

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Definition und Zielsetzung der Rheologie	1
1.2	Gliederung der Rheologie	3
1.3	Struktur und Leitziele dieses Buches	5
2	Kinematische Grundlagen	9
2.1	Das Konzept des materiellen Kontinuums	9
2.2	Körper, Konfiguration, Bewegung	9
2.3	Verformungsgradient. Jacobi-Determinante	11
2.4	Lokale und substantielle zeitliche Ableitungen lokaler Größen . .	15
2.5	Substantielle zeitliche Ableitungen integraler Größen	18
3	Dynamische und thermodynamische Grundlagen	21
3.1	Masse, Dichte, Kontinuitätsgleichung	21
3.2	Kräfte und Spannungen im Kontinuum	23
3.3	Impulsbilanz	27
3.4	Drehimpulsbilanz	28
3.5	Verformungsarbeit	29
3.6	Der erste Hauptsatz der Thermodynamik	31
3.7	Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik	32
3.8	Das zentrale Problem der Rheologie. Grenzfälle des Stoffverhaltens	34
4	Verformungs- und Dehnungsmaße	37
4.1	Verformung und Drehung	37
4.2	Cauchy-Greenscher Verformungstensor	37
4.3	Greenscher Verformungstensor	39
4.4	Fingerscher und Piolascher Verformungstensor	40
4.5	Relative Verformungs- und Dehnungsmaße	42
4.6	Invarianten der Verformungs- und Dehnungstensoren	43
4.7	Polare Zerlegung. Drehungs- und Streckungstensoren	44
4.8	Henckysches Dehnungsmaß	45
4.9	Infinitesimales Dehnungsmaß	46
4.10	Spezielle Verformungen	49
4.10.1	Homogene Verformungen	49

4.10.2	Starre Bewegungen	50
4.10.3	Isotrope und isochore Verformungen	50
4.10.4	Drehungsfreie Verformungen	51
4.10.5	Einfache Scherung	53
4.11	Exkurs: Kompatibilitätsbedingungen	62
5	Verformungskinematik	65
5.1	Objektiv äquivalente Bewegungen	65
5.2	Verformungs- und Drehgeschwindigkeitstensor	66
5.3	Homogene stationäre Strömungsfelder	70
5.3.1	Verformungs- und Dehnungsmaße	70
5.3.2	Strömungsfelder mit nilpotenten und nicht-nilpotenten Geschwindigkeitsgradienten	71
5.3.3	Exkurs: Klassifizierung der stationären Strömungen . . .	72
5.3.4	Exkurs: Der Einfluß von Verformungsgeschwindigkeits- und Drehgeschwindigkeitsanteil auf die Strömungsform .	77
5.3.5	Exkurs: Die Klasse der ebenen stationären Strömungen .	84
5.4	Homogene Strömungen mit konstanter Verformungsgeschichte .	88
5.5	Exkurs: Kompatibilitätsbedingungen für inhomogene Strömungs- felder	91
5.6	Kinematische Tensoren	92
5.6.1	Verformungsgeschichte und kinematische Tensoren	92
5.6.2	Geschwindigkeitsgradienten höherer Ordnung	92
5.6.3	Rivlin-Ericksen-Tensoren. Kovariante kinematische Ten- soren	93
5.6.4	Kontravariante und korotatorische kinematische Tensoren	96
5.6.5	Kinematische Tensoren für Strömungen mit konstanter Verformungsgeschichte	98
5.7	Konvektive und korotatorische Ableitungen von Tensoren	100
5.8	Exkurs: Mitgeführte und mitrotierende Koordinatensysteme . .	103
5.8.1	Mitgeführte Koordinatensysteme	103
5.8.2	Differentiation von Vektorkomponenten	105
5.8.3	Differentiation von Tensorkomponenten	106
5.8.4	Differentiation von relativen Tensorkomponenten	107
5.8.5	Mitrotierende Koordinatensysteme	109
5.8.6	Regeln für das Rechnen mit konvektiven und korotatori- schen Ableitungen	111
6	Rheologische Stoffgesetze	113
6.1	Phänomenologischer und struktureller Zugang	113
6.2	Bestimmtheitsprinzipien	114
6.3	Invarianzprinzipien	116
6.4	Spezielle Stoffklassen	117
6.4.1	Ideale Stoffe	117
6.4.2	Einfache Stoffe	118

