

# Inhaltsverzeichnis

## Teil I: Einführung und Grundlagen

1	Mathematik – Wissenschaft und Werkzeug	1
1.1	Über dieses Lehrbuch, Mathematiker und Mathematik	2
1.2	Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler	5
1.3	Die didaktischen Elemente dieses Buches	8
1.4	Ratschläge zum Studium der Höheren Mathematik	11
2	Logik, Mengen, Abbildungen – die Sprache der Mathematik	13
2.1	Eine beweisende Wissenschaft	14
2.2	Grundbegriffe der Aussagenlogik	15
2.3	Definition, Satz, Beweis	22
2.4	Elementare Mengenlehre	25
2.5	Zahlenmengen	29
2.6	Abbildungen	32
3	Rechentechiken – die Werkzeuge der Mathematik	41
3.1	Terme, Brüche und Potenzen	42
3.2	Gleichungen und Ungleichungen	49
3.3	Von Betrag und Abschätzungen	57
3.4	Summen und Produkte	61
3.5	Die vollständige Induktion	70
4	Elementare Funktionen – Bausteine der Analysis	83
4.1	Reellwertige Funktionen einer Veränderlichen	84
4.2	Polynome	92
4.3	Die Exponentialfunktion	103
4.4	Trigonometrische Funktionen	108
5	Komplexe Zahlen – Rechnen mit imaginären Größen	121
5.1	Die Menge der komplexen Zahlen	122
5.2	Geometrische Darstellung der komplexen Zahlen	128
5.3	Mengen und Transformationen in der komplexen Ebene	137
6	Folgen – der Weg ins Unendliche	147
6.1	Der Begriff einer Folge	148
6.2	Elementare Eigenschaften von Zahlenfolgen	151
6.3	Konvergenz	156
6.4	Teilfolgen und Häufungspunkte	164
6.5	Konvergenzkriterien	167
7	Stetige Funktionen – kleine Ursachen haben kleine Wirkungen	177
7.1	Zur Definition von Funktionen	178
7.2	Beschränkte und monotone Funktionen	183
7.3	Die Umkehrfunktion	184
7.4	Grenzwerte für Funktionen und die Stetigkeit	187
7.5	Kompakte Mengen	193
7.6	Sätze über reellwertige, stetige Funktionen mit kompaktem Definitionsbereich	198
8	Reihen – Summieren bis zum Letzten	213
8.1	Die Idee der Reihen	214
8.2	Kriterien für Konvergenz	223
8.3	Absolute Konvergenz	231
8.4	Kriterien für absolute Konvergenz	235

## Teil II: Analysis einer reellen Variablen

9	Potenzreihen – Alleskönner unter den Funktionen .....	247
9.1	Definition und Grundlagen .....	248
9.2	Die Darstellung von Funktionen durch Potenzreihen .....	255
9.3	Die Exponentialfunktion .....	263
9.4	Trigonometrische Funktionen .....	266
9.5	Der Logarithmus für komplexe Argumente .....	272
10	Differenzialrechnung – Veränderungen kalkulieren .....	281
10.1	Die Ableitung .....	282
10.2	Differenziationsregeln .....	291
10.3	Verhalten differenzierbarer Funktionen ..	299
10.4	Taylorreihen .....	314
10.5	Spline-Interpolation .....	326
11	Integrale – vom Sammeln und Bilanzieren .....	337
11.1	Das Lebesgue-Integral .....	338
11.2	Stammfunktionen .....	347
11.3	Integrale über unbeschränkte Intervalle oder Funktionen .....	354
11.4	Geometrische Anwendungen des Integrals .....	363
11.5	Parameterintegrale .....	371
12	Integrationstechniken – Tipps, Tricks und Näherungsverfahren .....	381
12.1	Grundtechniken .....	382
12.2	Partielle Integration .....	385
12.3	Substitutionsmethode .....	389
12.4	Integration rationaler Funktionen .....	393
12.5	Numerische Integration .....	402
13	Differenzialgleichungen – Zusammenspiel von Funktionen und ihren Ableitungen .....	417
13.1	Begriffsbildungen .....	418
13.2	Numerische Lösungsmethoden .....	430
13.3	Analytische Lösungsmethoden .....	436
13.4	Lineare Differenzialgleichungen höherer Ordnung .....	443

