

# Inhaltsverzeichnis

1.	<b>Einleitung</b>	1
2.	<b>Nichtlineare Phänomene</b>	7
2.1	Geometrische Nichtlinearität	7
2.1.1	Große Verschiebungen eines starren Balkens	7
2.1.2	Große Verschiebungen eines elastischen Systems	9
2.1.3	Verzweigungsproblem	11
2.1.4	Durchschlagproblem	13
2.2	Physikalische Nichtlinearität	15
2.3	Nichtlinearität infolge von Randbedingungen	16
3.	<b>Kontinuumsmechanische Grundgleichungen</b>	19
3.1	Kinematik	19
3.1.1	Bewegung, Deformationsgradient	20
3.1.2	Verzerrungsmaße	23
3.1.3	Transformation von Vektoren und Tensoren	29
3.1.4	Zeitableitungen	31
3.2	Bilanzgleichungen	33
3.2.1	Volumenbilanz	34
3.2.2	Lokale Impulsbilanz, Drallbilanz	34
3.2.3	1. Hauptsatz der Thermodynamik	35
3.2.4	Umrechnung auf die Ausgangskonfiguration, verschiedene Spannungstensoren	36
3.2.5	Zeitableitungen der Spannungstensoren	38
3.3	Materialgleichungen	39
3.3.1	Elastisches Materialverhalten	41
3.3.2	Elasto-plastische Materialgesetze	52
3.3.3	Viskoelastisches und viskoplastisches Materialverhalten	63
3.3.4	Inkrementelle Form der Materialgleichungen	72
3.4	Schwache Form des Gleichgewichts, Variationsprinzipien	81
3.4.1	Schwache Formulierung des Gleichgewichts in der Ausgangskonfiguration	82
3.4.2	Räumliche schwache Formulierung des Gleichgewichtes	83
3.4.3	Variationsprinzipien	84

3.5	Linearisierungen .....	87
3.5.1	Linearisierung der kinematischen Größen .....	90
3.5.2	Linearisierung der Materialgleichungen .....	92
3.5.3	Linearisierung der Variationsformulierung .....	94
4.	<b>Räumliche Diskretisierung der Grundgleichungen .....</b>	101
4.1	Generelles isoparametrisches Konzept .....	101
4.1.1	Eindimensionale Ansätze .....	107
4.1.2	Zweidimensionale Ansätze .....	110
4.1.3	Dreidimensionale Ansätze .....	115
4.2	Diskretisierung der Grundgleichungen .....	120
4.2.1	FE-Formulierung der schwachen Form bezogen auf die Ausgangskonfiguration .....	120
4.2.2	Linearisierung der schwachen Form in der Ausgangskonfiguration .....	125
4.2.3	FE-Formulierung der schwachen Form bezüglich der Momentankonfiguration .....	130
4.2.4	Linearisierung der schwachen Form in der Momentankonfiguration .....	133
4.2.5	Verformungsabhängige Lasten .....	139
5.	<b>Lösungsverfahren für zeitunabhängige Probleme .....</b>	145
5.1	Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme .....	148
5.1.1	Newton-Raphson-Verfahren .....	148
5.1.2	Modifiziertes Newton-Verfahren .....	150
5.1.3	Quasi-Newton-Verfahren .....	151
5.1.4	Gedämpftes Newton Verfahren, Line-Search .....	153
5.1.5	Bogenlängenverfahren .....	156
5.2	Löser für lineare Gleichungssysteme .....	165
5.2.1	Direkte Gleichungslöser .....	166
5.2.2	Iterative Gleichungslöser .....	169
5.2.3	Parallele Gleichungslöser .....	176
5.3	Beispiele zu den Algorithmen und Gleichungslösern .....	184
6.	<b>Lösungsverfahren für zeitabhängige Probleme .....</b>	195
6.1	Integration der Bewegungsgleichungen .....	197
6.1.1	Explizite Verfahren .....	199
6.1.2	Implizite Verfahren .....	201
6.1.3	Impuls-, drall- und energieerhaltende Algorithmen .....	204
6.1.4	Numerische Beispiele .....	209
6.2	Integration inelastischer Materialgleichungen bei kleinen Deformationen .....	212
6.2.1	Viskoelastisches Materialverhalten .....	214
6.2.2	Elasto-plastisches Materialienverhalten .....	216
6.2.3	Elasto-viskoplastisches Materialverhalten .....	224

