

Inhaltsverzeichnis

	Vorwort	v
I	Lineare Gleichungssysteme und Matrizen	1
1	Der Begriff des Körpers	3
1.1	Mengen	3
1.2	Körperaxiome	3
1.3	Grundlegende Eigenschaften von Körpern	5
1.4	Teilkörper	7
1.5	Aufgaben	8
1.5.1	Grundlegende Aufgaben	8
1.5.2	Weitergehende Aufgaben	8
1.5.3	Maple	8
2	Lineare Gleichungssysteme und Matrizen	9
2.1	Lineare Gleichungssysteme	9
2.2	Matrizen, Transponierte, Zeilen- und Spaltenvektoren	10
2.3	Lösungen und Äquivalenz von Gleichungssystemen	11
2.4	Aufgaben	12
3	Der Gauß-Algorithmus zur Lösung linearer Gleichungssysteme	13
3.1	Matrizen in Treppenform	13
3.2	Lösungen eines Gleichungssystems in reduzierter Treppenform	15
3.3	Elementare Zeilenumformungen	16
3.4	Transformation auf reduzierte Treppenform	17
3.5	Die Struktur des Lösungsraums	18
3.5.1	Reduktion auf homogene Gleichungssysteme	19
3.5.2	Homogene Gleichungssysteme	19
3.6	Eindeutig lösbare Gleichungssysteme und invertierbare Matrizen	21

3.7	Aufgaben	23
3.7.1	Grundlegende Aufgaben	23
3.7.2	Weitergehende Aufgaben	24
3.7.3	Maple	24
4	Multiplikation von Matrizen	25
4.1	Multiplikation einer Matrix mit einem Spaltenvektor	25
4.2	Iterierte Multiplikationen und lineare Substitutionen	26
4.3	Allgemeine Definition der Matrizenmultiplikation	27
4.4	Die Inverse einer Matrix	28
4.5	Geometrische Interpretation	30
4.6	Aufgaben	33
4.6.1	Grundlegende Aufgaben	33
4.6.2	Weitergehende Aufgaben	33
4.6.3	Maple	34
II	Vektorräume und lineare Abbildungen	35
5	Gruppen, Ringe und Vektorräume	37
5.1	Gruppen	37
5.2	Ringe	38
5.3	Vektorräume	40
5.4	Aufgaben	43
5.4.1	Grundlegende Aufgaben	43
5.4.2	Weitergehende Aufgaben	44
6	Lineare Unabhängigkeit, Basis und Dimension	45
6.1	Lineare Unabhängigkeit und Basen für allgemeine Vektorräume	45
6.2	Endlich-dimensionale Vektorräume	47
6.3	Aufgaben	50
6.3.1	Grundlegende Aufgaben	50
6.3.2	Weitergehende Aufgaben	51
7	Unterräume von endlich-dimensionalen Vektorräumen	53
7.1	Summe und Durchschnitt von Unterräumen	53
7.2	Geometrische Interpretation	57
7.2.1	Geometrische Interpretation der Unterräume für $K = \mathbb{R}$	57