## Teil III: Lineare Algebra

14	Lineare Gleichungssysteme – Grundlagen der linearen Algebra ..	461
14.1	Erste Lösungsversuche .....	462
14.2	Das Lösungsverfahren von Gauß und Jordan .....	467
14.3	Das Lösungskriterium und Anwendungen ..	475
14.4	Numerische Lösungsmethoden linearer Gleichungssysteme .....	480
15	Vektorräume – Schauplätze der linearen Algebra .....	485
15.1	Der Vektorraumbegriff .....	486
15.2	Beispiele von Vektorräumen .....	493
15.3	Untervektorräume .....	495
15.4	Basis und Dimension .....	497
15.5	Affine Teilräume .....	506
16	Matrizen und Determinanten – Zahlen in Reihen und Spalten .....	515
16.1	Addition und Multiplikation von Matrizen ..	516
16.2	Das Invertieren von Matrizen .....	522
16.3	Symmetrische und orthogonale Matrizen ..	525
16.4	Numerische Lösung linearer Gleichungssysteme .....	535
16.5	Einführung in die Determinanten .....	539
16.6	Definition und Eigenschaften der Determinante .....	543
16.7	Anwendungen der Determinante .....	550
17	Lineare Abbildungen und Matrizen – abstrakte Sachverhalte in Zahlen ausgedrückt .....	557
17.1	Ein einführendes Beispiel .....	558
17.2	Definition einer linearen Abbildung und Beispiele .....	560
17.3	Kern, Bild und die Dimensionsformel ....	566
17.4	Darstellungsmatrizen .....	570
17.5	Basistransformation .....	576
17.6	Determinanten von Endomorphismen ...	578

