

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
1.1	Zum Risikobegriff	1
1.2	Geschichtliches	4
1.2.1	Frühe Geschichte der Risikoanalyse als Geschichte der Stochastik	6
1.2.2	Entwicklungen im Finanz- und Versicherungswesen	7
1.3	Bedeutung von Risikoanalyse und Risikomanagement	13
1.4	Regulatorische Rahmenbedingungen des Risikomanagements	14
1.4.1	Corporate Governance	15
1.4.2	KonTraG und TransPuG	15
1.4.3	Der Sarbanes-Oxley Act	17
1.4.4	<i>Basel II</i> , <i>Solvency II</i> und die MaRisk	18
1.5	Risikoanalyse als Bestandteil des Risikomanagements	21
1.6	Übersicht zum Aufbau des Buchs	23
2	Mathematische Modellierung von Risiken	25
2.1	Grundsätzliches zur mathematischen Beschreibung von Risiken	25
2.2	Verteilungsmodelle für Einzelschäden	29
2.2.1	Gleichverteilung	30
2.2.2	Exponentialverteilung, Erlang- und Gamma-Verteilung	31
2.2.3	Weibull-Verteilung	33
2.2.4	Normalverteilung	34
2.2.5	Multivariate Normalverteilung	35
2.2.6	<i>t</i> -Verteilung	37
2.2.7	Logarithmische Normalverteilung	38
2.2.8	Log-Gamma-Verteilung	40
2.2.9	Pareto-Verteilung	40
2.2.10	Verallgemeinerte Pareto-Verteilung	42
2.2.11	Inverse Gauß-Verteilung	42
2.2.12	Beta-Verteilung	43
2.2.13	Dreiecksverteilung	44
2.2.14	Verschobene Verteilungen	45
2.2.15	Gestutzte Verteilungen	45
2.2.16	Zeitabhängige Verteilungen	45
2.2.17	Aufgaben	46
2.3	Modellierung der Schadenanzahl	46

2.3.1	Bernoulli-Prozess und Binomialverteilung	47
2.3.2	Negative Binomialverteilung	52
2.3.3	Logarithmische Verteilung	54
2.3.4	Poisson-Verteilung	55
2.3.5	Panjer-Verteilung	57
2.3.6	Allgemeines zu Schadenanzahlprozessen	58
2.3.7	Homogener Poisson-Prozess	58
2.3.8	Inhomogener Poisson-Prozess	62
2.3.9	Poisson-Ansteckungsprozess	63
2.3.10	Klumpen-Poisson-Prozess	63
2.3.11	Gemischter Poisson-Prozess	64
2.3.12	Cox-Prozess	66
2.3.13	Aufgaben	66
2.4	Modellierung einzelner Wertentwicklungsprozesse	68
2.4.1	Kurs- und Renditewerte als Ausgangsbasis der Modellierung	68
2.4.2	Zeitdiskreter arithmetischer Random Walk	70
2.4.3	Zeitdiskreter geometrischer Random Walk	71
2.4.4	Binomialgitter-Prozesse	72
2.4.5	Brownsche Bewegung (Wiener-Prozess)	74
2.4.6	Ausblick auf weitere Modellierungsansätze	76
2.4.7	Aufgaben	77
2.5	Aggregation von Teilrisiken	78
2.5.1	Allgemeines zu Gesamtrisikomodellen	79
2.5.2	Das individuelle Modell der Risikoaggregation	80
2.5.3	Das kollektive Modell der Risikoaggregation	84
2.5.4	Aggregation einzelner Finanzrisiken	87
2.5.5	Risikomatrizen	91
2.5.6	Aggregation von Einzelrisiken mittels Simulationstechniken	93
2.5.7	Aufgaben	96
2.6	Zusammenfassung	98
2.7	Selbsttest	99

