

Lineare Optimierungsmodelle

Lernziele:

- Kenntnisse über den Aufbau von linearen Optimierungsmodellen
- Verständnis darüber, warum lineare Modelle günstig sind
- Lösungsmethoden für lineare Modelle, insbesondere die Simplex-Methode
- Verständnis über die betriebswirtschaftliche Interpretation
- Grenzen der Sensitivitätsanalyse

Online-Lernmodule:

- Grafische Lösung eines LP
- Der Simplex-Algorithmus
- Ökonomische Interpretation



<http://dsor-lectures.upb.de/>

2.1 Aufbau von linearen Modellen

Die lineare Optimierung (lineare Programmierung, LP) betrachtet Optimierungsmodelle, bei denen sowohl die Zielfunktion als auch alle Restriktionen Linearkombinationen der Variablen darstellen, also keine nichtlinearen Terme wie z. B. x_1^2 oder e^{x_1} oder $x_1 \cdot x_2$ beinhalten.

Lineare Modelle sind vor allem deswegen sehr wichtig, weil es für sie gute Lösungsmethoden und hochentwickelte Standardsoftware gibt. Bis auf wenige Ausnahmen können mit heutigen Optimierungstechnologien alle praxisrelevanten linearen Optimierungsmodelle in vertretbarer Zeit optimal gelöst werden. Dies stimmt hingegen keineswegs für ganzzahlige, gemischt-ganzzahlige oder nichtlineare Modelle.

Ein Optimierungsproblem der linearen Optimierung besteht somit aus den folgenden Komponenten:

- *Entscheidungsvariablen*, die kontinuierliche Werte zwischen gegebenen Schranken annehmen können
- einer zu maximierenden oder zu minimierenden linearen *Zielfunktion*
- linearen *Restriktionen*, die vom Typ \leq , \geq oder $=$ sind

Bevor ein Optimierungsmodell aufgestellt werden kann, müssen diese drei Komponenten genau festgelegt werden.

Entscheidungsvariablen

Die Entscheidungsvariablen entsprechen dem Lösungsraum, sprich Entscheidungsfreiraum in der gegebenen Entscheidungssituation. Aus den im letzten Kapitel geschilderten Beispielen ist ersichtlich, dass Entscheidungsvariablen beispielsweise Produktionsmengen einzelner Produkte oder Varianten, Mengen an Zutaten in Mischungen oder Flächen in der landwirtschaftlichen Produktion darstellen können. Es können auch viele andere Größen sein, die der Entscheidungsträger in eindeutig gegebenen Grenzen frei bestimmen kann. Die Entscheidung sollte aber so getroffen werden, dass sie im Sinne der gegebenen Zielfunktion möglichst optimal ist.

Im Allgemeinen werden diese Variablen durch

$$x_j, \text{ so dass } l_j \leq x_j \leq u_j \text{ für alle } j \in 1, \dots, n \text{ bezeichnet.}$$

Das heißt, es gibt n Variablen, die jeweils eine (reelle) Untergrenze l_j und Obergrenze u_j haben. Die Variablen können auch nach unten oder nach oben unbeschränkt sein. In dem Fall ist die Unter- bzw. Obergrenze gleich $-\infty$ oder $+\infty$.

Zielfunktion

Die optimale Entscheidung ist natürlich von der Zielfunktion abhängig und optimal nur im Hinblick auf die gegebene Zielfunktion. Bei der linearen Optimierung ist die Zielfunktion eine Linearkombination der Variablen und soll entweder minimiert oder maximiert werden. Typische Zielfunktionen sind z. B. Ertrags-, Deckungsbeitrags- oder Gewinnmaximierung, Kostenminimierung, Maximierung des ROI oder des NPV etc.

Oft möchte man in der Praxis mehrere Ziele berücksichtigen, aber die lineare Optimierung erlaubt nur eine Zielfunktion. Dann kann für eine der gewünschten Funktionen die höchste Priorität gesetzt werden, nach der dann optimiert wird, oder es wird eine (Linear-) Kombination mehrerer Zielfunktionen gewählt. Meistens können nicht alle Aspekte in einem formalen Modell dargestellt werden. Somit bietet die optimale Lösung einen Vorschlag, der unter Berücksichtigung weiterer praktischer Aspekte modifiziert werden kann.

Die Zielfunktion wird im Allgemeinen als

$$\text{Minimiere bzw. maximiere } z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

dargestellt.

