

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>I Vier motivierende Probleme – ein Schnupperkurs</b>	<b>5</b>
1 Sicherheit in der Apotheke . . . . .	5
2 Verblüffende Summendarstellungen . . . . .	9
3 Ein ungelöstes Problem . . . . .	13
4 Primzahlen – eine überraschende Entdeckung . . . . .	15
5 Einige weitere Problemstellungen . . . . .	17
<b>II Teilbarkeitsrelation</b>	<b>21</b>
1 Definition . . . . .	21
2 Eigenschaften . . . . .	24
3 Teilmengen . . . . .	27
4 Die Teilbarkeitsrelation als Ordnungsrelation/Hassediagramme . . . . .	29
5 Übungsaufgaben . . . . .	31
<b>III Primzahlen</b>	<b>33</b>
1 Primzahlen – unterschiedliche Gesichter . . . . .	33
2 Primzahlen – Anzahl . . . . .	35
3 Jagd nach Primzahlrekorden . . . . .	39
4 Sieb des Eratosthenes . . . . .	41
5 Primzahlzwillinge und Primzahllücken . . . . .	46
6 Primzahlsatz . . . . .	50
7 Primzahlformeln . . . . .	50
8 Einige offene Primzahlprobleme . . . . .	53
9 Übungsaufgaben . . . . .	54
<b>IV Primzahlen – Bausteine der natürlichen Zahlen</b>	<b>59</b>
1 Problematisierung . . . . .	59
2 Existenz . . . . .	61
3 Eindeutigkeit/Hauptsatz . . . . .	63
4 Folgerungen . . . . .	66
4.1 Teilmengen . . . . .	66
4.2 Typisierung von Hassediagrammen . . . . .	67
4.3 Primzahlkriterium/Lemma von Euklid . . . . .	70
5 Übungsaufgaben . . . . .	71

<b>V</b>	<b>ggT und kgV</b>	<b>75</b>
1	ggT und Teilmengen . . . . .	76
2	ggT und Primfaktorzerlegung . . . . .	79
3	ggT und Euklidischer Algorithmus . . . . .	81
	3.1 Division mit Rest . . . . .	82
	3.2 Euklidischer Algorithmus . . . . .	83
4	Vielfachenmenge des ggT (a,b) und Linearkombinationen . . . . .	87
5	Lineare diophantische Gleichungen . . . . .	90
6	kgV und Vielfachenmengen . . . . .	92
7	kgV und Primfaktorzerlegung . . . . .	96
8	Zusammenhang zwischen ggT (a,b) und kgV (a,b) . . . . .	98
9	Hassediagramme und ggT- bzw. kgV-Bestimmung . . . . .	99
10	Übungsaufgaben . . . . .	103
<b>VI</b>	<b>Kongruenzen/Restklassen</b>	<b>109</b>
1	Kongruenzrelation – verschiedene Einführungswege . . . . .	109
2	Eigenschaften . . . . .	113
	2.1 Rechnen mit Kongruenzen . . . . .	113
	2.2 Äquivalenzrelation . . . . .	116
3	Restklassen . . . . .	117
	3.1 Restklassenmengen $\mathbf{R}_m$ . . . . .	117
	3.2 Rechnen mit Restklassen . . . . .	120
	3.3 Algebraische Strukturen der Restklassenmengen $\mathbf{R}_m$ . . . . .	123
4	Sätze von Euler und Fermat . . . . .	129
5	Chinesischer Restsatz . . . . .	131
6	Die Fermat'sche Vermutung – eine abenteuerliche Geschichte . . . . .	135
7	Übungsaufgaben . . . . .	137
<b>VII</b>	<b>Stellenwertsysteme/Schriftliche Rechenverfahren</b>	<b>141</b>
1	Bündelung und Stellenwert . . . . .	141
	1.1 Ein kurzer Blick in die Geschichte . . . . .	141
	1.2 Die römische Zahlschrift . . . . .	142
	1.3 Das dezimale Stellenwertsystem . . . . .	143
	1.4 Nichtdezimale Stellenwertsysteme . . . . .	143
2	Zählen und Größenvergleich . . . . .	147
3	Übersetzungen . . . . .	149
4	Schriftliche Rechenverfahren . . . . .	150
	4.1 Addition . . . . .	151
	4.2 Subtraktion . . . . .	152