6.4.3	Homogene Stoffe und homogene Verformungen	119
6.4.4	Isotrope und anisotrope Stoffe	122
6.4.5	Flüssigkeiten	124
6.4.6	Stoffe, die ein thermodynamisches Gleichgewicht besitzen	126
6.4.7	Stoffe mit inneren Zwangsbedingungen	127
6.4.7.1	Dichtebeständige Stoffe	129
6.4.7.2	Unstreckbare Stoffe	129
6.4.7.3	Starre Körper	130
7	Elastische Stoffe	131
7.1	Der elastische Körper	131
7.1.1	Elastizität nach Cauchy	131
7.1.2	Der isotrope elastische Körper	132
7.1.3	Isotrop-lineare und infinitesimale Elastizität	134
7.1.4	Der anisotrope elastische Körper	138
7.2	Der hyperelastische Körper	139
7.3	Spezielle homogene Verformungen isotroper elastischer Körper .	145
7.3.1	Bilanzgleichungen für homogene Verformungen	145
7.3.2	Isotrope Verformung	145
7.3.3	Einfache Dehnung	146
7.3.4	Planare Dehnung dichtebeständiger Körper	148
7.3.5	Einfache Scherung	149
7.4	Elastische Flüssigkeiten	152
8	Viskose Flüssigkeiten	155
8.1	Das Stoffgesetz der Reiner-Rivlin-Flüssigkeit	155
8.1.1	Linear rein-viskose Flüssigkeiten	156
8.1.2	Nicht-linear rein-viskose Flüssigkeiten	157
8.2	Spezielle homogene Strömungen von Reiner-Rivlin-Flüssigkeiten	161
8.2.1	Gleichförmige Dilatationsströmung	161
8.2.2	Einfache Dehnströmung	162
8.2.3	Einfache Scherströmung	163
9	Viskoelastische Stoffe	167
9.1	Einschränkung des Stoffgesetzes bezüglich der Geschichte	167
9.2	Spannungsrelaxation	169
9.3	Approximation durch Mehrfach-Integrale	170
9.4	Rivlin-Sawyers- und K-BKZ-Flüssigkeiten	174
9.5	Walters-Flüssigkeiten	175
9.6	Rivlin-Ericksen-Flüssigkeiten. Approximation für langsame Strö- mungen	179
9.7	Flüssigkeitsmodelle vom Raten-Typ	184
9.7.1	Modelle vom Maxwell- und Oldroyd-Typ	184
9.7.2	Das Oldroydsche Acht-Konstanten-Modell	187
9.7.3	Das Giesekus-Modell	190
9.8	Strömungen mit konstanter Verformungsgeschichte	191

9.9	Einfache Dehnströmung	192
9.9.1	Dehnviskosität bei der Approximation für langsame Strömungen	192
9.9.2	Dehnviskosität bei der Oldroydschen Acht-Konstanten-Flüssigkeit	193
9.9.3	Dehnviskosität bei der Giesekus-Flüssigkeit	196
9.10	Einfache Scherströmung	197
9.10.1	Die viskosimetrischen Funktionen einer viskoelastischen Flüssigkeit	197
9.10.2	Die viskosimetrischen Funktionen bei der Approximation für langsame Strömungen	201
9.10.3	Die viskosimetrischen Funktionen der Acht-Konstanten-Oldroyd-Flüssigkeit	203
9.10.4	Die viskosimetrischen Funktionen der Giesekus-Flüssigkeit	207
9.11	Empirische Gleichungen für Scherspannung oder Scherviskosität	209
9.12	Relaxation nach ruckartiger Verformungsbeanspruchung	217
9.12.1	Der Relaxationsverlauf bei den Walters-Flüssigkeiten	217
9.12.2	Der Relaxationsverlauf bei den Oldroyd-Flüssigkeiten	218
9.12.3	Der Relaxationsverlauf bei der Giesekus-Flüssigkeit	219
9.13	Anlaufverhalten	223
9.13.1	Der Anlaufvorgang bei Integralmodellen	223
9.13.2	Der Anlaufvorgang bei Modellen vom Raten-Typ	224
9.13.2.1	Johnson-Segalman-Modell	225
9.13.2.2	Giesekus-Modell	229
9.14	Oszillatorisches Verhalten	231
9.14.1	Oszillationen in einem isotropen linear-elastischen Festkörper	231
9.14.2	Oszillationen in einer Maxwell-Oldroyd-Flüssigkeit B	232
9.14.3	Oszillationen bei nicht-harmonisch-periodischen Verformungen	236
10	Lineare Theorie des viskoelastischen Verhaltens	239
10.1	Induktiver Aufbau der Theorie	239
10.2	Hookescher Körper und newtonsche Flüssigkeit	241
10.3	Die einfachsten viskoelastischen Stoffe	242
10.3.1	Kelvin-Voigt-Körper und Maxwell-Flüssigkeit	242
10.3.2	Grundfunktionen der sprungartigen Beanspruchung	244
10.3.3	Symbolische Darstellung der Stoffgesetze mittels Netzwerkschaltungen aus Federn und Dämpfern	249
10.3.4	Exkurs: Netzwerke für elasto-visko-plastisches Stoffverhalten	250
10.3.5	Verformungsarbeit, gespeicherter und dissipierter Anteil bei Kelvin-Voigt-Körper und Maxwell-Flüssigkeit	252
10.4	Viskoelastische Stoffe mit drei und vier Parametern	258
10.4.1	Drei-Parameter-Festkörper	258

