

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
I Die ersten Zahlen	7
1 Entwicklung der Zählkompetenz	7
1.1 Erwerb der Zahlwortreihe	7
1.2 Zählprinzipien und Konventionen	8
1.3 Niveaus beim Einsatz der Zahlwortreihe	10
1.4 Phasen der prozeduralen Sicherheit	12
2 Aspektreichtum der natürlichen Zahlen	13
2.1 Vielfältige Zahlaspekte	14
2.2 Mathematische Fundierungen	17
2.3 Probleme einseitiger Fundierung	17
3 Vorkenntnisse von Schulanfängern	18
3.1 Zählen	18
3.2 Ziffernkenntnis	21
3.3 Kardinalzahlaspekt	22
3.4 Größenvergleich	25
3.5 Maßzahlaspekt	25
3.6 Wissen über den vielseitigen Einsatz von Zahlen im täglichen Leben	26
3.7 Schlussfolgerungen	27
4 Thematisierung der Zahlen im Anfangsunterricht	28
4.1 Der gegenwärtige Anfangsunterricht - ein Überblick	29
4.2 Zählraum und Arbeitsraum	30
4.3 Festigung und Vertiefung des Zählens	31
4.4 Repräsentationen von Zahlen in verschiedenen Darstellungsformen	34
4.5 Subjektive Zahlauffassungen	36
4.6 Die Zahl Null	39
4.7 Zerlegen von Zahlen	41
4.8 Vergleichen von Zahlen	42
4.9 Schreiben von Ziffern	43
4.10 Vertiefung des aspektreichen Vorwissens über die natürlichen Zahlen	45
5 Arbeitsmittel im arithmetischen Anfangsunterricht	50

II	Unsere Zahlschrift – das dezimale Stellenwertsystem	53
1	Die römische Zahlschrift – ein Kontrastbeispiel	53
2	Das dezimale Stellenwertsystem	55
3	Nichtdezimale Stellenwertsysteme – eine Verallgemeinerung	58
III	Erweiterungen des Zahlenraums	63
1	Der Hunderterraum	63
2	Der Tausenderraum	72
3	Der Millionenraum	75
IV	Kopfrechnen	81
1	Addition	81
1.1	Vorkenntnisse von Schulanfängern	81
1.2	Informelle Lösungswege von Schulanfängern – Zählstrategien	82
1.3	Zählstrategien – effizient und problemlos?	84
1.4	Kleines $1 + 1$	84
1.4.1	Zur Erarbeitung der Addition	84
1.4.2	Heuristische Strategien	88
1.4.3	Vielseitiges Lösen und Einprägen des Kleinen $1 + 1$	94
1.5	Das Gleichheitszeichen – einige Anmerkungen	96
1.6	Heuristische Strategien im Hunderterraum	97
1.7	Problemgebiete	98
2	Subtraktion	100
2.1	Vorkenntnisse von Schulanfängern	100
2.2	Informelle Lösungsstrategien von Schulanfängern – Zählstrategien	101
2.3	Kleines $1 - 1$	104
2.3.1	Zur Erarbeitung der Subtraktion	104
2.3.2	Heuristische Strategien	107
2.3.3	Vielseitiges Lösen und Einprägen des Kleinen $1 - 1$	109
2.4	Heuristische Strategien im Hunderterraum	111
2.5	Problemgebiete	112
3	Multiplikation	114
3.1	Vorkenntnisse und informelle Lösungsstrategien	114
3.2	Grundvorstellungen	117
3.2.1	Zeitlich-sukzessive Handlungen	117
3.2.2	Räumlich-simultane Anordnungen	118

	3.2.3	Kombinatorische Aufgabenstellungen	120
	3.2.4	Weitere multiplikative Kontextaufgaben	122
	3.2.5	Resümee	123
	3.3	Rechengesetze	124
	3.3.1	Kommutativgesetz	125
	3.3.2	Assoziativgesetz	126
	3.3.3	Distributivgesetz	127
	3.4	Kleines 1×1	127
	3.4.1	Sichere und schnelle Beherrschung erforderlich?	127
	3.4.2	Ganzheitliche oder getrennte Erarbeitung des Kleinen 1×1 ?	128
	3.4.3	Heuristische Strategien	129
	3.4.4	Vielseitiges Lösen und Einprägen der Einmaleinsreihen	131
	3.5	Multiplikation größerer Zahlen	134
	3.6	Problembereiche	135
4		Division	138
	4.1	Vorkenntnisse und informelle Lösungsstrategien	138
	4.2	Grundvorstellungen	141
	4.2.1	Aufteilen	141
	4.2.2	Verteilen	143
	4.2.3	Vom Aufteilen und Verteilen zur Division	145
	4.2.4	Weitere Grundvorstellungen	146
	4.3	Heuristische Strategien	148
	4.4	Vielseitiges Lösen und Einprägen von Divisionsaufgaben im Hunderterraum	151
	4.5	Sonderfall Null	152
	4.6	Division mit Rest	153
	4.7	Division größerer Zahlen	154
	4.8	Problembereiche	156
V		Halbschriftliches Rechnen	159
	1	Zum Begriff des halbschriftlichen Rechnens	159
	2	Zur Bedeutung des halbschriftlichen Rechnens - eine erste Bestandsaufnahme	160
	3	Hauptstrategien des halbschriftlichen Rechnens	164
	3.1	Eine einleitende Bemerkung	164
	3.2	Addition	165
	3.3	Subtraktion	170

