

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b> .....	1
<b>2. Nichtlineare Phänomene</b> .....	7
2.1 Geometrische Nichtlinearität .....	7
2.1.1 Große Verschiebungen eines starren Balkens .....	7
2.1.2 Große Verschiebungen eines elastischen Systems .....	9
2.1.3 Verzweigungsproblem .....	11
2.1.4 Durchschlagproblem .....	13
2.2 Physikalische Nichtlinearität .....	15
2.3 Nichtlinearität infolge von Randbedingungen .....	16
<b>3. Kontinuumsmechanische Grundgleichungen</b> .....	19
3.1 Kinematik .....	19
3.1.1 Bewegung, Deformationsgradient .....	20
3.1.2 Verzerrungsmaße .....	23
3.1.3 Transformation von Vektoren und Tensoren .....	29
3.1.4 Zeitableitungen .....	31
3.2 Bilanzgleichungen .....	33
3.2.1 Volumenbilanz .....	34
3.2.2 Lokale Impulsbilanz, Drallbilanz .....	34
3.2.3 1. Hauptsatz der Thermodynamik .....	35
3.2.4 Umrechnung auf die Ausgangskonfiguration, verschiedene Spannungstensoren .....	36
3.2.5 Zeitableitungen der Spannungstensoren .....	38
3.3 Materialgleichungen .....	39
3.3.1 Elastisches Materialverhalten .....	41
3.3.2 Elasto-plastische Materialgesetze .....	52
3.3.3 Viskoelastisches und viskoplastisches Materialverhalten .....	63
3.3.4 Inkrementelle Form der Materialgleichungen .....	72
3.4 Schwache Form des Gleichgewichts, Variationsprinzipien .....	81
3.4.1 Schwache Formulierung des Gleichgewichts in der Ausgangskonfiguration .....	82
3.4.2 Räumliche schwache Formulierung des Gleichgewichtes .....	83
3.4.3 Variationsprinzipien .....	84

3.5	Linearisierungen .....	87
3.5.1	Linearisierung der kinematischen Größen .....	90
3.5.2	Linearisierung der Materialgleichungen .....	92
3.5.3	Linearisierung der Variationsformulierung .....	94
4.	<b>Räumliche Diskretisierung der Grundgleichungen</b> .....	101
4.1	Generelles isoparametrisches Konzept .....	101
4.1.1	Eindimensionale Ansätze .....	107
4.1.2	Zweidimensionale Ansätze .....	110
4.1.3	Dreidimensionale Ansätze .....	115
4.2	Diskretisierung der Grundgleichungen .....	120
4.2.1	FE-Formulierung der schwachen Form bezogen auf die Ausgangskonfiguration .....	120
4.2.2	Linearisierung der schwachen Form in der Ausgangskonfiguration .....	125
4.2.3	FE-Formulierung der schwachen Form bezüglich der Momentankonfiguration .....	130
4.2.4	Linearisierung der schwachen Form in der Momentankonfiguration .....	133
4.2.5	Verformungsabhängige Lasten .....	139
5.	<b>Lösungsverfahren für zeitunabhängige Probleme</b> .....	145
5.1	Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme .....	148
5.1.1	Newton-Raphson-Verfahren .....	148
5.1.2	Modifiziertes Newton-Verfahren .....	150
5.1.3	Quasi-Newton-Verfahren .....	151
5.1.4	Gedämpftes Newton Verfahren, Line-Search .....	153
5.1.5	Bogenlängenverfahren .....	156
5.2	Löser für lineare Gleichungssysteme .....	165
5.2.1	Direkte Gleichungslöser .....	166
5.2.2	Iterative Gleichungslöser .....	169
5.2.3	Parallele Gleichungslöser .....	176
5.3	Beispiele zu den Algorithmen und Gleichungslösern .....	184
6.	<b>Lösungsverfahren für zeitabhängige Probleme</b> .....	195
6.1	Integration der Bewegungsgleichungen .....	197
6.1.1	Explizite Verfahren .....	199
6.1.2	Implizite Verfahren .....	201
6.1.3	Impuls-, drall- und energieerhaltende Algorithmen .....	204
6.1.4	Numerische Beispiele .....	209
6.2	Integration inelastischer Materialgleichungen bei kleinen Deformationen .....	212
6.2.1	Viskoelastisches Materialverhalten .....	214
6.2.2	Elasto-plastisches Materialverhalten .....	216
6.2.3	Elasto-viskoplastisches Materialverhalten .....	224