4.3	Multiplikation . . . . .	153
4.4	Division . . . . .	155
5	Übungsaufgaben . . . . .	156
<b>VIII Teilbarkeitsregeln/Rechenproben</b>		<b>161</b>
1	Grundlagen . . . . .	161
2	Endstellenregeln . . . . .	162
2.1	Endstellenregeln erster Ordnung . . . . .	162
2.1.1	Dezimales Stellenwertsystem . . . . .	162
2.1.2	Nichtdezimale Stellenwertsysteme . . . . .	164
2.2	Endstellenregeln zweiter Ordnung . . . . .	165
2.2.1	Dezimales Stellenwertsystem . . . . .	165
2.2.2	Nichtdezimale Stellenwertsysteme . . . . .	166
2.2.3	Mögliche Vereinfachung von Teilbarkeitsregeln . . . . .	167
2.3	Endstellenregeln dritter Ordnung . . . . .	168
2.3.1	Dezimales Stellenwertsystem . . . . .	168
2.3.2	Nichtdezimale Stellenwertsysteme . . . . .	169
3	Quersummenregeln . . . . .	169
3.1	Dezimales Stellenwertsystem . . . . .	169
3.2	Nichtdezimale Stellenwertsysteme . . . . .	171
4	Alternierende Quersummenregeln . . . . .	173
4.1	Dezimales Stellenwertsystem . . . . .	173
4.2	Nichtdezimale Stellenwertsysteme . . . . .	175
5	Teilbarkeitsregeln in Stellenwertsystemen - Zusammenfassung und Konsequenzen . . . . .	175
6	Vorteile unseres Zugangsweges zu Teilbarkeitsregeln . . . . .	177
7	Teilbarkeitsregeln für beliebige Primzahlen . . . . .	178
7.1	Teilbarkeitsregel für 7 . . . . .	178
7.2	Teilbarkeitsregel für 11 . . . . .	180
7.3	Verallgemeinerung . . . . .	181
8	Rechenproben . . . . .	182
9	Übungsaufgaben . . . . .	186
<b>IX Dezimalbrüche/Systembrüche/ Kettenbrüche</b>		<b>191</b>
1	Umformung gemeiner Brüche in Dezimalbrüche . . . . .	192
2	Endliche Dezimalbrüche . . . . .	197
3	Reinperiodische Dezimalbrüche/Periodenlänge . . . . .	200
4	Gemischtperiodische Dezimalbrüche . . . . .	207
5	Verallgemeinerungen . . . . .	209

6	Kettenbrüche . . . . .	215
7	Übungsaufgaben . . . . .	219
<b>X</b>	<b>Vollkommene Zahlen/Fibonacci-Zahlen</b>	<b>221</b>
1	Vollkommene Zahlen . . . . .	221
2	Fibonacci-Zahlen . . . . .	227
3	Übungsaufgaben . . . . .	234
<b>XI</b>	<b>Rationalisierung und Sicherheit im Handel</b>	<b>235</b>
1	Europäische Artikelnummer EAN . . . . .	235
1.1	Aufbau und Zielsetzung . . . . .	235
1.2	EAN-Prüfziffer . . . . .	237
1.3	Sicherheit des EAN-Prüfziffernsystems . . . . .	239
1.3.1	Eingabe einer falschen Ziffer . . . . .	240
1.3.2	Eingabe zweier falscher Ziffern . . . . .	241
1.3.3	Vertauschung zweier Nachbarziffern (Drehfehler) . . . . .	242
1.3.4	Drehfehler nicht benachbarter Ziffern . . . . .	244
1.3.5	Vertauschung zweier unmittelbar benachbarter Zweierblöcke . . . . .	245
1.3.6	Strichcode der EAN . . . . .	245
1.3.7	Zusammenfassung . . . . .	245
2	Internationale Standardbuchnummer ISBN . . . . .	246
2.1	Aufbau und Zielsetzung . . . . .	247
2.2	ISBN-Prüfziffer . . . . .	248
2.3	Sicherheit des ISBN-Prüfziffernverfahrens . . . . .	249
2.3.1	Eingabe einer falschen Ziffer . . . . .	249
2.3.2	Eingabe zweier falscher Ziffern . . . . .	250
2.3.3	Vertauschung zweier Ziffern (Drehfehler) . . . . .	251
2.3.4	Vertauschung zweier unmittelbar benachbarter Zweierblöcke . . . . .	252
2.3.5	Zusammenfassung . . . . .	252
2.4	ISBN-13 . . . . .	253
3	Pharmazentralnummer PZN bei Arzneimitteln . . . . .	254
4	Übungsaufgaben . . . . .	255
<b>XII</b>	<b>Kryptographie</b>	<b>259</b>
1	Vorbemerkungen . . . . .	259
2	Cäsars Codierung/Monoalphabetische Substitution . . . . .	259
3	Polyalphabetische Substitution . . . . .	262
4	RSA-Verschlüsselungssystem . . . . .	264

4.1	RSA-Algorithmus . . . . .	265
4.2	Authentizität . . . . .	267
4.3	Sicherheit . . . . .	268
4.4	Realitätsnahes Beispiel . . . . .	270
4.5	Ausblick . . . . .	274
5	Übungsaufgaben . . . . .	277
	<b>Lösungshinweise zu den Aufgaben</b>	<b>279</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>293</b>
	<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>299</b>
	<b>Index</b>	<b>301</b>