

Inhaltsverzeichnis

Teil I: Einführung und Grundlagen

1	Mathematik – Wissenschaft und Werkzeug	1
1.1	Über dieses Lehrbuch, Mathematiker und Mathematik	2
1.2	Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler	5
1.3	Die didaktischen Elemente dieses Buches	8
1.4	Ratschläge zum Studium der Höheren Mathematik	11
2	Logik, Mengen, Abbildungen – die Sprache der Mathematik	13
2.1	Eine beweisende Wissenschaft	14
2.2	Grundbegriffe der Aussagenlogik	15
2.3	Definition, Satz, Beweis	22
2.4	Elementare Mengenlehre	25
2.5	Zahlenmengen	29
2.6	Abbildungen	32
3	Rechentechiken – die Werkzeuge der Mathematik	41
3.1	Terme, Brüche und Potenzen	42
3.2	Gleichungen und Ungleichungen	49
3.3	Von Betrag und Abschätzungen	57
3.4	Summen und Produkte	61
3.5	Die vollständige Induktion	70
4	Elementare Funktionen – Bausteine der Analysis	83
4.1	Reellwertige Funktionen einer Veränderlichen	84
4.2	Polynome	92
4.3	Die Exponentialfunktion	103
4.4	Trigonometrische Funktionen	108
5	Komplexe Zahlen – Rechnen mit imaginären Größen	121
5.1	Die Menge der komplexen Zahlen	122
5.2	Geometrische Darstellung der komplexen Zahlen	128
5.3	Mengen und Transformationen in der komplexen Ebene	137
6	Folgen – der Weg ins Unendliche	147
6.1	Der Begriff einer Folge	148
6.2	Elementare Eigenschaften von Zahlenfolgen	151
6.3	Konvergenz	156
6.4	Teilfolgen und Häufungspunkte	164
6.5	Konvergenzkriterien	167
7	Stetige Funktionen – kleine Ursachen haben kleine Wirkungen	177
7.1	Zur Definition von Funktionen	178
7.2	Beschränkte und monotone Funktionen	183
7.3	Die Umkehrfunktion	184
7.4	Grenzwerte für Funktionen und die Stetigkeit	187
7.5	Kompakte Mengen	193
7.6	Sätze über reellwertige, stetige Funktionen mit kompaktem Definitionsbereich	198
8	Reihen – Summieren bis zum Letzten	213
8.1	Die Idee der Reihen	214
8.2	Kriterien für Konvergenz	223
8.3	Absolute Konvergenz	231
8.4	Kriterien für absolute Konvergenz	235

Teil II: Analysis einer reellen Variablen

9	Potenzreihen – Alleskönner unter den Funktionen	247
9.1	Definition und Grundlagen	248
9.2	Die Darstellung von Funktionen durch Potenzreihen	255
9.3	Die Exponentialfunktion	263
9.4	Trigonometrische Funktionen	266
9.5	Der Logarithmus für komplexe Argumente	272
10	Differenzialrechnung – Veränderungen kalkulieren	281
10.1	Die Ableitung	282
10.2	Differenziationsregeln	291
10.3	Verhalten differenzierbarer Funktionen ..	299
10.4	Taylorreihen	314
10.5	Spline-Interpolation	326
11	Integrale – vom Sammeln und Bilanzieren	337
11.1	Das Lebesgue-Integral	338
11.2	Stammfunktionen	347
11.3	Integrale über unbeschränkte Intervalle oder Funktionen	354
11.4	Geometrische Anwendungen des Integrals	363
11.5	Parameterintegrale	371
12	Integrationstechniken – Tipps, Tricks und Näherungsverfahren	381
12.1	Grundtechniken	382
12.2	Partielle Integration	385
12.3	Substitutionsmethode	389
12.4	Integration rationaler Funktionen	393
12.5	Numerische Integration	402
13	Differenzialgleichungen – Zusammenspiel von Funktionen und ihren Ableitungen	417
13.1	Begriffsbildungen	418
13.2	Numerische Lösungsmethoden	430
13.3	Analytische Lösungsmethoden	436
13.4	Lineare Differenzialgleichungen höherer Ordnung	443