Restriktionen

Restriktionen können in der linearen Optimierung als Ungleichungen oder Gleichungen dargestellt werden, wobei die linke Seite eine Linearkombination der Entscheidungsvariablen und die rechte Seite eine reelle Konstante ist. Typische Restriktionen sind z. B. Kapazitätsgrenzen in der Produktion, Verfügbarkeit der Rohmaterialien und prognostizierte Absatzmengen. Weiterhin müssen oft logische oder physikalische Gegebenheiten als Restriktionen definiert werden, damit das Modell korrekt arbeitet.

Oft sind für einzelne Variablen Ober- und/oder Untergrenzen gesetzt. Auch diese stellen Restriktionen dar, die den Lösungsraum einschränken. In der Software zur Lösung von LP-Modellen müssen Grenzen für Variablen nicht explizit als Restriktionen definiert werden, sondern sie können bei der Definition der Variablen festgelegt werden.

Die Restriktionen können folgendermaßen dargestellt werden, wenn wir deren Anzahl mit m bezeichnen:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij} \leq \geq = b_i \text{ für alle } i \in \{1, \dots, m\}$$

Somit handelt es sich für jedes i entweder um eine \leq -, \geq -, oder $=$ -Restriktion. In der Matrixnotation kann das allgemeine LP-Modell elegant als

$$\begin{aligned} \text{min oder max } z &= c^T x, \\ \text{so dass } Ax &\leq \geq = b \text{ und } l \leq x \leq u, \end{aligned}$$

dargestellt werden, wobei c, l, u und x n -stellige Spaltenvektoren und b ein m -stelliger Spaltenvektor von reellen Zahlen und c^T die Transpose von c ist. A ist eine $m \times n$ -Matrix der Koeffizienten.

2.2 Grafische Lösung eines 2-dimensionalen LP-Modells

Wenn das lineare Optimierungsmodell nur zwei Variablen beinhaltet, entsprechen die Restriktionen Geraden in der Ebene und definieren somit als zulässigen Bereich einen zweidimensionalen Polyeder (angenommen, der Bereich ist beschränkt). Wenn wir die Variablen auf beide Achsen projizieren, können wir ein zweidimensionales Modell grafisch mit Hilfe einer Zeichnung lösen. Das folgende Beispiel verdeutlicht die grafische Lösung, die mit einer höheren Variablenzahl natürlich nicht möglich ist.

Beispiel: Gürtelproduktion

Ein Unternehmen stellt zwei Gürteltypen A und B mit einem Deckungsbeitrag von 2,00 € bzw. 1,50 € je Stück her. Ein A-Gürtel benötigt doppelt soviel Zeit bei seiner Herstellung wie ein B-Gürtel. Falls nur B-Gürtel produziert würden, könnte das Unternehmen 1000 Stück pro Tag anfertigen. Die Lederbelieferung erlaubt nur die Produktion von 800 Gürtel pro Tag (Typ A und Typ B zusammen). Für A- und B-Gürtel werden verschiedene Gürtelschnallen verwendet. Es stehen täglich 400 Gürtelschnallen vom Typ A und 700 Gürtelschnallen vom Typ B zur Verfügung.

Wie viele Gürtel vom Typ A und vom Typ B müssen produziert werden, um den maximalen gesamten Deckungsbeitrag zu erzielen?

Modellierung als LP-Modell

Entscheidungsvariablen:

x_1 : Anzahl der zu produzierenden Gürtel vom Typ A

x_2 : Anzahl der zu produzierenden Gürtel vom Typ B

Ziel: Maximierung des gesamten Deckungsbeitrags in €, also

$$\text{maximiere } 2x_1 + 1,5x_2$$

Nebenbedingungen (Restriktionen):

Lederbelieferung: $x_1 + x_2 \leq 800$

Gürtelschnallen: $x_1 \leq 400, x_2 \leq 700$

Zeitrestriktion: Ein Gürtel Typ A benötigt 2t Zeiteinheiten pro Stück; ein Gürtel Typ B nur 1t Zeiteinheiten pro Stück, und es stehen nur 1.000t pro Tag zur Verfügung, also

$$x_1(2t) + x_2(1t) \leq 1000t$$

und durch t dividiert ($t > 0$):

$$2x_1 + x_2 \leq 1000$$

Nichtnegativität: $x_1, x_2 \geq 0$ (negative Produktionsmengen ergeben keinen Sinn)