3 Risikokennzahlen 101

3.1	Stochastische Risikokennzahlen (Verteilungsparameter)	101
3.1.1	Vorbemerkungen zum Vergleich von Risiken	101
3.1.2	Mögliche Anforderungen an Risikomaße	103
3.1.3	Mittelwerte und Risiko	105
3.1.4	Streuungsmaße, Schiefemaße und höhere Momente	112
3.1.5	Value-at-Risk und weitere Shortfall-Maße	114
3.1.6	Stochastische Risikokennzahlen zur Bemessung von Risikoreserven	123
3.1.7	Bemessung von Versicherungsprämien unter Risikoaspekten	125
3.1.8	Risikoadjustierte Performance-Maße	130
3.1.9	Aufgaben	136
3.2	Analytische Risikokennzahlen (Sensitivitätsparameter)	139

3.2.1	Zinssensitivität von Barwerten	140
3.2.2	Optionspreissensitivitäten	151
3.2.3	Aufgaben	154
3.3	Zusammenfassung	156
3.4	Selbsttest	157
4	Risikoentlastungsstrategien	159
4.1	Risikoteilung	159
4.1.1	Begriffserläuterung und Überblick	159
4.1.2	Proportionale Risikoteilung	162
4.1.3	Nichtproportionale Risikoteilung	164
4.1.4	Entlastungseffekt bei Risikoteilung	168
4.1.5	Einfluss von Risikoteilung auf den Variationskoeffizienten	170
4.1.6	Anmerkungen zur Preiskalkulation bei Risikoteilung	171
4.1.7	Aufgaben	172
4.2	Diversifikation von Risiken	174
4.2.1	Allgemeines Problem der Portfoliooptimierung	175
4.2.2	Diversifikation bei zwei Anlagealternativen	177
4.2.3	Diversifikationseffekt für n gleichartige, unabhängige Risiken	183
4.2.4	Ausblick: Diversifikation bei n Anlagealternativen	186
4.2.5	Individuelle Rendite-Risiko-Optimierung eines Wertpapierportfolios	189
4.2.6	Das Capital Asset Pricing Modell	195
4.2.7	Aufgaben	199
4.3	Hedging von Risiken	200
4.3.1	Grundbegriffe zu derivaten Finanzinstrumenten	200
4.3.2	Bewertung von Futures	205
4.3.3	Hedging-Strategien mit Futures	208
4.3.4	Wert der vier Grundpositionen von Optionsgeschäften	214
4.3.5	Kombinationsstrategien mit Optionen	219
4.3.6	Hedging und Optionsbewertung im Binomialmodell	229
4.3.7	Hedging und Optionsbewertung im Black-Scholes-Modell	242
4.3.8	Aufgaben	243
4.4	Zusammenfassung	245
4.5	Selbsttest	246
5	Abhängigkeitsmodellierung	249
5.1	Lineare Korrelation	250
5.1.1	Kovarianz und Korrelation als Abhängigkeitsmaß	250
5.1.2	Bemerkungen zum Pearsonschen Korrelationskoeffizienten	253
5.1.3	Aufgaben	255
5.2	Lineare Regression und verwandte Modelle	257
5.2.1	Lineare Regression	257
5.2.2	Verwandte Modelle	261
5.2.3	Aufgaben	264

5.3	Copulas	264
5.3.1	Grundlagen	265
5.3.2	Spezielle Copulas	267
5.3.3	Implementierung von Copula-Methoden in R	271
5.3.4	Bemerkungen	273
5.3.5	Aufgaben	274
5.4	Rangkorrelation	276
5.4.1	Spearman'scher Rangkorrelationskoeffizient	276
5.4.2	Kendallscher Rangkorrelationskoeffizient	278
5.4.3	Aufgaben	279
5.5	Tail-Abhängigkeit	280
5.5.1	Beispiel Tail-Abhängigkeitskoeffizienten	281
5.5.2	Beispiel Tail-Abhängigkeit	282
5.5.3	Aufgaben	282
5.6	Zusammenfassung	284
5.7	Selbsttest	285
6	Auswahl und Überprüfung von Modellen	287
6.1	Überprüfung von Modellannahmen	287
6.1.1	Lage- und Streuungsparameter	288
6.1.2	Grafische Darstellungen	290
6.1.3	Schätzen von Verteilungsparametern	292
6.1.4	Explorativer Vergleich von Daten	295
6.1.5	Anpassungstests	300
6.1.6	Spezielle Tests auf Normalverteilung	307
6.1.7	Aufgaben	311
6.2	Schätzer von Risikomaßen	314
6.2.1	Parametrischer VaR -Schätzer	314
6.2.2	Nichtparametrischer VaR -Schätzer	317
6.2.3	Vergleich der parametrischen und nichtparametrischen VaR -Schätzer	319
6.2.4	Parametrischer TVaR -Schätzer	320
6.2.5	Nichtparametrischer TVaR -Schätzer	321
6.2.6	Aufgaben	321
6.3	Parameterschätzung für Copulas	322
6.3.1	Parameterschätzung durch Rangkorrelationen	323
6.3.2	Parameterschätzung mit der ML-Methode	324
6.3.3	Beispiel zur Copula-Schätzung (BMW- und Siemens-Renditen)	325
6.3.4	Aufgaben	327
6.4	Backtesting	327
6.4.1	Backtesting im Kontext der Modellvalidierung	327
6.4.2	Mathematische Beschreibung	328
6.4.3	Tests für die Ausreißerwahrscheinlichkeit	330
6.4.4	Ein Test auf Unabhängigkeit	332
6.4.5	Anmerkungen zum Backtesting	333