6.3	Integration der Materialgleichungen bei großen Deformationen	225
6.3.1	Allgemeine implizite Integration	226
6.3.2	Implizite Integration mit Bezug auf Hauptachsen	228
6.3.3	Konsistenter Tangentenmodul	233
<b>7.</b>	<b>Stabilitätsprobleme</b>	<b>237</b>
7.1	Vorbemerkungen	237
7.1.1	Klassische und lineare Beulanalyse	238
7.1.2	Nichtlineare Stabilitätsuntersuchungen	240
7.2	Direkte Berechnung von Stabilitätspunkten	243
7.2.1	Formulierung eines erweiterten Systems	244
7.2.2	Berechnung der Richtungsableitung von $K_T$	247
7.2.3	Beispiel: Verzweigungspunkt eines Bogenträgers	250
7.3	Algorithmus für nichtlineare Stabilitätsprobleme	251
<b>8.</b>	<b>Adaptive Verfahren</b>	<b>255</b>
8.1	Randwertproblem und Diskretisierung	261
8.1.1	Randwertproblem für finite Elastizität	262
8.1.2	Das linearisierte Randwertproblem	262
8.1.3	Diskretisierung	263
8.2	Fehlerschätzer und -indikatoren	264
8.2.1	Fehlerschätzung bei nichtlinearen Problemen	265
8.2.2	Residuenbasierter Fehlerschätzer	267
8.2.3	Fehlerindikator basierend auf der $Z^2$ -Methode	269
8.2.4	Fehlerestimatoren basierend auf dualen Methoden	271
8.3	Fehlerschätzung für Plastizität	274
8.4	Netzverfeinerung	276
8.5	Adaptive Netzgenerierung	279
8.5.1	Netzerzeugung	280
8.5.2	Transfer der Geschichtsdaten	282
8.6	Beispiele	285
8.6.1	Kontaktproblem nach Hertz	285
8.6.2	Elastoplastische Deformation einer Zylinderschale	287
<b>9.</b>	<b>Spezielle Strukturelemente</b>	<b>295</b>
9.1	Nichtlineares Fachwerkelement	296
9.1.1	Kinematik und Verzerrungen	296
9.1.2	Materialgleichungen für den Fachwerkstab	298
9.1.3	Variationsformulierung und Linearisierung	299
9.1.4	Finite-Element-Modell	300
9.2	Zweidimensionales geometrisch exaktes Balkenelement	307
9.2.1	Kinematik	308
9.2.2	Schwache Form des Gleichgewichtes	312
9.2.3	Materialgleichungen	313
9.2.4	FE-Formulierung	316

9.2.5	Beispiel	325
9.2.6	Zusammenfassung	327
9.3	Rotationssymmetrisches Schalenelement	328
9.3.1	Kinematik und Verzerrungen der rotationssymmetrischen Schale	328
9.3.2	Variationsformulierung	332
9.3.3	Materialgleichungen	332
9.3.4	Finite-Element-Formulierung	339
9.4	Allgemeine Schalenelemente	345
9.4.1	Vorbemerkungen	345
9.4.2	Kinematik	351
9.4.3	Parametrisierung der Rotationen	354
9.4.4	Schwache Form	357
9.4.5	Materialgleichungen für die Schale	358
9.4.6	Finite-Element-Formulierung für das 5-Parameter Modell	360
9.4.7	Schalenverschneidungen	374
9.5	Beispiele	375
9.5.1	Biegung eines Kragträgers	376
9.5.2	Aufblasvorgang einer quadratischen Platte	376
9.5.3	Zylinder unter Einzellast	378
9.5.4	Abschließende Bemerkungen	379
<b>10.</b>	<b>Spezielle Kontinuumselemente</b>	<b>383</b>
10.1	Anforderungen an Kontinuumselemente	383
10.2	Gemischte Elemente für Inkompressibilität	388
10.2.1	Gemischtes Q1-P0 Element	391
10.2.2	Linearisierung des Q1-P0 Elementes	392
10.3	Stabilisierte finite Elemente	394
10.3.1	Stabilisierungsvektoren	396
10.3.2	Schwache Form und Linearisierung	398
10.4	Enhanced Strain Element	399
10.4.1	Generelle Vorgehensweise, klassische Formulierung	401
10.4.2	Diskretisierung	402
10.4.3	Kombination aus enhanced Formulierung und hourglass Stabilisierung	413
10.4.4	Instabilitäten bei den enhanced Elementen	417
10.4.5	Stabilisierung der enhanced Formulierung	424
10.4.6	Spezielle Interpolation der enhanced Modes	426
<b>11.</b>	<b>Kontaktprobleme</b>	<b>429</b>
11.1	Kontaktkinematik	429
11.2	Konstitutive Gleichungen in der Kontaktzone	433
11.2.1	Normalkontakt	433
11.2.2	Tangentialkontakt	435

11.3 Schwache Formulierung .....	438
11.4 Diskretisierung .....	442
11.4.1 NTS-Diskretisierung .....	443
11.4.2 Matrizenform des Kontaktresiduums .....	446
11.4.3 Integration des Reibgesetzes .....	447
11.4.4 Algorithmen .....	448
11.4.5 Linearisierung des Kontaktresiduums .....	449
<b>A. Tensorrechnung .....</b>	<b>451</b>
A.1 Tensoralgebra .....	451
A.1.1 Definition eines Tensors .....	451
A.1.2 Basisdarstellung von Vektoren und Tensoren .....	452
A.1.3 Produkte von Vektoren und Tensoren .....	454
A.1.4 Spezielle Formen von Tensoren .....	455
A.1.5 Eigenwerte und Invarianten von Tensoren .....	456
A.1.6 Tensoren höherer Stufe .....	458
A.2 Tensoranalysis .....	459
A.2.1 Differentiation nach einer reellen Variablen .....	460
A.2.2 Gradientenbildung eines Feldes .....	460
A.2.3 Divergenzbildung eines Feldes .....	462
A.2.4 Rotation eines Vektorfeldes .....	462
A.2.5 Ableitung der Invarianten nach einem Tensor .....	462
A.2.6 Pull back und push forward Operationen .....	463
A.2.7 Lie-Ableitung von Spannungstensoren .....	464
A.2.8 Integralsätze .....	465
<b>Literatur .....</b>	<b>466</b>
<b>Index .....</b>	<b>491</b>