

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b> .....	1
-------------------------	---

---

## **Teil I Mengensysteme und Abbildungen**

---

<b>1 Mengensysteme</b> .....	7
1.1 Topologien .....	8
1.2 $\sigma$ -Algebren .....	14
1.3 Dynkin-Systeme .....	16
1.4 $\cap$ -stabile Mengensysteme .....	17
1.5 Halbringe und Ringe .....	20
<b>2 Topologische Räume und messbare Räume</b> .....	25
2.1 Urbilder von Mengensystemen .....	25
2.2 Topologische Räume und stetige Abbildungen .....	27
2.3 Messbare Räume und messbare Abbildungen .....	29
<b>3 Produkträume</b> .....	33
3.1 Produkte und Projektionen .....	33
3.2 Produkte von topologischen Räumen .....	36
3.3 Produkte von messbaren Räumen .....	39

---

## **Teil II Maßtheorie**

---

<b>4 Mengenfunktionen</b> .....	43
4.1 Inhalte .....	43
4.2 Maße .....	49
4.3 Signierte Maße .....	56

<b>5</b>	<b>Fortsetzung von Maßen</b> .....	63
5.1	Eindeutigkeitssatz .....	63
5.2	Äußere Maße .....	65
5.3	Existenzsatz .....	67
5.4	Approximationssatz .....	70
5.5	Lebesgue-Maß .....	72
<b>6</b>	<b>Transformation von Maßen</b> .....	79
6.1	Bildmaße .....	79
6.2	Translationsinvariante Maße auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ .....	80
6.3	Lineare Abbildungen des Lebesgue-Maßes .....	85

---

### Teil III Integrationstheorie

---

<b>7</b>	<b>Messbare Funktionen</b> .....	91
7.1	Messbare Funktionen auf einem Messraum .....	92
7.2	Messbare Funktionen auf einem Maßraum .....	101
<b>8</b>	<b>Lebesgue-Integral</b> .....	109
8.1	Positive einfache Funktionen .....	110
8.2	Positive messbare Funktionen .....	115
8.3	Integrierbare Funktionen .....	123
8.4	$L^p$ -Räume .....	135
<b>9</b>	<b>Berechnung des Lebesgue-Integrals</b> .....	147
9.1	Integralinduzierte Maße und signierte Maße .....	148
9.2	Integration nach einem Maß mit Dichte .....	149
9.3	Absolutstetige und singuläre Maße .....	155
9.4	Integration nach einem Bildmaß .....	163
9.5	Integration nach einem eingeschränkten Maß .....	165
9.6	Produktmaße .....	168
9.7	Integration nach einem Produktmaß .....	175
9.8	Lebesgue-Integral und Riemann-Integral .....	180

---

### Teil IV Wahrscheinlichkeitstheorie

---

<b>10</b>	<b>Wahrscheinlichkeitsräume</b> .....	193
10.1	Wahrscheinlichkeitsräume und Zufallsgrößen .....	194
10.2	Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume .....	196
10.3	Symmetrische Wahrscheinlichkeitsräume .....	198
10.4	Endliche Produkte von Wahrscheinlichkeitsräumen .....	202
10.5	Projektive Familien von Wahrscheinlichkeitsräumen .....	204
10.6	Satz von Andersen/Jessen .....	209

<b>11</b>	<b>Unabhängigkeit</b> .....	219
11.1	Unabhängige Familien von Ereignissen .....	219
11.2	Unabhängige Familien von Ereignissystemen .....	229
11.3	Unabhängige Familien von Zufallsgrößen .....	236
11.4	Produkte von Wahrscheinlichkeitsräumen .....	241
<b>12</b>	<b>Univariate Verteilungen</b> .....	245
12.1	Verteilungen und Verteilungsfunktionen .....	245
12.2	Transformationen von Verteilungen .....	267
12.3	Momente .....	274
12.4	Zentrale Momente .....	285
<b>13</b>	<b>Multivariate Verteilungen</b> .....	293
13.1	Verteilungen und Verteilungsfunktionen .....	293
13.2	Transformationen von Verteilungen .....	301
13.3	Randverteilungen .....	302
13.4	Unabhängigkeit .....	309
13.5	Verteilungen von Summen von Zufallsvariablen .....	314
13.6	Momente .....	319
13.7	Zentrale Momente .....	323
<b>14</b>	<b>Konvergenz von Folgen von Zufallsvariablen</b> .....	331
14.1	Fast sichere Konvergenz .....	331
14.2	Stochastische Konvergenz .....	333
14.3	Konvergenz im $p$ -ten Mittel .....	335
<b>15</b>	<b>Gesetze der Großen Zahlen</b> .....	337
15.1	Schwache Gesetze der Großen Zahlen .....	337
15.2	Starke Gesetze der Großen Zahlen .....	341
15.3	Satz von Glivenko/Cantelli .....	353
15.4	Irrfahrten .....	357

---

## Teil V Vertiefung der Wahrscheinlichkeitstheorie

---

<b>16</b>	<b>Erzeugende Funktionen</b> .....	369
16.1	Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion .....	370
16.2	Momenterzeugende Funktion .....	378
16.3	Kumulantenerzeugende Funktion .....	381
16.4	Charakteristische Funktion .....	383
<b>17</b>	<b>Schwache Konvergenz und Zentraler Grenzwertsatz</b> .....	391
17.1	Schwache Konvergenz .....	392
17.2	Straffheit .....	400
17.3	Zentraler Grenzwertsatz .....	405

<b>18 Bedingte Erwartung</b> .....	409
18.1 Bedingte Erwartung einer positiven Zufallsvariablen .....	410
18.2 Bedingte Erwartung und bedingte Integrierbarkeit .....	416
18.3 Bedingte Erwartung als Projektion .....	426
18.4 Martingale .....	428
<b>19 Bedingte Wahrscheinlichkeit und bedingte Verteilung</b> .....	435
19.1 Bedingte Wahrscheinlichkeit .....	435
19.2 Bedingte Unabhängigkeit .....	438
19.3 Bedingte Verteilung .....	442
19.4 Bedingte Dichte .....	446
19.5 Bedingte Gesetze der Großen Zahlen .....	451
<b>20 Regularität und Satz von Kolmogorov</b> .....	455
20.1 Regularität .....	456
20.2 Satz von Kolmogorov .....	458

---

## Anhang

---

<b>A Fakultät und Gamma-Funktion</b> .....	465
A.1 Fakultät und Binomial-Koeffizient .....	465
A.2 Gamma-Funktion und Beta-Funktion .....	466
<b>B Vektorräume, Ordnung und Topologie</b> .....	467
B.1 Vektorräume .....	467
B.2 Ordnung .....	468
B.3 Topologie .....	469
B.4 Ordnung und Topologie .....	470
<b>C Der Euklidische Raum</b> .....	471
C.1 Vektoren und Matrizen .....	471
C.2 Ordnung .....	473
C.3 Topologie .....	474
C.4 Ordnung und Topologie .....	474
<b>Literaturverzeichnis</b> .....	475
<b>Symbolverzeichnis</b> .....	477
<b>Sachverzeichnis</b> .....	481