6.4.6	Aufgaben	334
6.5	Zusammenfassung	335
6.6	Selbsttest	335
7	Simulationsmethoden	337
7.1	Erzeugung von Zufallszahlen	337
7.1.1	Die Inversionsmethode	338
7.1.2	Die Verwerfungsmethode	340
7.1.3	Erzeugung normalverteilter Zufallszahlen	342
7.1.4	Erzeugung diskreter Zufallszahlen	343
7.1.5	Anmerkungen zur Erzeugung von Zufallszahlen	344
7.1.6	Aufgaben	344
7.2	Simulation von abhängigen Risiken	345
7.2.1	Simulation der multivariaten Normalverteilung	345
7.2.2	Simulation der Gauß-Copula	346
7.2.3	Simulation der t -Copula	347
7.2.4	Simulation der Gumbel- und Clayton-Copula	347
7.2.5	Simulation von abhängigen Risiken	349
7.2.6	Aufgaben	351
7.3	Simulation von Zählprozessen	352
7.3.1	Bernoulli-Prozess	352
7.3.2	Homogener Poisson-Prozess	355
7.3.3	Inhomogener Poisson-Prozess	358
7.3.4	Gemischter Poisson-Prozess	359
7.3.5	Cox-Prozess	360
7.3.6	Aufgaben	361
7.4	Simulation von Gesamtschadenprozessen und Gesamtschadenverteilungen	361
7.5	Simulation von Random Walks	364
7.5.1	Allgemeiner Ansatz zur Simulation von Random Walks	364
7.5.2	Arithmetische und geometrische Brownsche Bewegung	365
7.5.3	Binomialgitter-Prozesse	368
7.5.4	Aufgaben	371
7.6	Monte-Carlo-Simulation	373
7.6.1	Monte-Carlo-Integration	373
7.6.2	Monte-Carlo-Simulation des Value-at-Risk eines Portfolios	376
7.6.3	Monte-Carlo-Simulation der Risikokapitalallokation	377
7.6.4	Monte-Carlo-Simulation der Ruinwahrscheinlichkeit	379
7.6.5	Aufgaben	382
7.7	Bootstrap-Konfidenzintervalle für Risikomaße	385
7.7.1	Die nichtparametrische Bootstrap-Methode	386
7.7.2	Beispiel Value-at-Risk	386
7.7.3	Die parametrische Bootstrap-Methode	389
7.7.4	Aufgaben	392
7.8	Zusammenfassung	393

7.9 Selbsttest	393
Anhang	395
A Symbolverzeichnis	397
A.1 Grundlagen	397
A.2 Stochastik	397
A.3 Stetige Verteilungen	398
A.4 Diskrete Verteilungen	399
B Einige Grundlagen aus der Stochastik	401
B.1 Zufallsvariablen und Verteilungen	401
B.1.1 Elementare Begriffe und Eigenschaften	401
B.1.2 Quantilfunktionen	402
B.2 Unabhängigkeit	403
B.3 Summen unabhängiger Zufallsvariablen	404
B.4 Erwartungswert, Varianz und höhere Momente	405
B.5 Bedingte Verteilungen und Erwartungswerte	406
B.6 Grenzwertsätze	407
B.7 Momente von Zufallsvektoren	408
Literaturverzeichnis	411
Sachverzeichnis	415

