

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>I Die ersten Zahlen</b>	<b>7</b>
1 Entwicklung der Zählkompetenz . . . . .	7
1.1 Erwerb der Zahlwortreihe . . . . .	7
1.2 Zählprinzipien und Konventionen . . . . .	8
1.3 Niveaus beim Einsatz der Zahlwortreihe . . . . .	10
1.4 Phasen der prozeduralen Sicherheit . . . . .	12
2 Aspektreichtum der natürlichen Zahlen . . . . .	13
2.1 Vielfältige Zahlaspekte . . . . .	14
2.2 Mathematische Fundierungen . . . . .	17
2.3 Probleme einseitiger Fundierung . . . . .	17
3 Vorkenntnisse von Schulanfängern . . . . .	18
3.1 Zählen . . . . .	18
3.2 Ziffernkenntnis . . . . .	21
3.3 Kardinalzahlaspekt . . . . .	22
3.4 Größenvergleich . . . . .	25
3.5 Maßzahlaspekt . . . . .	25
3.6 Wissen über den vielseitigen Einsatz von Zahlen im täglichen Leben . . . . .	26
3.7 Schlussfolgerungen . . . . .	27
4 Thematisierung der Zahlen im Anfangsunterricht . . . . .	28
4.1 Der gegenwärtige Anfangsunterricht - ein Überblick . . . . .	29
4.2 Zählraum und Arbeitsraum . . . . .	30
4.3 Festigung und Vertiefung des Zählens . . . . .	31
4.4 Repräsentationen von Zahlen in verschiedenen Darstellungsformen . . . . .	34
4.5 Subjektive Zahlauffassungen . . . . .	36
4.6 Die Zahl Null . . . . .	39
4.7 Zerlegen von Zahlen . . . . .	41
4.8 Vergleichen von Zahlen . . . . .	42
4.9 Schreiben von Ziffern . . . . .	43
4.10 Vertiefung des aspektreichen Vorwissens über die natürlichen Zahlen . . . . .	45
5 Arbeitsmittel im arithmetischen Anfangsunterricht . . . . .	50

<b>II</b>	<b>Unsere Zahlschrift – das dezimale Stellenwertsystem</b>	<b>53</b>
1	Die römische Zahlschrift – ein Kontrastbeispiel . . . . .	53
2	Das dezimale Stellenwertsystem . . . . .	55
3	Nichtdezimale Stellenwertsysteme – eine Verallgemeinerung . . . . .	58
<b>III</b>	<b>Erweiterungen des Zahlenraums</b>	<b>63</b>
1	Der Hunderterraum . . . . .	63
2	Der Tausenderraum . . . . .	72
3	Der Millionenraum . . . . .	75
<b>IV</b>	<b>Kopfrechnen</b>	<b>81</b>
1	Addition . . . . .	81
1.1	Vorkenntnisse von Schulanfängern . . . . .	81
1.2	Informelle Lösungswege von Schulanfängern – Zählstrategien . . . . .	82
1.3	Zählstrategien – effizient und problemlos? . . . . .	84
1.4	Kleines $1 + 1$ . . . . .	84
1.4.1	Zur Erarbeitung der Addition . . . . .	84
1.4.2	Heuristische Strategien . . . . .	88
1.4.3	Vielseitiges Lösen und Einprägen des Kleinen $1 + 1$ . . . . .	94
1.5	Das Gleichheitszeichen – einige Anmerkungen . . . . .	96
1.6	Heuristische Strategien im Hunderterraum . . . . .	97
1.7	Problemgebiete . . . . .	98
2	Subtraktion . . . . .	100
2.1	Vorkenntnisse von Schulanfängern . . . . .	100
2.2	Informelle Lösungsstrategien von Schulanfängern – Zählstrategien . . . . .	101
2.3	Kleines $1 - 1$ . . . . .	104
2.3.1	Zur Erarbeitung der Subtraktion . . . . .	104
2.3.2	Heuristische Strategien . . . . .	107
2.3.3	Vielseitiges Lösen und Einprägen des Kleinen $1 - 1$ . . . . .	109
2.4	Heuristische Strategien im Hunderterraum . . . . .	111
2.5	Problemgebiete . . . . .	112
3	Multiplikation . . . . .	114
3.1	Vorkenntnisse und informelle Lösungsstrategien . . . . .	114
3.2	Grundvorstellungen . . . . .	117
3.2.1	Zeitlich-sukzessive Handlungen . . . . .	117
3.2.2	Räumlich-simultane Anordnungen . . . . .	118