Teil III: Lineare Algebra

14	Lineare Gleichungssysteme – Grundlagen der linearen Algebra ..	461
14.1	Erste Lösungsversuche	462
14.2	Das Lösungsverfahren von Gauß und Jordan	467
14.3	Das Lösungskriterium und Anwendungen ..	475
14.4	Numerische Lösungsmethoden linearer Gleichungssysteme	480
15	Vektorräume – Schauplätze der linearen Algebra	485
15.1	Der Vektorraumbegriff	486
15.2	Beispiele von Vektorräumen	493
15.3	Untervektorräume	495
15.4	Basis und Dimension	497
15.5	Affine Teilräume	506
16	Matrizen und Determinanten – Zahlen in Reihen und Spalten	515
16.1	Addition und Multiplikation von Matrizen ..	516
16.2	Das Invertieren von Matrizen	522
16.3	Symmetrische und orthogonale Matrizen ..	525
16.4	Numerische Lösung linearer Gleichungssysteme	535
16.5	Einführung in die Determinanten	539
16.6	Definition und Eigenschaften der Determinante	543
16.7	Anwendungen der Determinante	550
17	Lineare Abbildungen und Matrizen – abstrakte Sachverhalte in Zahlen ausgedrückt	557
17.1	Ein einführendes Beispiel	558
17.2	Definition einer linearen Abbildung und Beispiele	560
17.3	Kern, Bild und die Dimensionsformel	566
17.4	Darstellungsmatrizen	570
17.5	Basistransformation	576
17.6	Determinanten von Endomorphismen ...	578