Tabellenverzeichnis

2.1	Wahrscheinlichkeitsverteilung der Schadenanzahl in Beispiel 2.3.1.1	50
2.2	Schadenverteilung für den Fall a)	83
2.3	Schadenverteilung für den Fall b)	83
3.1	Verteilungen von S_A und S_B in Beispiel 3.1.5.7	122
3.2	Verteilung von S in Beispiel 3.1.5.7	123
4.1	Beispieldaten Surplus-Vertrag	163
4.2	Schäden (in Mio. €)	167
4.3	Daten zu Aufgabe 4.3	173
4.4	Grundpositionen bei einem Optionsgeschäft	204
5.1	Zehn gemeinsame Renditewerte der BMW- und Siemens-Aktie	253
5.2	Schadendaten zu Aufgabe 5.1 (Gebäudeflächen in m^2 , Schäden in 10 T €)	255
5.3	Datensätze A bis D aus Aufgabe 5.5	256
5.4	Zehn gemeinsame Renditewerte der BMW- und Siemens-Aktie	277
5.5	Zehn gemeinsame Renditewerte der BMW- und Siemens-Aktie	279
5.6	Tail-Abhängigkeitskoeffizienten der Copulas aus dem Beispiel in Abschnitt 5.3.3	282
6.1	Berechnete Größen für das Histogramm von \mathcal{S}	292
6.2	Entscheidungsmöglichkeiten beim statistischen Test	301
6.3	p-Werte der Anpassungstests für die NYSE-Composite-Daten	310
6.4	Ergebnisse der beiden Anpassungsmethoden für die BMW und Siemens-Renditen	327
6.5	Vierfeldertafel zum Test von Christoffersen	332
6.6	Ausreißerzahlen für das Backtesting des parametrischen $\mathbf{VaR}_{99\%}$	333
7.1	Simulationsergebnisse der extremen gemeinsamen Verluste	351
7.2	Ergebnisse der Monte-Carlo-Integration	375
7.3	Nichtparametrische Value-at-Risk-Schätzer von $X_1 + X_2$	377
7.4	Zu Aufgabe 7.22	384
7.5	Zu Aufgabe 7.23	385
7.6	Bootstrap-Konfidenzintervalle für die NYSE-Composite-Daten	388
7.7	Bootstrap-Konfidenzintervalle für simulierte Erdbebenschäden	391

Abbildungsverzeichnis

1.1	Sprichwörtliche Begründung der Risikoanalyse	2
1.2	Zusammenfassung und Visualisierung des Risikobegriffs	5
1.3	Kerninhalte des KonTraG (Darstellung angelehnt an [RF03])	16
1.4	Rahmenbedingungen der MaRisk	17
1.5	Die drei Säulen von <i>Basel II</i> und <i>Solvency II</i>	18
1.6	Tabellarische Übersicht zu den zehn Gliederungspunkten der MaRisk VA	19
1.7	Ein Value-at-Risk-Ansatz zur Bestimmung von Risikokapital	21
1.8	Darstellung des Risikomanagement-Prozesses (angelehnt an [RF03])	22
1.9	Übersicht zum Aufbau des Buchs	24
2.1	Dichten der Gleichverteilung für ausgewählte Verteilungsparameter	31
2.2	Dichten der Gamma-Verteilung für ausgewählte Verteilungsparameter	32
2.3	Dichten der Weibull-Verteilung für ausgewählte Verteilungsparameter	33
2.4	Dichten der Normalverteilung für ausgewählte Verteilungsparameter	35
2.5	Dreidimensionale Darstellung der Dichtefunktion von $N_2(\mathbf{0}; \Sigma)$	36
2.6	Dichten der t -Verteilung und der Standardnormalverteilung	38
2.7	Dichten der Lognormalverteilung	39
2.8	Dichten der Pareto-Verteilung	41
2.9	Dichten der Beta-Verteilung für verschiedene Parameterwerte	44
2.10	Mögliche Pfade bei einem Bernoulli-Prozess	48
2.11	Eine Realisierung des Bernoulli-Prozesses aus Beispiel 2.3.1.1	49
2.12	Zähldichte von $\mathbf{Bin}(6; 0.1)$ und $\mathbf{Bin}(12; 0.1)$	50
2.13	Zähldichte (Wahrscheinlichkeitsfunktion) von $\mathbf{NB}(18; 0.4736)$	54
2.14	Zähldichte (Wahrscheinlichkeitsfunktion) von $\mathbf{Pois}(0.6)$	56
2.15	Realisierung eines homogenen Poisson-Prozesses mit $\lambda = 7.2$	59
2.16	Mögliche Kursentwicklungen bei einem Binomialgitter-Prozess	73
2.17	Beispiel einer Risikomatrix (schematisch)	92
2.18	Vor- und Nachteile von Risikomatrizen	93
2.19	Prototypisches Unternehmensmodell für die Risikoanalyse	94
3.1	Dichtefunktion der lognormalverteilten Jahresrendite I	106
3.2	Konfidenzintervalle für durchschnittliche Jahresrenditen	108
3.3	Ein-Sigma-Äquivalente einer beliebigen Normalverteilung	113
3.4	Visualisierung der Shortfall-Wahrscheinlichkeit und des Value-at-Risk	116
3.5	Visualisierung der Shortfall-Wahrscheinlichkeit und des Value-at-Risk	117
3.6	Veranschaulichung der M/M-Leverage-Rendite	134