Insgesamt erhalten wir das folgende LP-Modell:

$$\begin{array}{llll} \max & z = & 2x_1 + 1,5x_2 & \\ \text{subject to (s.t.)} & 2x_1 & + x_2 & \leq 1000 \text{ (a)} \\ & x_1 & + x_2 & \leq 800 \text{ (b)} \\ & x_1 & & \leq 400 \text{ (c)} \\ & & x_2 & \leq 700 \text{ (d)} \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \text{ (e)} \end{array}$$

Grafische Lösung:

Ein LP mit 2 Strukturvariablen kann grafisch gelöst werden, wie in den folgenden drei Schritten erläutert wird:

Schritt 1 - Bestimmung des zulässigen Bereichs:

Zeichne die Restriktionsgeraden (= statt \leq oder \geq) des LP-Problems (Koordinaten zweier Punkte auf einer Gerade bestimmen, dann Gerade zeichnen). Diese sind die Randgeraden der durch die Restriktionen dargestellten Halbebenen. Durch Einsetzen der Koordinaten eines nicht auf der Gerade liegenden Punktes in die Restriktionsungleichung wird die Halbebene immer richtig bestimmt. Der *Durchschnitt der Halbebenen* ist der zulässige Bereich.

Für das Beispiel (vgl. Abb. 2.1): Die Gerade zur Restriktion (a) verläuft durch die Punkte (0,1000) und (500,0). Da Punkt (0,0) die Ungleichung (a) erfüllt, wird diese durch die Halbebene unterhalb der Gerade dargestellt.

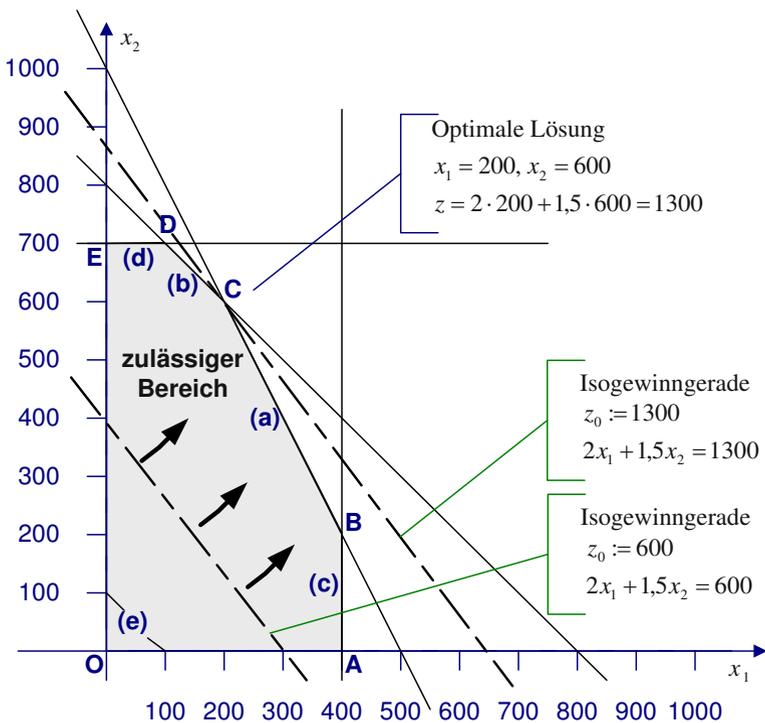


Abb. 2.1. Grafische Lösung von 2-dimensionalen LP-Modellen

Schritt 2: Richtung der Zielfunktion bestimmen

Lösungen gleichen Wertes liegen auf sogenannten Isogewinn-Hyper-ebenen (im 2-dimensionalen Fall auf Isogewinngeraden). Setze den Zielfunktionswert auf eine Konstante $z = z_0$ und zeichne die so de-

finierte Isogewinngerade. Für das Beispiel kann man z. B. $z_0 = 600$ wählen und die Isogewinngerade $2x_1 + 1,5x_2 = 600$ zeichnen.

Schritt 3: Optimum bestimmen

Verschiebe die Isogewinngerade parallel bis zu einer optimalen Ecke (falls existent). Für das Beispiel wird die Isogewinngerade parallel nach oben bewegt, bis die optimale Ecke C mit $x_1 = 200; x_2 = 600$ erreicht ist. Der optimale Zielfunktionswert lautet dann: $z = 2 * 200 + 1,5 * 600 = 1300$.