	3.2.3	Kombinatorische Aufgabenstellungen . . . . .	120
	3.2.4	Weitere multiplikative Kontextaufgaben . . . . .	122
	3.2.5	Resümee . . . . .	123
	3.3	Rechengesetze . . . . .	124
	3.3.1	Kommutativgesetz . . . . .	125
	3.3.2	Assoziativgesetz . . . . .	126
	3.3.3	Distributivgesetz . . . . .	127
	3.4	Kleines $1 \times 1$ . . . . .	127
	3.4.1	Sichere und schnelle Beherrschung erforderlich? . . . . .	127
	3.4.2	Ganzheitliche oder getrennte Erarbeitung des Kleinen $1 \times 1$ ? . . . . .	128
	3.4.3	Heuristische Strategien . . . . .	129
	3.4.4	Vielseitiges Lösen und Einprägen der Einmaleinsreihen . . . . .	131
	3.5	Multiplikation größerer Zahlen . . . . .	134
	3.6	Problembereiche . . . . .	135
4		Division . . . . .	138
	4.1	Vorkenntnisse und informelle Lösungsstrategien . . . . .	138
	4.2	Grundvorstellungen . . . . .	141
	4.2.1	Aufteilen . . . . .	141
	4.2.2	Verteilen . . . . .	143
	4.2.3	Vom Aufteilen und Verteilen zur Division . . . . .	145
	4.2.4	Weitere Grundvorstellungen . . . . .	146
	4.3	Heuristische Strategien . . . . .	148
	4.4	Vielseitiges Lösen und Einprägen von Divisionsaufgaben im Hunderterraum . . . . .	151
	4.5	Sonderfall Null . . . . .	152
	4.6	Division mit Rest . . . . .	153
	4.7	Division größerer Zahlen . . . . .	154
	4.8	Problembereiche . . . . .	156
<b>V</b>		<b>Halbschriftliches Rechnen</b>	<b>159</b>
	1	Zum Begriff des halbschriftlichen Rechnens . . . . .	159
	2	Zur Bedeutung des halbschriftlichen Rechnens - eine erste Bestandsaufnahme . . . . .	160
	3	Hauptstrategien des halbschriftlichen Rechnens . . . . .	164
	3.1	Eine einleitende Bemerkung . . . . .	164
	3.2	Addition . . . . .	165
	3.3	Subtraktion . . . . .	170

3.4	Multiplikation . . . . .	173
3.5	Division . . . . .	177
3.6	Zusammenfassender Überblick . . . . .	178
4	Einige Forschungsergebnisse zum halbschriftlichen Rechnen . . . . .	179
4.1	Halbschriftliches Rechnen – flexibles Rechnen? . . . . .	180
4.2	Variationen im Rahmen der wenigen Hauptstrategien? . . . . .	183
4.3	Unterschiede im Erfolg bei den halbschriftlichen Strategien? . . . . .	184
4.4	Charakteristische Fehlerstrategien . . . . .	185
4.5	Halbschriftliches Rechnen – Lieblingsmethode? . . . . .	188
4.6	Unterschiede im Erfolg je nach Rechenmethode? . . . . .	191
4.7	Zur Dominanz der schriftlichen Verfahren nach ihrer Einführung . . . . .	193
5	Stärken und Problembereiche des halbschriftlichen Rechnens . . . . .	194
5.1	Stärken . . . . .	194
5.2	Problembereiche . . . . .	196
6	Konsequenzen für den Unterricht . . . . .	199
<b>VI</b>	<b>Schriftliches Rechnen</b>	<b>203</b>
1	Schriftliche Rechenverfahren - ein Auslaufmodell? . . . . .	203
1.1	Zum Begriff des schriftlichen Rechnens . . . . .	203
1.2	Stärken des schriftlichen Rechnens . . . . .	204
1.3	Problembereiche beim schriftlichen Rechnen . . . . .	206
1.4	Konsequenzen für den Unterricht . . . . .	207
2	Addition . . . . .	210
2.1	Verschiedene Zugangswege . . . . .	210
2.1.1	Sachsituation . . . . .	210
2.1.2	Stellenweises Rechnen . . . . .	211
2.2	Endform und mathematische Begründung . . . . .	212
2.3	Schwierigkeitsfaktoren . . . . .	214
2.4	Problembereiche, Ursachen und Therapie . . . . .	214
2.5	Überschlagendes und kontrollierendes Rechnen . . . . .	216
2.6	Flexibles Rechnen . . . . .	218
2.7	Vertiefung . . . . .	218
3	Subtraktion . . . . .	221
3.1	Verschiedene Subtraktionsverfahren . . . . .	222