18 Eigenwerte und Eigenvektoren – oder wie man Matrizen diagonalisiert ..... 585

18.1 Das Diagonalisieren von Matrizen ..... 586

18.2 Eigenwerte und Eigenvektoren ..... 590

18.3 Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren ..... 593

18.4 Diagonalisierbarkeit von Matrizen ..... 598

18.5 Diagonalisierung symmetrischer und hermitescher Matrizen ..... 603

18.6 Numerische Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren ..... 608

18.7 Die Exponentialfunktion für Matrizen ... 612

18.8 Die Jordan-Normalform einer Matrix ... 616

19 Analytische Geometrie – Rechnen statt Zeichnen ..... 629

19.1 Punkte und Vektoren im Anschauungsraum ..... 630

19.2 Das Skalarprodukt im Anschauungsraum 634

19.3 Weitere Vektorverknüpfungen im Anschauungsraum ..... 639

19.4 Wechsel zwischen kartesischen Koordinatensystemen ..... 652

20 Euklidische und unitäre Vektorräume – Geometrie in höheren Dimensionen .. 669

20.1 Euklidische Vektorräume ..... 670

20.2 Norm, Abstand, Winkel, Orthogonalität . 674

20.3 Orthonormalbasen und orthogonale Komplemente ..... 679

20.4 Numerische Lösung linearer Gleichungssysteme ..... 685

20.5 Unitäre Vektorräume ..... 688

21 Quadriken – ebenso nützlich wie dekorativ ..... 695

21.1 Symmetrische Bilinearformen ..... 696

21.2 Hermitesche Sesquilinearformen ..... 703

21.3 Quadriken und ihre Hauptachsentransformation ..... 707

21.4 Die Singulärwertzerlegung ..... 717

21.5 Die Pseudoinverse einer linearen Abbildung ..... 720

22 Tensorrechnung – geschicktes Hantieren mit Indizes ..... 731

22.1 Einführung in die Tensoralgebra ..... 732

22.2 Kartesische Tensoren ..... 739

23 Lineare Optimierung – ideale Ausnutzung von Kapazitäten ..... 751

23.1 Typische Problemstellungen ..... 752

23.2 Sonderfälle von Optimierungsproblemen . 756

23.3 Definitionen und Theorie ..... 758

23.4 Wandern von Ecke zu Ecke ..... 761

23.5 Das Simplexverfahren ..... 765

**Teil IV: Analysis mehrerer reeller Variablen**

24 Funktionen mehrerer Variablen – Differenzieren im Raum ..... 775

24.1 Wozu Funktionen von mehreren Variablen? ..... 776

24.2 Richtungsstetigkeit und Stetigkeit ..... 780

24.3 Partielle Ableitungen und Differenzierbarkeit ..... 785

24.4 Funktionen  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ..... 798

24.5 Der Hauptsatz über implizite Funktionen 805

24.6 Extremwertaufgaben ..... 811

25 Gebietsintegrale – das Ausmessen von Körpern ..... 823

25.1 Definition und Eigenschaften ..... 824

25.2 Volumen, Masse und Schwerpunkt ..... 835

25.3 Die Transformationsformel ..... 839

25.4 Wichtige Koordinatensysteme ..... 844

26 Kurven und Flächen – von Krümmung, Torsion und Längenmessung ..... 857

26.1 Ebene Kurven ..... 858

26.2 Die Bogenlänge von Kurven ..... 863

26.3 Die Krümmung ebener Kurven ..... 866

26.4 Raumkurven ..... 869

26.5 Darstellung von Flächen ..... 875

26.6 Basissysteme krummliniger Koordinaten . 879

27 Vektoranalysis – von Quellen und Wirbeln ..... 893

27.1 Skalar- und Vektorfelder ..... 894

27.2 Differenzialoperatoren ..... 896

27.3 Kurvenintegrale ..... 905

27.4 Oberflächenintegrale ..... 912

27.5	Integralsätze .....	916	30.3	Fourierreihen .....	1031
27.6	Differenzialoperatoren in krummlinigen Koordinaten .....	922	30.4	Die diskrete Fouriertransformation .....	1042
<b>28</b>	<b>Differenzialgleichungssysteme – ein allgemeiner Zugang zu Differenzial- gleichungen .....</b>	<b>935</b>	<b>31</b>	<b>Funktionalanalysis – Operatoren wirken auf Funktionen .....</b>	<b>1055</b>
28.1	Definition und qualitatives Lösungs- verhalten .....	936	31.1	Normierte Räume, Banachräume, Hilberträume .....	1056
28.2	Existenz von Lösungen .....	941	31.2	Lineare, beschränkte Operatoren und Funktionale .....	1063
28.3	Die Herleitung des Satzes von Picard- Lindelöf .....	947	31.3	Funktionale und Distributionen .....	1069
28.4	Die Lösung linearer Differenzial- gleichungssysteme .....	951	31.4	Operatoren in Hilberträumen .....	1075
28.5	Numerische Verfahren für Anfangswert- probleme: Konvergenz, Konsistenz und Stabilität .....	961	31.5	Approximation von Operatoren .....	1082
28.6	Randwertprobleme: Theorie und numerische Verfahren .....	965	<b>32</b>	<b>Funktionentheorie – von komplexen Zusammenhängen .....</b>	<b>1089</b>
<b>29</b>	<b>Partielle Differenzialgleichung – Modelle von Feldern und Wellen ...</b>	<b>981</b>	32.1	Komplexe Funktionen und Differenzier- barkeit .....	1090
29.1	Klassifizierung partieller Differenzial- gleichungen .....	982	32.2	Komplexe Kurvenintegrale .....	1102
29.2	Separationsansätze .....	989	32.3	Laurent-Reihen und Residuensatz .....	1113
29.3	Quasilineare partielle Differenzial- gleichungen erster Ordnung .....	996	<b>33</b>	<b>Integraltransformationen – Multiplizie- ren statt Differenzieren .....</b>	<b>1129</b>
29.4	Potenzialtheorie .....	1000	33.1	Transformation von Funktionen .....	1130
29.5	Die Methode der finiten Elemente .....	1007	33.2	Die Laplacetransformation .....	1133
			33.3	Die Fouriertransformation .....	1146
			<b>34</b>	<b>Spezielle Funktionen – von Orthogo- nalpolynomen, Kugel- und Zylinder- funktionen .....</b>	<b>1165</b>
			34.1	Die Gammafunktion .....	1166
			34.2	Differenzialgleichungen aus Separations- ansätzen .....	1168
			34.3	Das Sturm-Liouville-Problem .....	1170
			34.4	Orthogonalpolynome und Kugelfunk- tionen .....	1171
			34.5	Zylinderfunktionen .....	1178
			<b>35</b>	<b>Optimierung und Variationsrechnung – Suche nach dem Besten .....</b>	<b>1185</b>
			35.1	Optimierungsaufgaben .....	1186
			35.2	Optimierung unter Nebenbedingungen ..	1193
			35.3	Variationsrechnung .....	1198
			35.4	Numerische Verfahren zur Optimierung ..	1205
<b>30</b>	<b>Fouriertheorie – von schwingenden Saiten .....</b>	<b>1021</b>			
30.1	Trigonometrische Polynome .....	1022			
30.2	Approximation im quadratischen Mittel ..	1025			