2.3 Eigenschaften des zulässigen Bereichs

Ein Bereich $S \subseteq R^n$ heißt konvex, falls für jede zwei Punkte $X, Y \in S$ alle Punkte auf der geradlinigen Verbindung *zwischen X und Y* auch in S liegen (vgl. Abb. 2.2).

Im Allgemeinen ist der zulässige Bereich eines LP-Problems mit n Variablen konvex (nicht vom Typ 6 oder 7) und „linear bzw. geradlinig abgegrenzt“ (auch nicht vom Typ 4 oder 5).

Falls der zulässige Bereich *beschränkt* (von allen Richtungen eingegrenzt) ist (Typ 1, nicht Typ 2 oder 3), heißt er *konvexer Polyeder*, der durch die Ecken des zulässigen Bereichs *aufgespannt* wird.

Im Beispiel (Abb. 2.1) wird der zulässige Bereich durch die Verbindungsstrecken OA, AB, BC, CD, DE und EO eingegrenzt und ist somit der durch O, A, B, C, D und E aufgespannte konvexe Polyeder.

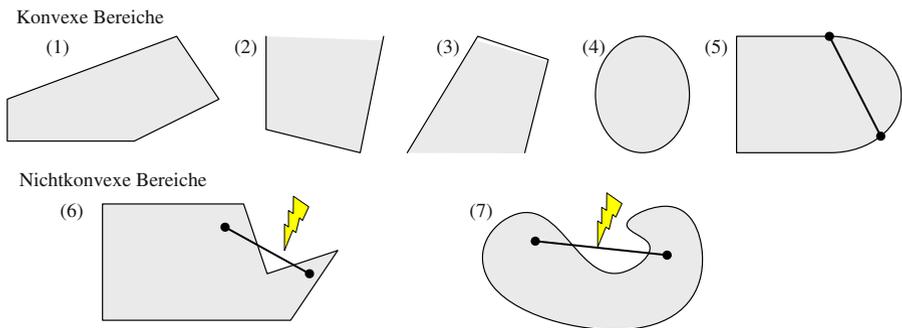


Abb. 2.2. Konvexe und nichtkonvexe Bereiche

Es ist nicht immer der Fall, dass ein LP-Modell eine eindeutige optimale Lösung besitzt. Im Folgenden werden einige andere Fälle kurz beschrieben. Diese Fälle kommen keineswegs selten vor; viele in der Praxis aufgestellte Modelle gehören zu den folgenden Kategorien.

Modelle ohne zulässige Lösungen

Falls die Schnittmenge der durch die Restriktionen dargestellten Halbebenen leer ist, ist der zulässige Bereich leer und das LP-Problem besitzt keine zulässige (und insbesondere keine optimale) Lösung. Zu betrachten ist beispielsweise das folgende Modell:

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 \leq 8 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ & 2x_1 + x_2 \geq 18 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Unbeschränkte Modelle

Wenn bei der grafischen Lösung die Isogewinngerade unendlich weit verschoben werden kann, so dass die Lösung sich dabei grenzenlos verbessert, dann ist das LP-Modell unbeschränkt (d. h. es gibt keine endliche Optimallösung des LP-Modells). Z. B. kann die Isogewinngerade bei einer entsprechenden Zielfunktion und einem zulässigen Bereich der Form (2) von Abb. 2.2 unendlich nach oben verschoben werden.

Bei einem unbeschränkten zulässigen Bereich kann das LP-Modell trotzdem beschränkt sein. Z. B. kann die Isogewinngerade bei einer entsprechenden Zielfunktion und einem unbeschränkten zulässigen Bereich der Form (3), Abb. 2.2, endlich nach oben zu einer der obigen zwei Ecken optimal verschoben werden.



Welcher Art ist das folgende Modell?

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.} & -x_1 + x_2 \leq 4 \\ & -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Mehrdeutige Optimallösungen

Falls bei der grafischen Lösung die Isogewinngerade am Ende des Verschiebeprozesses auf einer Verbindungsstrecke zwischen zwei Ecken liegt, so besitzt das LP-Modell unendlich viele gleichwertige optimale Lösungen (mehrdeutige Optimallösung). Die Isogewinngerade läuft somit parallel zu einer Restriktion.