7.2.2	Veranschaulichung der Dimensionsformel	57
7.2.3	Höherdimensionale Räume	57
7.3	Anwendungen in der Kodierungstheorie (im Fall $ K < \infty$)	58
7.3.1	Codes, Fehlererkennung und Hamming-Abstand	58
7.3.2	Lineare Codes	59
7.4	Aufgaben	61
7.4.1	Grundlegende Aufgaben	61
7.4.2	Weitergehende Aufgaben	61
7.4.3	Maple	62
8	Lineare Abbildungen	63
8.1	Abbildungen	63
8.2	Strukturerhaltende Abbildungen	65
8.3	Grundlegende Eigenschaften linearer Abbildungen	68
8.4	Beschreibung von linearen Abbildungen durch Matrizen	70
8.5	Der Rang einer Matrix	74
8.6	Aufgaben	76
8.6.1	Grundlegende Aufgaben	76
8.6.2	Weitergehende Aufgaben	78
8.6.3	Maple	79
III	Determinanten und Eigenwerte	81
9	Determinanten	83
9.1	Vorbemerkungen über Invertierbarkeit von Matrizen	83
9.2	Determinantenformen	84
9.3	Das Signum einer Permutation	86
9.4	Allgemeine Definition der Determinante	88
9.4.1	Existenz und Eindeutigkeit der Determinantenform	88
9.4.2	Grundlegende Eigenschaften der Determinante	90
9.4.3	Die Determinante eines Endomorphismus	92
9.5	Entwicklung nach einer Zeile oder Spalte	92
9.5.1	Die Adjungierte einer quadratischen Matrix	93
9.5.2	Laplace-Entwicklung und Cramer'sche Regel	94
9.6	Eine Anwendung: Die Vandermonde'sche Determinante und Polynominterpolation	96
9.6.1	Beweis der Formel für die Vandermonde'sche Determinante	96
9.6.2	Anwendung auf Polynominterpolation	97
9.7	Eine Anwendung auf nicht-lineare algebraische Gleichungssysteme	98

9.8	Aufgaben	100
9.8.1	Grundlegende Aufgaben	100
9.8.2	Weitergehende Aufgaben	102
9.8.3	Maple	102
10	Eigenwerte und Eigenvektoren	103
10.1	Vorbemerkungen und einführende Beispiele	103
10.1.1	Potenzrechnung und Polynomauswertung im Matrixring $M_n(K)$	103
10.1.2	Die Gleichung $x^2 = 1$ im Matrixring $M_n(K)$	104
10.1.3	Ausblick auf die Anwendung auf lineare Differentialgleichungen	106
10.2	Eigenräume, Eigenvektoren, Eigenwerte und charakteristisches Polynom	107
10.2.1	Eigenräume und Diagonalisierbarkeit	108
10.2.2	Das charakteristische Polynom	109
10.2.3	Berechnung von Eigenwerten und Eigenräumen, explizite Diagonalisierung ...	112
10.3	Aufgaben	113
10.3.1	Grundlegende Aufgaben	113
10.3.2	Weitergehende Aufgaben	114
10.3.3	Maple	114
11	Die Jordan'sche Normalform einer quadratischen Matrix	117
11.1	Multiplikation von Blockmatrizen	117
11.2	Nilpotente Matrizen – die Gleichung $x^k = 0$ im Matrixring $M_n(K)$	118
11.3	Verallgemeinerte Eigenräume und Triangulierbarkeit	121
11.4	Die Jordan'sche Normalform	125
11.4.1	Ein Beispiel zur Berechnung der Jordan'schen Normalform	126
11.5	Anwendung auf lineare Differentialgleichungen	129
11.5.1	Systeme linearer Differentialgleichungen erster Ordnung	129
11.5.2	Die lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung	130
11.6	Aufgaben	131
11.6.1	Grundlegende Aufgaben	131
11.6.2	Weitergehende Aufgaben	132
11.6.3	Maple	132
IV	Skalarprodukte und Bilinearformen	133
12	Skalarprodukte und orthogonale Matrizen	135
12.1	Vorbemerkungen über Längen- und Winkelmessung im Anschauungsraum	135
12.1.1	Die Länge eines Vektors	135
12.1.2	Von der Länge zur Orthogonalprojektion	135
12.1.3	Eigenschaften des Skalarprodukts in $V_3(\mathbb{R})$	137

