

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Grundlegende Eigenschaften von Fibonacci- und Lucasfolge</b>	<b>1</b>
1.1	Einführung und Definitionen .....	1
1.2	Einfache Summenformeln .....	3
1.3	Weitere Eigenschaften von Fibonacci- und Lucasfolge .....	8
1.3.1	Das Prinzip der vollständigen Induktion .....	8
1.3.2	Beziehungen zwischen Fibonaccizahlen .....	9
1.3.3	Beziehungen zwischen Lucaszahlen .....	13
1.4	Lineare Rekursion und die Formel von Binet .....	15
1.4.1	Die Formel von Binet .....	15
1.4.2	Lineare Rekursion – die Herleitung der Formel von Binet .....	18
1.5	Folgerungen aus der Formel von Binet .....	20
1.5.1	Folgerungen für die Fibonaccifolge .....	21
1.5.2	Beziehungen zwischen Fibonacci- und Lucaszahlen .....	26
1.6	Fibonacci- und Lucaszahlen mit negativen Indizes .....	28
1.7	Aufgaben .....	30
<b>2</b>	<b>Fibonaccizahlen und Lineare Algebra</b>	<b>31</b>
2.1	Die Herleitung der Formel von Binet mithilfe der Eigenwertrechnung .....	31
2.2	Die Darstellung der Fibonaccizahlen als Determinanten von Matrizen .....	35
2.3	Herleitung von Fibonacci-Identitäten mithilfe der Matrizenrechnung .....	38
2.4	Fibonacci- und Lucasvektoren .....	41
2.5	Aufgaben .....	48
2.5.1	Übungsaufgaben .....	48
2.5.2	Arbeitsaufträge .....	48
<b>3</b>	<b>Zahlentheoretische Eigenschaften von Fibonacci- und Lucasfolge</b>	<b>49</b>
3.1	Zahlentheoretische Grundlagen .....	49
3.1.1	Teiler und Vielfache .....	49
3.1.2	Der euklidische Algorithmus und Eigenschaften von ggT und kgV .....	51
3.1.3	Binomialkoeffizienten .....	54
3.1.4	Gruppen, Ringe, Körper .....	56
3.1.5	Kongruenzen und Restklassen .....	59

3.2	Teilbarkeitsaussagen .....	64
3.2.1	Teilbarkeitsaussagen für Fibonaccizahlen .....	64
3.2.2	Quotienten von Fibonaccizahlen .....	70
3.2.3	Teilbarkeitsaussagen für Lucaszahlen .....	74
3.3	Die Fibonaccifolge modulo $m$ .....	78
3.3.1	Die Periodenlänge der Fibonaccifolge modulo $m$ .....	78
3.3.2	Die Fibonaccifolge modulo $p$ , $p$ prim .....	82
3.3.3	Die Verteilung der Fibonaccizahlen modulo $m$ .....	89
3.3.4	Summenformeln modulo $m$ .....	90
3.4	Fibonaccizahlen und Binomialkoeffizienten .....	91
3.4.1	Summenformeln mit Binomialkoeffizienten .....	92
3.4.2	Verallgemeinerte Binomialkoeffizienten .....	95
3.5	Quadratzahlen in der Fibonacci- und der Lucasfolge .....	97
3.6	Aufgaben .....	100
3.6.1	Übungsaufgaben .....	100
3.6.2	Arbeitsaufträge .....	101
<b>4</b>	<b>Fibonaccizahlen in der Analysis</b> .....	<b>103</b>
4.1	Einige spezielle Folgen .....	103
4.1.1	Folgen mit dem Grenzwert $\Phi$ .....	105
4.1.2	Reihen mit Fibonaccizahlen .....	108
4.2	Potenzreihen mit Fibonaccizahlen .....	112
4.3	Aufgaben .....	115
<b>5</b>	<b>Fibonaccizahlen in der Geometrie</b> .....	<b>117</b>
5.1	Rechtwinklige Dreiecke .....	117
5.2	Der goldene Schnitt .....	119
5.2.1	Teilung einer Strecke .....	119
5.2.2	Konstruktionsverfahren für den goldenen Schnitt .....	121
5.3	Goldene Dreiecke .....	125
5.3.1	Die Winkel im goldenen Dreieck .....	125
5.3.2	Das regelmäßige Zehneck .....	127
5.3.3	Das regelmäßige Fünfeck .....	128
5.4	Fibonaccispirale und goldene Spirale .....	133
5.5	Aufgaben .....	137
5.5.1	Übungsaufgaben .....	137
5.5.2	Arbeitsaufträge .....	138
<b>6</b>	<b>Das Fibonaccizahlensystem und Nim-Spiele</b> .....	<b>139</b>
6.1	Die Darstellung natürlicher Zahlen durch Fibonaccizahlen .....	139

6.1.1	Stellenwertsysteme .....	139
6.1.2	Der Satz von Zeckendorf .....	142
6.2	Nim-Spiele .....	146
6.2.1	Das Spiel „Euklid“ .....	146
6.2.2	Das Spiel von Wythoff .....	148
6.2.3	Das Spiel von Wythoff und das Fibonaccizahlensystem .....	152
6.3	Aufgaben .....	155
6.3.1	Übungsaufgaben .....	155
6.3.2	Arbeitsaufträge .....	156
<b>7</b>	<b>Die Fibonaccizahlen in der Informatik</b>	<b>157</b>
7.1	Binäre Suchbäume .....	157
7.2	Fibonacci-Heaps .....	160
7.3	Aufgaben .....	162
7.3.1	Übungsaufgaben .....	162
7.3.2	Arbeitsaufträge .....	162
<b>8</b>	<b>Verallgemeinerungen der Fibonaccizahlen</b>	<b>163</b>
8.1	Lucasfolgen .....	163
8.1.1	Einführung und Definitionen .....	163
8.1.2	Eigenschaften von Lucasfolgen .....	166
8.2	Die Padovanfolge .....	170
8.2.1	Definition und Eigenschaften .....	170
8.2.2	Rekursions- und Summenformeln .....	171
8.2.3	Kombinatorische Deutung der Padovanzahlen .....	174
8.2.4	Padovan- und Perrinfolge .....	174
8.2.5	Die Plastikzahl .....	176
8.2.6	Die Padovanspirale .....	177
8.3	Die Tribonaccifolge .....	178
8.4	Fibonacci- und Lucaspolynome .....	180
8.5	Aufgaben .....	183
8.5.1	Übungsaufgaben .....	183
8.5.2	Arbeitsaufträge .....	184
<b>A</b>	<b>Tabellen der Zahlenfolgen</b>	<b>185</b>
A.1	Die ersten 60 Fibonaccizahlen .....	185
A.2	Die ersten 60 Lucaszahlen .....	186
A.3	Die ersten 60 Padovanzahlen .....	187
A.4	Die ersten 60 Perrin zahlen .....	188

<b>B</b>	<b>Die Formeln von Cardano</b>	<b>189</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>191</b>
	<b>Index</b>	<b>195</b>