Degenerierte Optimallösungen

Man kann beweisen, dass eine optimale Lösung eines LP-Modells (falls es eine gibt) immer eine Ecke des zulässigen Bereichs liegt. In Abb. 2.1 liegt das

Optimum in der Ecke C, die durch die Zeit- und Leder-Restriktionen definiert wird. Im zweidimensionalen Raum braucht man zwei sich kreuzende Geraden, um einen Punkt eindeutig zu definieren. Wenn die Ecke C aber (zufällig) noch durch eine weitere Gerade gekreuzt wird, hat man redundante Informationen zur Bestimmung der optimalen Lösung. Man kann beliebige zwei Geraden zur Bestimmung des Optimums auswählen. In einem solchen Fall ist die Lösung degeneriert (entartet). Analog gilt die Charakterisierung für degenerierte Lösungen mit Ebenen im dreidimensionalen Raum und Hyperebenen im n -dimensionalen Raum ($n \geq 4$).

Anmerkung: Minimierung oder Maximierung?

Durch Multiplizieren der Zielfunktion mit (-1) kann ein Maximierungsproblem zu einem Minimierungsproblem umgewandelt werden und umgekehrt. Das Multiplizieren einer \leq -Restriktion (beide Seiten) mit (-1) ergibt eine dazu äquivalente \geq -Restriktion und umgekehrt.

Anmerkung: Freie Variablen

Bei LP-Modellen werden Variablen im Allgemeinen als nichtnegativ vorausgesetzt. Daher muss die Nichtnegativitätsbedingung bei den meisten Softwarepaketen zur Lösung von LPs nicht explizit eingegeben werden.

Wenn eine Variable aber alle reellen Werte annehmen kann (auch negative), dann muss sie gesondert als *freie Variable* vereinbart werden. Falls es eine solche Deklarationsmöglichkeit nicht gibt, behilft man sich mit der Ersetzung einer solchen Variable x durch $(x^+ - x^-)$ im gesamten LP, wobei die neuen Variablen $x^+, x^- \geq 0$ sind.

 Lösen Sie das folgende LP-Problem grafisch. Dann transformieren Sie dieses LP zu einem LP mit nur nichtnegativen Variablen (x_2 sei eine freie Variable.)

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 - x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 - x_2 \geq 0 \\ & x_1 \geq 0 \end{aligned}$$

2.4 LP-Modelle mit spezieller Struktur

Minimierungsmodelle

Gegenstand des obigen Gürtelbeispiels war die optimale Produktionsplanung in einer gegebenen Periode, wenn der Ressourcenbedarf und die Deckungsbeiträge einzelner Produkte gegeben sind. Es handelt sich somit um ein typisches

LP-Modell, wobei die Zielfunktion unter Berücksichtigung von Ressourcenrestriktionen maximiert werden soll. Alternativ lassen sich viele Aufgabenstellungen naturgemäß als Minimierungsmodelle darstellen. Beispielsweise sollen oft in Mischungsproblemen mindestens gegebene Mengen von Mischungen hergestellt werden, die bestimmte Mindestanforderungen erfüllen.

Das folgende Beispiel stellt ein typisches kleines Mischungsproblem dar.

Beispiel: Mischungsproblem

Ein Biobauer braucht täglich mindestens 800 kg Spezialfutter für Tiere. Dabei handelt es sich um eine Mischung von Mais und Sojamehl mit den folgenden Eigenschaften:

Mais: 0,09 kg Protein und 0,02 kg Ballaststoffe per kg Futter
 Sojamehl: 0,60 kg Protein und 0,06 kg Ballaststoffe per kg Futter.

Laut Bestimmungen muss die Mischung mindestens 30% Protein und höchstens 5% Ballaststoffe beinhalten. Unter Beibehaltung der Bestimmungen sollen die täglichen Futterkosten minimiert werden. Ein Kilo Mais kostet 0,30 € und ein Kilo Sojamehl 0,90 €.

Diese Situation wird als eine Optimierungsaufgabe betrachtet. Zuerst müssen die Entscheidungsvariablen definiert werden. Offensichtlich kann der Biobauer die Anteile von Mais und Soja im Tierfutter bestimmen; also sind diese seine Entscheidungsvariablen:

x_M für die Menge von Mais im Futter (in kg), und
 x_S für die Menge von Soja im Futter (in kg).

Als Parameter des Problems sind die Protein- und Ballaststoffanteile der Zutaten sowie die gewünschten Anteile in der Mischung, die Einkaufspreise und die geforderte Menge an Futter gegeben. Die Gesamtkosten sollen unter Berücksichtigung aller Restriktionen minimiert werden.