3.7	Absolute Zinssensitivität der Barwertfunktion	141
3.8	Macaulay-Duration als barwertgewichteter Schwerpunkt einer Zahlungsreihe	144
3.9	Kompensationspunkt t^* des Gesamtwerts einer Investition bei Zinsänderung	145
3.10	Macaulay-Duration als Zeitpunkt der vollständigen Immunisierung	147
3.11	Barwert von zwei Zahlungsströmen mit unterschiedlicher Konvexität	149
3.12	Immunisierungsbedingungen für das Asset-Liability-Management	151
3.13	Options-Delta als Sensitivitätskennzahl	153
4.1	Wirkung des Surplus-Vertrags	163
4.2	Verschiedene Typen der Franchise (schematische Darstellung)	165
4.3	Entlastungseffektfunktionen verschiedener Schadenverteilungen	170
4.4	Aufgabenstellung der Portfoliotheorie	176
4.5	Visualisierung des Minimum-Varianz-Portfolios	178
4.6	σ - μ -Diagramm der erreichbaren Portfolios	179
4.7	μ - σ -Diagramm der erreichbaren Portfolios	181
4.8	Diversifikationseffekt für n unabhängige Assets	184
4.9	Konstruktion der Portfoliofläche bei drei Anlagealternativen	187
4.10	Portfoliofläche bei drei Anlagealternativen	187
4.11	Benchmark-Ansatz zur Portfoliooptimierung	190
4.12	Portfoliooptimierung mit Shortfall-Restriktionen	192
4.13	Portfoliooptimierung unter Vorgabe einer risikoaversen Nutzenfunktion	193
4.14	Visualisierung des Tangentialportfolios	196
4.15	Die Kapitalmarktlinie des CAPM	197
4.16	Die Wertpapierlinie des CAPM	198
4.17	Funktionsweise eines Swap	203
4.18	Gewinn / Verlust aus einem Future-Kontrakt	205
4.19	Funktionsweise des perfekten Short und Long Hedge	211
4.20	Ertrags-Risiko-Kombinationen beim nicht perfekten Short Hedge	213
4.21	Wert eines Long Call zum Ausübungszeitpunkt T	215
4.22	Wert eines Short Call zum Ausübungszeitpunkt T	216
4.23	Wert eines Long Put zum Ausübungszeitpunkt T	218
4.24	Wert eines Short Put zum Ausübungszeitpunkt T	219
4.25	Funktionsweise eines 1:1-Put-Hedge	220
4.26	Funktionsweise eines Covered Short Call	222
4.27	Funktionsweise eines Collar	223
4.28	Gewinn/Verlust beim Bull Spread zum Laufzeitende T	225
4.29	Gewinn/Verlust beim Bear Spread zum Laufzeitende T	226
4.30	Gewinn/Verlust beim Butterfly Spread zum Laufzeitende T	227
4.31	Gewinn/Verlust beim Straddle zum Laufzeitende T	228
4.32	Preisentwicklung des Basiswerts im Einperioden-Binomialmodell	230
4.33	Wert des Long Call im Einperioden-Binomialmodell (Beispiel)	230
4.34	Gewinn/Verlust aus dem Optionsgeschäft	232
4.35	Veranschaulichung der Duplikationsstrategie zur Call-Bewertung	234
4.36	Duplikationsstrategie zur Bewertung eines Garantiezertifikats	235