10.4.2	Drei-Parameter-Flüssigkeit	261
10.4.3	Vier-Parameter-Festkörper	264
10.4.4	Vier-Parameter-Flüssigkeit	268
10.4.5	Mechanische Modelle und Stoffstruktur	270
10.5	n-Parameter-Stoffe	273
10.5.1	Die kanonischen Darstellungen	273
10.5.2	Stoffgesetze und Grundfunktionen	274
10.6	Stoffe mit kontinuierlichen Spektren	279
10.6.1	Grundfunktionen und Spektren	279
10.6.2	Exkurs: Unechte Flüssigkeiten	281
10.7	Grundfunktionen der impulsartigen Beanspruchung	283
10.8	Grundfunktionen der harmonisch-periodischen Beanspruchung	286
10.8.1	Komplexe Grundfunktionen . Gespeicherte und dissipierte Arbeit	286
10.8.2	Komplexe Grundfunktionen der n-Parameter-Stoffe	290
10.8.3	Komplexe Grundfunktionen der Stoffe mit kontinuierli- chen Spektren	293
10.8.4	Exkurs: Äquivalentes Kelvin-Voigt- und äquivalentes Max- well-Modell	294
10.8.5	Exkurs: Cox-Merz-Regel und verwandte Korrelationen	297
10.9	Allgemeine Beanspruchungen	298
10.10	Beziehungen zwischen den Grundfunktionen I	301
10.10.1	Die Volterra-Integralgleichungen	301
10.10.2	Abschätzungen	303
10.11	Beziehungen zwischen den Grundfunktionen II	305
10.11.1	Umrechnung mittels Laplace- und Carson-Transformation	305
10.11.2	Exkurs: Beweis einiger für n-Parameter-Stoffe gültigen Beziehungen	307
10.11.3	Exkurs: Der komplexe Modul der unechten Flüssigkeit	310
10.11.4	Die Kronig-Kramersschen Beziehungen	311
10.11.5	Umrechnung von Spannungs- und Verformungsverläufen durch Fourier-Transformation	313
10.12	Die Struktur der linearen Theorie der Viskoelastizität	314
10.12.1	Die Funktionaloperatoren und ihre Darstellungen	314
10.12.2	Struktur der Theorie und Probleme ihrer Anwendung	317
10.12.3	Deduktive Ableitung der linearen Theorie	319
10.12.4	Einige Anmerkungen zur traditionellen Darstellung der linearen Theorie	321
10.13	Formulierung der Theorie für allgemeine Beanspruchungen	324
10.13.1	Allgemeine Operator-Gleichungen	324
10.13.2	Operator-Gleichungen und komplexe Grundfunktionen für die einfache Dehnung	324
10.13.3	Exkurs: Die Dehnverformung einiger einfacher Stoffe. Grenz- werte des Poisson-Verhältnisses	328
10.14	Viskoelastischen Eigenschaften von Polymeren	333