Somit lautet die Zielfunktion:

Minimiere $z = 0,3 x_M + 0,9 x_S$,

und die Restriktionen:

Futtermengen	$x_M + x_S \geq 800$
Proteinmengen	$0,09 x_M + 0,60 x_S \geq 0,30(x_M + x_S)$
Ballaststoffmengen	$0,02 x_M + 0,06 x_S \leq 0,05(x_M + x_S)$
Nichtnegativität	$x_M, x_S \geq 0$

Nach einer Umformung bekommt man die folgende Formulierung als LP:

$$\text{Min } z = 0,3 x_M + 0,9 x_S,$$

subject to

$$\begin{aligned} x_M + x_S &\geq 800 \\ -0,21 x_M + 0,30 x_S &\geq 0 \\ -0,03 x_M + 0,01 x_S &\leq 0 \\ x_M, x_S &\geq 0 \end{aligned}$$

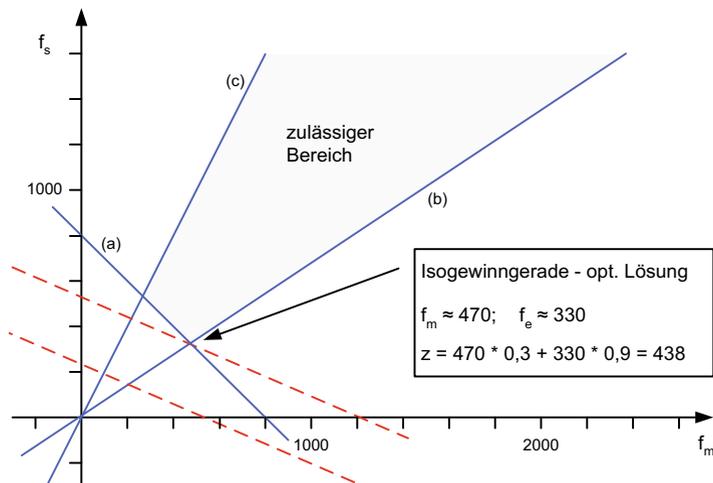


Abb. 2.3. Lösung zum Beispiel Tierfutter

Abb. 2.3 zeigt eine grafische Lösung des Modells: Es ist empfehlenswert, ca. 470 kg Mais und 330 kg Soja zu Spezialfutter zu mischen, was zu minimalen Kosten von ca. 440€ für den Biobauer führt.

Durch die Lösung mit dem Softwarepaket ClipMOPS (s. Kapitel 3) bekommt man die exakten Werte: Es sollten 470,59 kg Mais und 329,41 kg Soja zu Spezialfutter gemischt werden. Dies führt zu minimalen Kosten von 437,65€ für den Biobauer.

Produktionsplanungsmodelle

In den bisherigen Modellen ist keine spezielle interne Struktur innerhalb der Koeffizientenmatrix zu erkennen. In der Praxis werden LP-Modelle dagegen fast immer für bestimmte strukturierte Aufgaben gestellt. Beispielsweise geht es um mehrere Produkte oder Produktgruppen, mehrere Zeitperioden, mehrere Produktionsstätten, Zulieferer, Warengruppen etc. Es passiert oft, dass sich bestimmte Teile eines Modells in der Struktur wiederholen, aber durch einige Restriktionen oder Variablen zusammengebunden sind. Wenn es keine verbindende Restriktionen oder Variablen gibt, können die einzelnen Teilmodelle natürlich auch unabhängig voneinander gelöst werden.

Mehrere Produktionsstätten

Es wird angenommen, dass die Gürtelproduktion nicht nur an einer Produktlinie, sondern an mehreren Linien stattfindet, die unterschiedliche Parameter bezüglich des Ressourceneinsatzes besitzen können. Im Optimierungsmodell

geht es um die optimale Allokation von Ressourcen und Produktionsmengen zwischen gegebenen Produktionsstätten.