18 Eigenwerte und Eigenvektoren – oder wie man Matrizen diagonalisiert 585

18.1 Das Diagonalisieren von Matrizen 586

18.2 Eigenwerte und Eigenvektoren 590

18.3 Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren 593

18.4 Diagonalisierbarkeit von Matrizen 598

18.5 Diagonalisierung symmetrischer und hermitescher Matrizen 603

18.6 Numerische Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren 608

18.7 Die Exponentialfunktion für Matrizen ... 612

18.8 Die Jordan-Normalform einer Matrix ... 616

19 Analytische Geometrie – Rechnen statt Zeichnen 629

19.1 Punkte und Vektoren im Anschauungsraum 630

19.2 Das Skalarprodukt im Anschauungsraum 634

19.3 Weitere Vektorverknüpfungen im Anschauungsraum 639

19.4 Wechsel zwischen kartesischen Koordinatensystemen 652

20 Euklidische und unitäre Vektorräume – Geometrie in höheren Dimensionen .. 669

20.1 Euklidische Vektorräume 670

20.2 Norm, Abstand, Winkel, Orthogonalität . 674

20.3 Orthonormalbasen und orthogonale Komplemente 679

20.4 Numerische Lösung linearer Gleichungssysteme 685

20.5 Unitäre Vektorräume 688

21 Quadriken – ebenso nützlich wie dekorativ 695

21.1 Symmetrische Bilinearformen 696

21.2 Hermitesche Sesquilinearformen 703

21.3 Quadriken und ihre Hauptachsentransformation 707

21.4 Die Singulärwertzerlegung 717

21.5 Die Pseudoinverse einer linearen Abbildung 720

22 Tensorrechnung – geschicktes Hantieren mit Indizes 731

22.1 Einführung in die Tensoralgebra 732

22.2 Kartesische Tensoren 739

23 Lineare Optimierung – ideale Ausnutzung von Kapazitäten 751

23.1 Typische Problemstellungen 752

23.2 Sonderfälle von Optimierungsproblemen . 756

23.3 Definitionen und Theorie 758

23.4 Wandern von Ecke zu Ecke 761

23.5 Das Simplexverfahren 765

Teil IV: Analysis mehrerer reeller Variablen

24 Funktionen mehrerer Variablen – Differenzieren im Raum 775

24.1 Wozu Funktionen von mehreren Variablen? 776

24.2 Richtungsstetigkeit und Stetigkeit 780

24.3 Partielle Ableitungen und Differenzierbarkeit 785

24.4 Funktionen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 798

24.5 Der Hauptsatz über implizite Funktionen 805

24.6 Extremwertaufgaben 811

25 Gebietsintegrale – das Ausmessen von Körpern 823

25.1 Definition und Eigenschaften 824

25.2 Volumen, Masse und Schwerpunkt 835

25.3 Die Transformationsformel 839

25.4 Wichtige Koordinatensysteme 844

26 Kurven und Flächen – von Krümmung, Torsion und Längenmessung 857

26.1 Ebene Kurven 858

26.2 Die Bogenlänge von Kurven 863

26.3 Die Krümmung ebener Kurven 866

26.4 Raumkurven 869

26.5 Darstellung von Flächen 875

26.6 Basissysteme krummliniger Koordinaten . 879

27 Vektoranalysis – von Quellen und Wirbeln 893

27.1 Skalar- und Vektorfelder 894

27.2 Differenzialoperatoren 896

27.3 Kurvenintegrale 905

27.4 Oberflächenintegrale 912

27.5	Integralsätze	916	30.3	Fourierreihen	1031
27.6	Differenzialoperatoren in krummlinigen Koordinaten	922	30.4	Die diskrete Fouriertransformation	1042
28	Differenzialgleichungssysteme – ein allgemeiner Zugang zu Differenzial- gleichungen	935	31	Funktionalanalysis – Operatoren wirken auf Funktionen	1055
28.1	Definition und qualitatives Lösungs- verhalten	936	31.1	Normierte Räume, Banachräume, Hilberträume	1056
28.2	Existenz von Lösungen	941	31.2	Lineare, beschränkte Operatoren und Funktionale	1063
28.3	Die Herleitung des Satzes von Picard- Lindelöf	947	31.3	Funktionale und Distributionen	1069
28.4	Die Lösung linearer Differenzial- gleichungssysteme	951	31.4	Operatoren in Hilberträumen	1075
28.5	Numerische Verfahren für Anfangswert- probleme: Konvergenz, Konsistenz und Stabilität	961	31.5	Approximation von Operatoren	1082
28.6	Randwertprobleme: Theorie und numerische Verfahren	965	32	Funktionentheorie – von komplexen Zusammenhängen	1089
29	Partielle Differenzialgleichung – Modelle von Feldern und Wellen ...	981	32.1	Komplexe Funktionen und Differenzier- barkeit	1090
29.1	Klassifizierung partieller Differenzial- gleichungen	982	32.2	Komplexe Kurvenintegrale	1102
29.2	Separationsansätze	989	32.3	Laurent-Reihen und Residuensatz	1113
29.3	Quasilineare partielle Differenzial- gleichungen erster Ordnung	996	33	Integraltransformationen – Multiplizie- ren statt Differenzieren	1129
29.4	Potenzialtheorie	1000	33.1	Transformation von Funktionen	1130
29.5	Die Methode der finiten Elemente	1007	33.2	Die Laplacetransformation	1133
			33.3	Die Fouriertransformation	1146
			34	Spezielle Funktionen – von Orthogo- nalpolynomen, Kugel- und Zylinder- funktionen	1165
			34.1	Die Gammafunktion	1166
			34.2	Differenzialgleichungen aus Separations- ansätzen	1168
			34.3	Das Sturm-Liouville-Problem	1170
			34.4	Orthogonalpolynome und Kugelfunk- tionen	1171
			34.5	Zylinderfunktionen	1178
			35	Optimierung und Variationsrechnung – Suche nach dem Besten	1185
			35.1	Optimierungsaufgaben	1186
			35.2	Optimierung unter Nebenbedingungen ..	1193
			35.3	Variationsrechnung	1198
			35.4	Numerische Verfahren zur Optimierung ..	1205
30	Fouriertheorie – von schwingenden Saiten	1021			
30.1	Trigonometrische Polynome	1022			
30.2	Approximation im quadratischen Mittel ..	1025			