3.4	Multiplikation	173
3.5	Division	177
3.6	Zusammenfassender Überblick	178
4	Einige Forschungsergebnisse zum halbschriftlichen Rechnen	179
4.1	Halbschriftliches Rechnen – flexibles Rechnen?	180
4.2	Variationen im Rahmen der wenigen Hauptstrategien?	183
4.3	Unterschiede im Erfolg bei den halbschriftlichen Strategien?	184
4.4	Charakteristische Fehlerstrategien	185
4.5	Halbschriftliches Rechnen – Lieblingsmethode?	188
4.6	Unterschiede im Erfolg je nach Rechenmethode?	191
4.7	Zur Dominanz der schriftlichen Verfahren nach ihrer Einführung	193
5	Stärken und Problembereiche des halbschriftlichen Rechnens	194
5.1	Stärken	194
5.2	Problembereiche	196
6	Konsequenzen für den Unterricht	199
VI	Schriftliches Rechnen	203
1	Schriftliche Rechenverfahren - ein Auslaufmodell?	203
1.1	Zum Begriff des schriftlichen Rechnens	203
1.2	Stärken des schriftlichen Rechnens	204
1.3	Problembereiche beim schriftlichen Rechnen	206
1.4	Konsequenzen für den Unterricht	207
2	Addition	210
2.1	Verschiedene Zugangswege	210
2.1.1	Sachsituation	210
2.1.2	Stellenweises Rechnen	211
2.2	Endform und mathematische Begründung	212
2.3	Schwierigkeitsfaktoren	214
2.4	Problembereiche, Ursachen und Therapie	214
2.5	Überschlagendes und kontrollierendes Rechnen	216
2.6	Flexibles Rechnen	218
2.7	Vertiefung	218
3	Subtraktion	221
3.1	Verschiedene Subtraktionsverfahren	222

3.1.1	Überblick	222
3.1.2	Abziehen oder Ergänzen?	222
3.1.3	Verschiedene Übertragstechniken – Darstellung und Bewertung	225
3.1.4	Ein Blick in das Ausland	231
3.1.5	Empirische Befunde	231
3.1.6	Zusammenfassung	235
3.2	Verschiedene Zugangswege	236
3.2.1	Sachsituation mit Geld – Entbündeln	236
3.2.2	Zehner-Systemblöcke – Entbündeln	239
3.2.3	Sachsituation mit Geld – Erweitern	240
3.2.4	Sachsituation mit Kilometerzähler – Auffüllen	241
3.3	Problembereiche, Ursachen und Therapie	242
3.3.1	Schwierigkeitsfaktoren und diagnostischer Test	243
3.3.2	Systematische und typische Fehler	245
3.3.3	Ursachen und Therapie	248
3.4	Überschlagendes Rechnen	250
3.5	Kontrollierendes Rechnen	252
3.6	Flexibles Rechnen	252
3.7	Vertiefung	253
4	Multiplikation	256
4.1	Verschiedene Zugangswege	257
4.1.1	Wiederholte Addition	257
4.1.2	Halbschriftliches Rechnen als Ausgangspunkt	260
4.1.3	Malstreifen und Gittermethode	261
4.1.4	Sachsituation mit Geld	263
4.1.5	Charakteristika heutiger Zugangswege	264
4.2	Der weitere Weg	266
4.2.1	Multiplikation mit Vielfachen von 10	266
4.2.2	Multiplikation mit mehrstelligen Multiplikatoren	268
4.3	Problembereiche, Ursachen und Therapie	271
4.3.1	Schwierigkeitsfaktoren und diagnostischer Test	271
4.3.2	Systematische Fehler	273
4.3.3	Typische Fehler und ihre Ursachen	274
4.3.4	Therapie	276
4.4	Überschlagendes Rechnen	277
4.5	Kontrollierendes Rechnen	280
4.6	Flexibles Rechnen	280
4.7	Vertiefung	281

5	Division	286
	5.1 Verschiedene Zugangswege	286
	5.1.1 Wiederholte Subtraktion	287
	5.1.2 Sachsituation mit Geld	290
	5.1.3 Halbschriftliches Rechnen als Ausgangspunkt	292
	5.1.4 Endform bei einstelligem Divisor – ein Vorschlag	293
	5.2 Der weitere Weg	294
	5.2.1 Aufgaben mit Nullen	294
	5.2.2 Division durch Zehnerzahlen	296
	5.2.3 Division durch mehrstellige Divisoren	297
	5.3 Problembereiche, Ursachen, Therapie	298
	5.3.1 Schwierigkeitsfaktoren und diagnostischer Test	299
	5.3.2 Systematische Fehler	300
	5.3.3 Typische Fehler und ihre Ursachen	302
	5.3.4 Therapie	303
	5.4 Überschlagendes Rechnen	305
	5.5 Kontrollierendes Rechnen	307
	5.6 Flexibles Rechnen	308
	5.7 Vertiefung	308

VII Taschenrechner und Computer

im Arithmetikunterricht 311

1	Taschenrechner	312
	1.1 Verkümmern der Rechenfertigkeit durch Taschenrechner?	312
	1.2 Kopfrechner gegen Taschenrechner	313
	1.3 Förderung des überschlagenden Rechnens	313
	1.4 Entdecken von Gesetzmäßigkeiten	316
	1.5 Sachaufgaben	318
	1.6 Resümee	319
2	Computer	320
	2.1 Anforderungen definieren	321
	2.2 Warten können	321
	2.3 Argumente fordern	322
	2.4 Ressentiments und Euphorie vermeiden	323

Literaturverzeichnis 325

Index 345