3.1.1	Überblick . . . . .	222
3.1.2	Abziehen oder Ergänzen? . . . . .	222
3.1.3	Verschiedene Übertragstechniken – Darstellung und Bewertung . . . . .	225
3.1.4	Ein Blick in das Ausland . . . . .	231
3.1.5	Empirische Befunde . . . . .	231
3.1.6	Zusammenfassung . . . . .	235
3.2	Verschiedene Zugangswege . . . . .	236
3.2.1	Sachsituation mit Geld – Entbündeln . . . . .	236
3.2.2	Zehner-Systemblöcke – Entbündeln . . . . .	239
3.2.3	Sachsituation mit Geld – Erweitern . . . . .	240
3.2.4	Sachsituation mit Kilometerzähler – Auffüllen . . . . .	241
3.3	Problembereiche, Ursachen und Therapie . . . . .	242
3.3.1	Schwierigkeitsfaktoren und diagnostischer Test . . . . .	243
3.3.2	Systematische und typische Fehler . . . . .	245
3.3.3	Ursachen und Therapie . . . . .	248
3.4	Überschlagendes Rechnen . . . . .	250
3.5	Kontrollierendes Rechnen . . . . .	252
3.6	Flexibles Rechnen . . . . .	252
3.7	Vertiefung . . . . .	253
4	Multiplikation . . . . .	256
4.1	Verschiedene Zugangswege . . . . .	257
4.1.1	Wiederholte Addition . . . . .	257
4.1.2	Halbschriftliches Rechnen als Ausgangspunkt . . . . .	260
4.1.3	Malstreifen und Gittermethode . . . . .	261
4.1.4	Sachsituation mit Geld . . . . .	263
4.1.5	Charakteristika heutiger Zugangswege . . . . .	264
4.2	Der weitere Weg . . . . .	266
4.2.1	Multiplikation mit Vielfachen von 10 . . . . .	266
4.2.2	Multiplikation mit mehrstelligen Multiplikatoren . . . . .	268
4.3	Problembereiche, Ursachen und Therapie . . . . .	271
4.3.1	Schwierigkeitsfaktoren und diagnostischer Test . . . . .	271
4.3.2	Systematische Fehler . . . . .	273
4.3.3	Typische Fehler und ihre Ursachen . . . . .	274
4.3.4	Therapie . . . . .	276
4.4	Überschlagendes Rechnen . . . . .	277
4.5	Kontrollierendes Rechnen . . . . .	280
4.6	Flexibles Rechnen . . . . .	280
4.7	Vertiefung . . . . .	281

5	Division . . . . .	286
	5.1 Verschiedene Zugangswege . . . . .	286
	5.1.1 Wiederholte Subtraktion . . . . .	287
	5.1.2 Sachsituation mit Geld . . . . .	290
	5.1.3 Halbschriftliches Rechnen als Ausgangspunkt . . . . .	292
	5.1.4 Endform bei einstelligem Divisor – ein Vorschlag . . . . .	293
	5.2 Der weitere Weg . . . . .	294
	5.2.1 Aufgaben mit Nullen . . . . .	294
	5.2.2 Division durch Zehnerzahlen . . . . .	296
	5.2.3 Division durch mehrstellige Divisoren . . . . .	297
	5.3 Problembereiche, Ursachen, Therapie . . . . .	298
	5.3.1 Schwierigkeitsfaktoren und diagnostischer Test . . . . .	299
	5.3.2 Systematische Fehler . . . . .	300
	5.3.3 Typische Fehler und ihre Ursachen . . . . .	302
	5.3.4 Therapie . . . . .	303
	5.4 Überschlagendes Rechnen . . . . .	305
	5.5 Kontrollierendes Rechnen . . . . .	307
	5.6 Flexibles Rechnen . . . . .	308
	5.7 Vertiefung . . . . .	308

## VII Taschenrechner und Computer

### im Arithmetikunterricht 311

1	Taschenrechner . . . . .	312
	1.1 Verkümmern der Rechenfertigkeit durch Taschenrechner? . . . . .	312
	1.2 Kopfrechner gegen Taschenrechner . . . . .	313
	1.3 Förderung des überschlagenden Rechnens . . . . .	313
	1.4 Entdecken von Gesetzmäßigkeiten . . . . .	316
	1.5 Sachaufgaben . . . . .	318
	1.6 Resümee . . . . .	319
2	Computer . . . . .	320
	2.1 Anforderungen definieren . . . . .	321
	2.2 Warten können . . . . .	321
	2.3 Argumente fordern . . . . .	322
	2.4 Ressentiments und Euphorie vermeiden . . . . .	323

### Literaturverzeichnis 325

### Index 345