Teil V: Höhere Analysis

Teil VI: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

36 Deskriptive Statistik – wie man Daten beschreibt	1217	38.3 Das Gesetz der großen Zahlen und der Hauptsatz der Statistik	1300
36.1 Grundbegriffe	1218	38.4 Mehrdimensionale zufällige Variable	1306
36.2 Darstellungsformen	1220	39 Spezielle Verteilungen – Modelle des Zufalls	1317
36.3 Lageparameter	1227	39.1 Spezielle diskrete Verteilungsmodelle ...	1318
36.4 Streuungsparameter	1236	39.2 Stetige Verteilungen	1327
36.5 Strukturparameter	1240	39.3 Die Normalverteilungsfamilie	1337
36.6 Mehrdimensionale Verteilungen	1242	40 Schätz- und Testtheorie – Bewerten und Entscheiden	1357
37 Wahrscheinlichkeit – die Gesetze des Zufalls	1259	40.1 Grundaufgaben der induktiven Statistik	1358
37.1 Wahrscheinlichkeits-Axiomatik	1260	40.2 Die Likelihood und der Maximum-Likelihood-Schätzer	1360
37.2 Die bedingte Wahrscheinlichkeit	1267	40.3 Die Güte einer Schätzung	1368
37.3 Die stochastische Unabhängigkeit	1272	40.4 Konfidenzintervalle	1372
37.4 Kombinatorik	1274	40.5 Grundprinzipien der Testtheorie	1379
38 Zufällige Variable – der Zufall betritt den \mathbb{R}^1	1285	41 Lineare Regression – die Suche nach Abhängigkeiten	1393
38.1 Der Begriff der Zufallsvariablen	1286	41.1 Die Ausgleichsgeraden	1394
38.2 Erwartungswert und Varianz einer zufälligen Variablen	1294	41.2 Das Regressionsmodell	1396
		41.3 Schätzen und Testen im linearen Modell	1401
		41.4 Die lineare Einfachregression	1408
		41.5 Fallstricke im linearen Modell	1414
		Hinweise zu den Aufgaben	1423
		Lösungen zu den Aufgaben	1449
		Bildnachweis	1479
		Index	1481

Verzeichnis der Übersichten

Teil I

Ratschläge für das Studium Höherer Mathematik	10
Logik – Junktoren und Quantoren	21
Umgang mit Wurzeln	47
Elementare Rechenregeln	62
Wichtige Gleichungen und Ungleichungen	75
Transformationen und Kombinationen von Funktionen	90
Exponentialfunktion und Logarithmus	108
Eigenschaften von \sin und \cos	114
Rechenregeln zu den komplexen Zahlen	127

Teil II

Grenzwerte von Folgen	162
Die Klassifizierung der Folgen	169
Stetige Funktionen und Unstetigkeiten	192
Sätze über Funktionen mit kompaktem Definitionsbereich und Gegenbeispiele	206
Wichtige Reihen	230
Konvergenzkriterien für Reihen	237
Die Euler'sche Formel	271
Differenzierungsregeln und Ableitungsfunktionen	298
Verhalten differenzierbarer Funktionen	315
Potenzreihen/Taylorreihen	324
Eigenschaften des Integrals	346
Tabelle der Stammfunktionen	354
Einige bestimmte Integrale	360
Integration von Partialbrüchen	400
Standardsubstitutionen	403
Integrationstechniken	412
Differenzialgleichungen in den Anwendungen	429
Typen von Differenzialgleichungen	444
Ansatz vom Typ der rechten Seite	449

Teil III

Eigenschaften der Determinante	546
Die linearen Abbildungen $\varphi_A : v \mapsto A v$ mit einer Matrix A	571
Das (allgemeine) Diagonalisieren und das orthogonale Diagonalisieren	606
Vektorverknüpfungen im \mathbb{R}^3	646
Eigenschaften und Begriffe unitärer Vektorräume und unitärer Skalarprodukte	691

Teil IV

Abbildungen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$	778
Zentrale Ungleichungen	815
Eigenschaften von Gebietsintegralen	827
Physikalische Größen als Gebietsintegrale	839
Zusammengesetzte Differenzialoperatoren	907
Eigenschaften von Kurvenintegralen	913
Integralsätze	922
Differenzialoperatoren in Zylinder- und Kugelkoordinaten	927
Kritische Punkte bei einem linearen Differenzialgleichungssystem	939
Numerische Verfahren (kapitelübergreifend)	973
Partielle Differenzialgleichungen	990
Methoden zur Behandlung partieller Differenzialgleichungen	1008

Teil V

Fourierpolynome	1031
Rechenregeln für Distributionen	1073
Gebiete in der komplexen Ebene	1096
Eigenschaften holomorpher Funktionen	1113
Die Laplacetransformation	1145
Eigenschaften der Fouriertransformation	1154
Orthogonalpolynome	1176
Approximation von Funktionen (kapitelübergreifend)	1192

Teil VI

Eigenschaften der empirischen Verteilungsfunktion	1225
Lage- und Streuungsparameter	1243
Kovarianz und Korrelation	1250
Formeln zur Wahrscheinlichkeitstheorie	1277
Kombinatorik	1278
Eigenschaften des Erwartungswerts und der Varianz	1302
Die Eigenschaften der Kovarianz und der Kovarianzmatrix	1310
Diskrete und stetige eindimensionale Verteilungen mit ihren Parametern	1349
Die Likelihood und Punktschätzer	1373
Die Schätzer und ihre Varianzen	1415