**Teil V: Höhere Analysis**

## Teil VI: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

36 Deskriptive Statistik – wie man Daten beschreibt .....	1217	38.3 Das Gesetz der großen Zahlen und der Hauptsatz der Statistik .....	1300
36.1 Grundbegriffe .....	1218	38.4 Mehrdimensionale zufällige Variable ....	1306
36.2 Darstellungsformen .....	1220	39 Spezielle Verteilungen – Modelle des Zufalls .....	1317
36.3 Lageparameter .....	1227	39.1 Spezielle diskrete Verteilungsmodelle ...	1318
36.4 Streuungsparameter .....	1236	39.2 Stetige Verteilungen .....	1327
36.5 Strukturparameter .....	1240	39.3 Die Normalverteilungsfamilie .....	1337
36.6 Mehrdimensionale Verteilungen .....	1242	40 Schätz- und Testtheorie – Bewerten und Entscheiden .....	1357
37 Wahrscheinlichkeit – die Gesetze des Zufalls .....	1259	40.1 Grundaufgaben der induktiven Statistik .....	1358
37.1 Wahrscheinlichkeits-Axiomatik .....	1260	40.2 Die Likelihood und der Maximum-Likelihood-Schätzer .....	1360
37.2 Die bedingte Wahrscheinlichkeit .....	1267	40.3 Die Güte einer Schätzung .....	1368
37.3 Die stochastische Unabhängigkeit .....	1272	40.4 Konfidenzintervalle .....	1372
37.4 Kombinatorik .....	1274	40.5 Grundprinzipien der Testtheorie .....	1379
38 Zufällige Variable – der Zufall betritt den $\mathbb{R}^1$ .....	1285	41 Lineare Regression – die Suche nach Abhängigkeiten .....	1393
38.1 Der Begriff der Zufallsvariablen .....	1286	41.1 Die Ausgleichsgeraden .....	1394
38.2 Erwartungswert und Varianz einer zufälligen Variablen .....	1294	41.2 Das Regressionsmodell .....	1396
		41.3 Schätzen und Testen im linearen Modell .....	1401
		41.4 Die lineare Einfachregression .....	1408
		41.5 Fallstricke im linearen Modell .....	1414
		Hinweise zu den Aufgaben .....	1423
		Lösungen zu den Aufgaben .....	1449
		Bildnachweis .....	1479
		Index .....	1481