6.3	Integration der Materialgleichungen bei großen Deformationen	225
6.3.1	Allgemeine implizite Integration	226
6.3.2	Implizite Integration mit Bezug auf Hauptachsen	228
6.3.3	Konsistenter Tangentenmodul	233
7.	<b>Stabilitätsprobleme</b>	237
7.1	Vorbemerkungen	237
7.1.1	Klassische und lineare Beulanalyse	238
7.1.2	Nichtlineare Stabilitätsuntersuchungen	240
7.2	Direkte Berechnung von Stabilitätspunkten	243
7.2.1	Formulierung eines erweiterten Systems	244
7.2.2	Berechnung der Richtungsableitung von $K_T$	247
7.2.3	Beispiel: Verzweigungspunkt eines Bogenträgers	250
7.3	Algorithmus für nichtlineare Stabilitätsprobleme	251
8.	<b>Adaptive Verfahren</b>	255
8.1	Randwertproblem und Diskretisierung	261
8.1.1	Randwertproblem für finite Elastizität	262
8.1.2	Das linearisierte Randwertproblem	262
8.1.3	Diskretisierung	263
8.2	Fehlerschätzer und -indikatoren	264
8.2.1	Fehlerschätzung bei nichtlinearen Problemen	265
8.2.2	Residuenbasierter Fehlerschätzer	267
8.2.3	Fehlerindikator basierend auf der $Z^2$ -Methode	269
8.2.4	Fehlerestimatoren basierend auf dualen Methoden	271
8.3	Fehlerschätzung für Plastizität	274
8.4	Netzverfeinerung	276
8.5	Adaptive Netzgenerierung	279
8.5.1	Netzerzeugung	280
8.5.2	Transfer der Geschichtsdaten	282
8.6	Beispiele	285
8.6.1	Kontaktproblem nach Hertz	285
8.6.2	Elastoplastische Deformation einer Zylinderschale	287
9.	<b>Spezielle Strukturelemente</b>	295
9.1	Nichtlineares Fachwerklement	296
9.1.1	Kinematik und Verzerrungen	296
9.1.2	Materialgleichungen für den Fachwerkstab	298
9.1.3	Variationsformulierung und Linearisierung	299
9.1.4	Finite-Element-Modell	300
9.2	Zweidimensionales geometrisch exaktes Balkenelement	307
9.2.1	Kinematik	308
9.2.2	Schwache Form des Gleichgewichtes	312
9.2.3	Materialgleichungen	313
9.2.4	FE-Formulierung	316

9.2.5 Beispiel .....	325
9.2.6 Zusammenfassung .....	327
<b>9.3 Rotationssymmetrisches Schalenelement .....</b>	<b>328</b>
9.3.1 Kinematik und Verzerrungen der rotationssymmetrischen Schale .....	328
9.3.2 Variationsformulierung .....	332
9.3.3 Materialgleichungen .....	332
9.3.4 Finite-Element-Formulierung .....	339
<b>9.4 Allgemeine Schalenelemente .....</b>	<b>345</b>
9.4.1 Vorbemerkungen .....	345
9.4.2 Kinematik .....	351
9.4.3 Parametrisierung der Rotationen .....	354
9.4.4 Schwache Form .....	357
9.4.5 Materialgleichungen für die Schale .....	358
9.4.6 Finite-Element-Formulierung für das 5-Parameter Modell .....	360
9.4.7 Schalenverschneidungen .....	374
<b>9.5 Beispiele .....</b>	<b>375</b>
9.5.1 Biegung eines Kragträgers .....	376
9.5.2 Aufblasvorgang einer quadratischen Platte .....	376
9.5.3 Zylinder unter Einzellast .....	378
9.5.4 Abschließende Bemerkungen .....	379
<b>10. Spezielle Kontinuumselemente .....</b>	<b>383</b>
10.1 Anforderungen an Kontinuumselemente .....	383
10.2 Gemischte Elemente für Inkompressibilität .....	388
10.2.1 Gemischtes Q1-P0 Element .....	391
10.2.2 Linearisierung des Q1-P0 Elementes .....	392
10.3 Stabilisierte finite Elemente .....	394
10.3.1 Stabilisierungsvektoren .....	396
10.3.2 Schwache Form und Linearisierung .....	398
10.4 Enhanced Strain Element .....	399
10.4.1 Generelle Vorgehensweise, klassische Formulierung .....	401
10.4.2 Diskretisierung .....	402
10.4.3 Kombination aus enhanced Formulierung und hour-glass Stabilisierung .....	413
10.4.4 Instabilitäten bei den enhanced Elementen .....	417
10.4.5 Stabilisierung der enhanced Formulierung .....	424
10.4.6 Spezielle Interpolation der enhanced Modes .....	426
<b>11. Kontaktprobleme .....</b>	<b>429</b>
11.1 Kontaktkinematik .....	429
11.2 Konstitutive Gleichungen in der Kontaktzone .....	433
11.2.1 Normalkontakt .....	433
11.2.2 Tangentialkontakt .....	435

11.3 Schwache Formulierung . . . . .	438
11.4 Diskretisierung . . . . .	442
11.4.1 NTS-Diskretisierung . . . . .	443
11.4.2 Matrizenform des Kontaktresiduums . . . . .	446
11.4.3 Integration des Reibgesetzes . . . . .	447
11.4.4 Algorithmen . . . . .	448
11.4.5 Linearisierung des Kontaktresiduums . . . . .	449
<b>A. Tensorrechnung . . . . .</b>	<b>451</b>
A.1 Tensoralgebra . . . . .	451
A.1.1 Definition eines Tensors . . . . .	451
A.1.2 Basisdarstellung von Vektoren und Tensoren . . . . .	452
A.1.3 Produkte von Vektoren und Tensoren . . . . .	454
A.1.4 Spezielle Formen von Tensoren . . . . .	455
A.1.5 Eigenwerte und Invarianten von Tensoren . . . . .	456
A.1.6 Tensoren höherer Stufe . . . . .	458
A.2 Tensoranalysis . . . . .	459
A.2.1 Differentiation nach einer reellen Variablen . . . . .	460
A.2.2 Gradientenbildung eines Feldes . . . . .	460
A.2.3 Divergenzbildung eines Feldes . . . . .	462
A.2.4 Rotation eines Vektorfeldes . . . . .	462
A.2.5 Ableitung der Invarianten nach einem Tensor . . . . .	462
A.2.6 Pull back und push forward Operationen . . . . .	463
A.2.7 Lie-Ableitung von Spannungstensoren . . . . .	464
A.2.8 Integralsätze . . . . .	465
<b>Literatur . . . . .</b>	<b>466</b>
<b>Index . . . . .</b>	<b>491</b>