10.14.1 Die Grundfunktionen der verschiedenen Typen von Polymersystemen	333
10.14.2 Reduzierte Variablen und Master-Kurven	336
10.15 Meßmethoden zur Erfassung der rheologischen Stoffeigenschaften	336
11 Einfache Verformungs- und Strömungsprobleme	341
11.1 Problemstellung	341
11.2 Torsion eines elastischen Zylinders	342
11.3 Wellenausbreitung in viskoelastischen Stoffen	345
11.3.1 Transversalwellen im Halbraum	346
11.3.1.1 Harmonisch-periodische Erregung	347
11.3.1.2 Allgemeine Erregung	352
11.3.1.3 Das Rayleigh-Problem	359
11.3.2 Transversalwellen zwischen zwei Parallelplatten	362
11.4 Erzwungene und freie Schwingungen viskoelastischer Stoffe . . .	369
11.4.1 Schwingungsviskosimeter	369
11.4.2 Torsionspendel	382
11.4.3 Exkurs: Torsionsschwingungsdämpfer	384
11.4.4 Maxwell-Orthogonal-Rheometer	395
11.5 Stationäre Schichtenströmungen	401
11.5.1 Charakterisierung der stationären Schichtenströmungen .	401
11.5.2 Kegel-Platte-Strömung	402
11.5.3 Platte-Platte-Strömung	404
11.5.4 Couette-Strömung	408
11.5.4.1 Weissenberg-Effekt	411
11.5.4.2 Exkurs: Strömung in einer geneigten offenen Rinne	412
11.5.4.3 Couette-Viskosimetrie	413
11.5.4.4 Exkurs: Gleitlagerströmung	419
11.5.5 Stationäre ebene Schichtenströmung	420
11.5.6 Stationäre Kanalströmung	425
11.5.7 Poiseuille-Strömung	430
11.5.8 Stationäre Ringspaltströmung	435
11.5.9 Exkurs: Bestimmung der wahren Fließkurve mit der Methode der repräsentativen Viskosität	437
11.5.10 Exkurs: Ein- und Auslaufkorrekturen für Rohr- und Kapillarviskosimeter	442
11.5.11 Exkurs: Strahlaufweitung und Strahlimpuls-Methode . .	446
11.5.12 Exkurs: Lochdruck-Korrektur	447
11.5.13 Stationäre Strömungen durch gerade Rohre mit beliebigem Querschnitt	448
11.5.14 Scherströmung zwischen zwei Ebenen mit Injektion und Absaugung	452
11.5.14.1 Problemstellung	452
11.5.14.2 Lösungen für die Oldroyd-Flüssigkeit	453

11.5.14.3	Lösungen für die Maxwell-Oldroyd-Flüssigkeit	458
11.5.14.4	Lösungen für die newtonsche Flüssigkeit	462
11.5.14.5	Allgemeine Folgerungen	462
11.5.14.6	Lösungsansätze mit der Approximation zweiter Ordnung	463
11.6	Instationäre Dehnströmungen	467
11.6.1	Die Problematik der Realisierung stationärer Dehnströ- mungen	467
11.6.2	Spinnrheometer	468
11.6.3	Fano-Strömung	475
11.6.4	Andere Methoden zur Bestimmung der Dehnviskosität	477
12	Anspruchsvollere Strömungsprobleme	481
12.1	Grundgleichungen und Lösungsmethoden	482
12.1.1	Die verallgemeinerte Navier-Stokes-Gleichung	482
12.1.2	Die direkte Methode	483
12.1.3	Die Methode der Zerlegung in ein Quellen- und ein Wir- belfeld. Skalares Potential und Vektorpotential	484
12.1.4	Ebene Strömungsfelder. Die Lagrangesche Stromfunktion	485
12.1.5	Rotationssymmetrische Strömungsfelder. Die Stokessche Stromfunktion	487
12.1.6	Strömungsfelder mit kreisförmigen Stromlinien. Direkte Methode	488
12.2	Störungsrechnung	489
12.3	Hilfssätze zur Vereinfachung der Störungsrechnung	492
12.3.1	Hilfssatz von Giesekus	493
12.3.2	Hilfssatz von Tanner und Pipkin	494
12.3.3	Hilfssatz von Langlois, Rivlin und Pipkin	496
12.3.4	Reziprozitätssatz von Lorentz	497
12.4	Teilchen in Strömungen viskoelastischer Flüssigkeiten	501
12.4.1	Kräfte auf eine Kugel in der einfachen Scherströmung	501
12.4.2	Bewegung und Orientierung schlanker Teilchen in der ein- fachen Scherströmung	505
12.4.3	Überblick über weitere Effekte an suspendierten Teilchen	510
12.4.3.1	Wechselwirkungen in viskoelastischen Flüssig- keiten	510
12.4.3.2	Effekte in inhomogenen Strömungsfeldern	514
12.5	Sekundärströmungen	515
12.5.1	Unterscheidung von Primär- und Sekundärströmung	515
12.5.2	Strömung um eine rotierende Kugel	517
12.5.3	Strömung in einer Kegel-Platte-Anordnung	526
12.5.4	Einströmung in eine konische Düse	527
12.5.5	Einströmung in eine Keilspaltdüse	534
12.5.6	Strömung durch ein gerades Rohr mit elliptischem Quer- schnitt	541