# Verzeichnis der Übersichten

## Teil I

Ratschläge für das Studium Höherer Mathematik . . . . .	10
Logik – Junktoren und Quantoren . . . . .	21
Umgang mit Wurzeln . . . . .	47
Elementare Rechenregeln . . . . .	62
Wichtige Gleichungen und Ungleichungen . . . . .	75
Transformationen und Kombinationen von Funktionen . . . . .	90
Exponentialfunktion und Logarithmus . . . . .	108
Eigenschaften von $\sin$ und $\cos$ . . . . .	114
Rechenregeln zu den komplexen Zahlen . . . . .	127

## Teil II

Grenzwerte von Folgen . . . . .	162
Die Klassifizierung der Folgen . . . . .	169
Stetige Funktionen und Unstetigkeiten . . . . .	192
Sätze über Funktionen mit kompaktem Definitionsbereich und Gegenbeispiele . . . . .	206
Wichtige Reihen . . . . .	230
Konvergenzkriterien für Reihen . . . . .	237
Die Euler'sche Formel . . . . .	271
Differenzierungsregeln und Ableitungsfunktionen . . . . .	298
Verhalten differenzierbarer Funktionen . . . . .	315
Potenzreihen/Taylorreihen . . . . .	324
Eigenschaften des Integrals . . . . .	346
Tabelle der Stammfunktionen . . . . .	354
Einige bestimmte Integrale . . . . .	360
Integration von Partialbrüchen . . . . .	400
Standardsubstitutionen . . . . .	403
Integrationstechniken . . . . .	412
Differenzialgleichungen in den Anwendungen . . . . .	429
Typen von Differenzialgleichungen . . . . .	444
Ansatz vom Typ der rechten Seite . . . . .	449

## Teil III

Eigenschaften der Determinante . . . . .	546
Die linearen Abbildungen $\varphi_A : v \mapsto A v$ mit einer Matrix $A$ . . . . .	571
Das (allgemeine) Diagonalisieren und das orthogonale Diagonalisieren . . . . .	606
Vektorverknüpfungen im $\mathbb{R}^3$ . . . . .	646
Eigenschaften und Begriffe unitärer Vektorräume und unitärer Skalarprodukte . . . . .	691

## Teil IV

Abbildungen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . . . . .	778
Zentrale Ungleichungen . . . . .	815
Eigenschaften von Gebietsintegralen . . . . .	827
Physikalische Größen als Gebietsintegrale . . . . .	839
Zusammengesetzte Differenzialoperatoren . . . . .	907
Eigenschaften von Kurvenintegralen . . . . .	913
Integralsätze . . . . .	922
Differenzialoperatoren in Zylinder- und Kugelkoordinaten . . . . .	927
Kritische Punkte bei einem linearen Differenzialgleichungssystem . . . . .	939
Numerische Verfahren (kapitelübergreifend) . . . . .	973
Partielle Differenzialgleichungen . . . . .	990
Methoden zur Behandlung partieller Differenzialgleichungen . . . . .	1008

## Teil V

Fourierpolynome . . . . .	1031
Rechenregeln für Distributionen . . . . .	1073
Gebiete in der komplexen Ebene . . . . .	1096
Eigenschaften holomorpher Funktionen . . . . .	1113
Die Laplacetransformation . . . . .	1145
Eigenschaften der Fouriertransformation . . . . .	1154
Orthogonalpolynome . . . . .	1176
Approximation von Funktionen (kapitelübergreifend) . . . . .	1192

## Teil VI

Eigenschaften der empirischen Verteilungsfunktion . . . . .	1225
Lage- und Streuungsparameter . . . . .	1243
Kovarianz und Korrelation . . . . .	1250
Formeln zur Wahrscheinlichkeitstheorie . . . . .	1277
Kombinatorik . . . . .	1278
Eigenschaften des Erwartungswerts und der Varianz . . . . .	1302
Die Eigenschaften der Kovarianz und der Kovarianzmatrix . . . . .	1310
Diskrete und stetige eindimensionale Verteilungen mit ihren Parametern . . . . .	1349
Die Likelihood und Punktschätzer . . . . .	1373
Die Schätzer und ihre Varianzen . . . . .	1415