzeitverhalten dynamischer Flüsse und Abhängigkeit von äußeren Parametern</b> .....	353
6.3.1	Strömung im Phasenraum.....	354
6.3.2	Allgemeinere Stabilitätskriterien .....	356
6.3.3	Attraktoren .....	359
6.3.4	Die Poincaré-Abbildung .....	362
6.3.5	Verzweigungen von Flüssen bei kritischen Punkten.....	366
6.3.6	Verzweigungen von periodischen Bahnen.....	369
<b>6.4</b>	<b>Deterministisches Chaos</b> .....	371
6.4.1	Iterative Abbildungen in einer Dimension.....	371
6.4.2	Quasi-Definition von Chaos.....	373
6.4.3	Ein Beispiel: Die logistische Gleichung.....	376
<b>6.5</b>	<b>Quantitative Aussagen über ungeordnete Bewegung</b> .....	381
6.5.1	Aufbruch in deterministisches Chaos .....	381
6.5.2	Liapunov'sche Charakteristische Exponenten.....	385
6.5.3	Seltsame Attraktoren und Fraktale .....	388
<b>6.6</b>	<b>Chaotische Bewegungen in der Himmelsmechanik</b> .....	390
6.6.1	Rotationsdynamik von Planetensatelliten .....	391
6.6.2	Bahndynamik von Planetoiden mit chaotischem Verhalten .....	395
<b>7.</b>	<b>Kontinuierliche Systeme</b>	
7.1	Diskrete und kontinuierliche Systeme.....	399
7.2	Grenzübergang zum kontinuierlichen System .....	403
7.3	Hamilton'sches Extremalprinzip für kontinuierliche Systeme ..	405
7.4	Kanonisch konjugierter Impuls und Hamiltondichte .....	407
7.5	Beispiel: Die Pendelkette .....	408
7.6	Ausblick und Bemerkungen.....	411
<b>Anhang</b>		
<b>A</b>	<b>Einige mathematische Begriffe</b> .....	417
A.1	„Ordnung“ und „modulo“ .....	417
A.2	Abbildung .....	417
A.3	Stetige und differenzierbare Abbildungen .....	419
A.4	Ableitungen.....	419
A.5	Differenzierbarkeit einer Funktion .....	420
A.6	Variablen und Parameter.....	420
A.7	Lie'sche Gruppe .....	420
<b>B</b>	<b>Einige Hinweise zum Rechereinsatz</b> .....	421
B.1	Bestimmung von Nullstellen.....	422
B.2	Zufallszahlen .....	423
B.3	Numerische Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen .....	423
B.4	Numerische Auswertung von Integralen.....	425
<b>C</b>	<b>Historische Anmerkungen</b> .....	426
<b>Aufgaben</b>	.....	431
<b>Lösungen der Aufgaben</b>	.....	459
<b>Literatur</b>	.....	529
<b>Sachverzeichnis</b>	.....	533
<b>Namenverzeichnis</b>	.....	537