12.5.7	Strömung durch ein gekrümmtes Rohr mit kreisförmigem Querschnitt	544
12.5.8	Einige weitere Beispiele von Sekundärströmungen	546
12.6	Strömungsinstabilitäten	550
12.6.1	Klassifizierung der Instabilitätsphänomene	550
12.6.2	Stabilitätsanalyse	552
12.6.3	Instabilitäten vom Taylor-Typ	554
12.6.3.1	Zerlegung der Strömung in Grund- und Störströmung	554
12.6.3.2	Qualitative Vorbetrachtung	555
12.6.3.3	Die Störungsgleichungen für die Approximation zweiter Ordnung	556
12.6.3.4	Der Spezialfall des geraden Couette-Spaltes	558
12.6.3.5	Stationäre und oszillatorische Instabilitäten im gekrümmten Couette-Spalt	563
12.6.3.6	Vergleich mit experimentellen Befunden	563
12.6.4	Instabilitäten in Düsen und an freien Oberflächen	565
12.6.4.1	Schmelzenbruch	565
12.6.4.2	Instabilitäten beim Einströmen in konische und Keilspaltdüsen	566
12.6.4.3	Längsstreifige Freistrahlinstabilitäten	569
12.6.4.4	Verzugsresonanz und Strahlzerfall	569
12.6.4.5	Instabilitäten an ablaufenden Flüssigkeitsfilmen	570
12.6.5	Beispiele von weiteren Instabilitätstypen	571
12.6.5.1	Instabilitäten bei der Umströmung von Körpern	571
12.6.5.2	Thermo-viskoelastische Instabilitäten	572
12.6.6	Turbulenz	573
12.6.6.1	Klassifizierung	573
12.6.6.2	Viskoelastische Turbulenz	573
12.6.6.3	Widerstandsverminderung	573
12.6.6.4	Beeinflussung der Turbulenzstruktur	576
12.7	Schlußbemerkung	578
A	Anhang: Mathematische Hilfsmittel	579
A.1	Vektoren und Tensoren	579
A.1.1	Vektoralgebra	579
A.1.1.1	Definitionen	579
A.1.1.2	Basen und Komponenten im V_n	581
A.1.1.3	Kreuzprodukt und Mehrfachprodukte im V_3	582
A.1.1.4	Euklidischer Ortsraum und Koordinatentransformation	584
A.1.1.5	Exkurs: Komplexe Vektoren	586
A.1.2	Tensoralgebra	587
A.1.2.1	Tensoren zweiter Stufe als lineare Abbildungen des Vektorraums auf sich selbst	587

A.1.2.2	Komponenten eines Tensors	589
A.1.2.3	Spezielle Tensoren, Produkte und Zerlegungen von Tensoren	591
A.1.2.4	Tensorinvarianten im V_3	594
A.1.2.5	Hauptachsentransformation symmetrischer Ten- soren im V_3	597
A.1.2.6	Cayley-Hamilton-Gleichung. Tensor-Polynome und isotrope Tensorfunktionen	602
A.1.2.7	Isotrope Tensorfunktionen und Invarianten von mehreren Tensoren	604
A.1.2.8	Darstellung von Vektoren und Tensoren mittels nicht-orthonormierter Basen	607
A.1.3	Vektor- und Tensoranalysis	609
A.1.3.1	Vektor- und Tensorfelder. Linien-, Flächen- und Volumenintegrale	609
A.1.3.2	Räumliche Differentiation von Feldfunktionen .	611
A.1.3.3	Integralsätze	614
A.1.3.4	Vektor- und Tensoranalysis in allgemeinen krumm- linigen Koordinatensystemen	615
A.1.3.5	Vektor- und Tensoranalysis in krummlinigen or- thogonalen Koordinatensystemen	618
A.1.3.6	Vektor- und Tensoranalysis in Zylinder- und Kugelkoordinaten	621
A.2	Laplace- und Fourier-Transformation	624
A.2.1	Heaviside- und Dirac-Funktion	624
A.2.2	Laplace-Transformation	627
A.2.3	Fourier-Transformation	628
Literaturverzeichnis		631
Sachverzeichnis		643