12.2	Skalarprodukt, ON-Systeme und das Orthonormalisierungsverfahren von Gram-Schmidt	137
12.3	Orthogonale Matrizen	140
12.3.1	Definition und wichtigste Eigenschaften orthogonaler Matrizen	140
12.3.2	Orthogonale Matrizen in Dimension 2	142
12.3.3	Orthogonale Matrizen in Dimension 3	142
12.3.4	Eine Matrix-Faktorisierung	143
12.4	Beste Näherungslösung eines Gleichungssystems — die Methode der kleinsten Quadrate	143
12.4.1	Die Orthogonalprojektion auf einen Unterraum	144
12.4.2	Die Methode der kleinsten Quadrate	144
12.4.3	Effektive Berechnung von x_0 durch das Gram-Schmidt-Verfahren	145
12.4.4	Die Anwendung auf Polynominterpolation	145
12.5	Aufgaben	145
12.5.1	Grundlegende Aufgaben	145
12.5.2	Weitergehende Aufgaben	147
12.5.3	Maple	147
13	Bilinearformen	149
13.1	Beschreibung einer Bilinearform durch eine Matrix	149
13.2	Symmetrische Bilinearformen und symmetrische Matrizen	151
13.2.1	Orthogonales Komplement und Orthogonalbasis	151
13.2.2	Symmetrische Bilinearformen und symmetrische Matrizen über den reellen Zahlen	154
13.3	Aufgaben	157
13.3.1	Grundlegende Aufgaben	157
13.3.2	Weitergehende Aufgaben	158

V Affine und projektive Geometrie 159

14	Affine Räume	161
14.1	Die Beziehung zwischen affinen Räumen und Vektorräumen	161
14.2	Unterräume eines affinen Raums	164
14.2.1	Der Lösungsraum eines Gleichungssystems ist ein affiner Unterraum	165
14.2.2	Der von einer Teilmenge aufgespannte Unterraum	165
14.3	Die Automorphismengruppe eines affinen Raums	166
14.4	Affine Quadriken und Kegelschnitte	168
14.5	Affine Räume mit Skalarprodukt und die euklidische Bewegungsgruppe	171
14.6	Aufgaben	172

15	Projektive Räume	173
15.1	Die projektive Ebene über K	173
15.2	Der projektive Raum $P(m, K)$ und seine Projektivitäten	175
15.3	Quadriken in $P(m, K)$	176
15.3.1	Quadratische Formen	176
15.3.2	Quadriken	178
15.3.3	Normalform von Quadriken über \mathbb{R}	180
15.4	Aufgaben	182
15.4.1	Grundlegende Aufgaben	182
15.4.2	Weitergehende Aufgaben	183
A	Die endlichen Primkörper	185
A.1	Lösbarkeit von Gleichungen und das Schubfachprinzip	185
A.2	Die endlichen Primkörper	185
A.3	Der Körper \mathbb{F}_p der Restklassen modulo p	187
B	Endliche projektive Ebenen und ihre Inzidenzmatrizen	191
B.1	Abstrakte projektive Ebenen	191
B.2	Ordnung und Inzidenzmatrix einer endlichen projektiven Ebene	192
B.3	Eine projektive Ebene der Ordnung 9, welche nicht von der Form $P(2, K)$ ist .	194
B.3.1	Verifizierung der Axiome (PE1) und (PE2)	195
B.3.2	Vollständige Vierecke in Π	198
C	Beispielrechnungen zu den behandelten Algorithmen	201
C.1	Lösungen eines Gleichungssystems in reduzierter Treppenform	201
C.2	Transformation einer Matrix auf reduzierte Treppenform	202
C.3	Berechnung der inversen Matrix	204
C.4	Berechnung der Determinante einer Matrix	205
C.5	Polynominterpolation	207
C.6	Cramer'sche Regel	209
C.7	Berechnung der Eigenwerte einer Matrix	210
C.8	Berechnung der Eigenräume einer Matrix	212
C.9	Diagonalisierung einer Matrix	215
C.10	Berechnung der Jordan'schen Normalform einer Matrix	216
C.11	Systeme linearer Differentialgleichungen	217
C.12	Das Orthonormalisierungsverfahren von Gram-Schmidt	218

C.13	Berechnung einer Matrix-Faktorisierung	220
C.14	Beste Näherungslösung eines Gleichungssystems	224
C.15	Quadratische Gleichungen in mehreren Variablen	226
C.16	Diagonalisierung symmetrischer Matrizen mittels orthogonaler Matrizen	227
	Index	229