4.37	Duplikationsstrategie zur Call-Bewertung in einem allgemeinen Modell	237
4.38	Binomialgitter mit 4 Zeitperioden zur Optionsbewertung	238
4.39	Kurswerte im Zweiperioden-Binomialmodell (Beispiel)	240
4.40	Call-Werte im Zweiperioden-Binomialmodell (Beispiel)	241
5.1	Streudiagramm der Tagesrenditen von BMW und Siemens	249
5.2	Streudiagramme mit verschiedenen Korrelationskoeffizienten	251
5.3	Streudiagramm der zehn Wertepaare aus Beispiel 5.1.1.2	253
5.4	Renditewerte aus Beispiel 5.1.1.2 mit verschiedenen Geraden	257
5.5	Streudiagramm und geschätzte Regressionsgerade aus Beispiel 5.1.1.2	259
5.6	Regressionsgeraden mit vertauschten Rollen	260
5.7	Funktionsgraph der logistischen Funktion	262
5.8	Dreidimensionale Darstellung der fundamentalen Copulas	268
5.9	Dichten- und Höhenliniendiagramme der angepassten Verteilungen	272
5.10	5000 Realisierungen der Verluste aus Aufgabe 5.24	283
6.1	Histogramm und Box-Plot der Beispieldaten	291
6.2	Dichtefunktionen der drei angepassten Verteilungen	296
6.3	Empirische Verteilungsfunktion mit angepasster Normalverteilung	297
6.4	Histogramm der Beispieldaten mit angepasster Normalverteilung	298
6.5	Q-Q-Plot der Beispieldaten	300
6.6	Zur K-S-Statistik: Ausschnitt aus Abbildung 6.3	304
6.7	Verluste des NYSE-Composite	309
6.8	Q-Q-Plots zu Aufgabe 6.2	311
6.9	Gemeinsame Verteilung und Pseudorealisationen der Copula	326
6.10	Backtesting über 252 Tage	328
6.11	Backtesting über 504 Tage	330
7.1	Visualisierung der Inversionsmethode	339
7.2	Zur Verwerfungsmethode	341
7.3	Dichtefunktionen und Simulationen von verschiedenen Copulas	348
7.4	Höhenlinien und Simulationen der gemeinsamen Verteilungen	350
7.5	Simulation eines Bernoulli-Prozesses mit Excel	354
7.6	Pfad eines homogenen Poisson-Prozesses mit $\lambda = 5$	355
7.7	Simulation eines Poisson-Prozesses mit Excel	357
7.8	Intensitätsfunktion und Pfad eines inhomogenen Poisson-Prozesses	358
7.9	Pfad eines Cox-Prozesses	359
7.10	Simulation eines Gesamtschadenprozesses	362
7.11	Simulation von Brownschen Bewegungen mit R	367
7.12	Simulation einer Brownschen Bewegung mit Excel	369
7.13	Simulation einer geometrischen Brownschen Bewegung mit Excel	370
7.14	Simulation eines Binomialgitter-Prozesses mit Excel	372
7.15	Zur Monte-Carlo-Integration von $\int_0^1 \sin(\pi \cdot x) dx$	375
7.16	Q-Q-Plot von Pareto (1/2;3/2) gegen Exp (1)	381

7.17	Realisierungen von Risikoreserveprozessen	381
7.18	Quantillinien eines Risikoreserveprozesses	382
7.19	Histogramme und Q-Q-Plots der nichtparametrischen Bootstrap-Schätzer	387
7.20	Histogramme und Q-Q-Plot der parametrischen Bootstrap-Schätzer	390
B.1	Zur Definition der Quantilfunktion	403