Natürlicherweise besitzt ein Modell mit mehreren Produktionsstätten oder -linien eine Blockstruktur (s. Abb. 2.4). Die Abbildung illustriert die Struktur der Koeffizientenmatrix durch die Teilmatrizen A_0 bis B_n und die rechte Seite durch die Teilvektoren b_0 bis b_n . Jede B-Teilmatrix entspricht einer Produktionsstätte. Die A-Teilmatrizen beinhalten die Restriktionen, die alle Produktionsstätten betreffen. Die leeren Teile der Koeffizientenmatrix bestehen aus Nullen. Es ist typisch für Praxisprobleme der linearen Optimierung, dass die Koeffizientenmatrix sehr viele Nullen besitzt. Diese Eigenschaft kann man bei den Lösungsalgorithmen nutzen, um Rechenaufwand und Speicherplatz zu sparen - die Nullen werden gar nicht mitgespeichert.

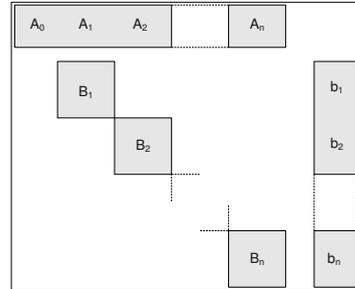


Abb. 2.4. Struktur eines Optimierungsmodells mit mehreren Produktionsstätten [Williams 1999]

Mehrere Perioden

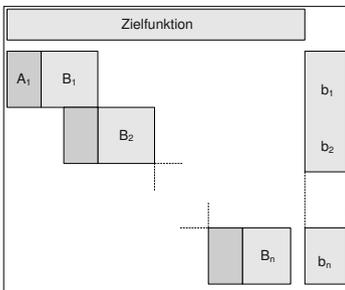


Abb. 2.5. Struktur eines mehrperiodischen Optimierungsmodells [Williams 1999]

Das ursprüngliche Gürtelmodell betrachtete die Produktion in einer vorher festgelegten Zeitperiode. In der Praxis wird der Produktionsbetrieb (und viele andere Aktivitäten) normalerweise für ein längeres Zeitintervall in vielen kurzen Perioden geplant. Z. B. kann es eine Jahres- Monats- und Wochenplanung geben. Analog werden Optimierungsmodelle mit unterschiedlichen Zeithorizonten und Genauigkeiten gelöst: Für mehrere Jahre wird auf Monatebene eine Grobplanung durchgeführt, die durch Wochen- und Tagesmodelle verfeinert wird. Die in der nahen Zukunft liegenden Zeitintervalle werden in der Regel genau geplant; für weitere Intervalle wird zunächst ein grobes Planungsmodell genutzt (im Sinne einer rollierenden Planung).

Ein mehrperiodisches lineares Optimierungsmodell besitzt natürlicherweise eine treppenartige Struktur (vgl. Abb. 2.5): Die Teilmatrizen A_i und B_i in der Abbildung berücksichtigen jeweils eine gegebene Periode. Zwei hintereinanderfolgende Perioden sind jedoch über gemeinsame Variablen verbunden,

die den Übergang von einer Periode in die nächste beinhalten und eine Art Lagerhaltung darstellen. Wenn es keine Lagerhaltung (also Verbindung zwischen hintereinander liegenden Perioden) gäbe, könnte für jede Periode ein eigenständiges Optimierungsmodell getrennt gelöst werden.

2.5 Lösungsverfahren für lineare Optimierungsmodelle

Nachdem ein lineares Optimierungsmodell korrekt aufgestellt worden ist, sind wir vor allem an dessen Lösung interessiert. Erst wenn eine optimale Lösung bekannt ist, können die Ergebnisse als Hilfestellung zur Entscheidungsunterstützung genutzt werden.

In einem LP-Modell handelt es sich um ein System von Gleichungen und Ungleichungen, das mehrere gültige Lösungen besitzt. Eine zulässige Lösung dieses Systems ist eine Wertekombination der Entscheidungsvariablen, die alle gegebenen Restriktionen erfüllt. Das besondere bei LP-Modellen ist, dass sie fast immer unendlich viele zulässige Lösungen besitzen. Die Restriktionen lassen somit Freiräume zur Auswahl einer gewünschten Lösung. Es gilt nun, nach einer Lösung zu suchen, die im Sinne der gegebenen Zielfunktion optimal ist. Dem Leser wird empfohlen, sich zuerst Gedanken darüber zu machen, wie man zu einer optimalen Lösung kommen könnte, wenn es mehr als zwei Variablen gibt. Oft lautet die erste Überlegung, zuerst diejenige Variable möglichst weit zu erhöhen, die den höchsten Zielfunktionswert (bei Maximierungsproblemen) hat, dann die nächste und so weiter. Beispielsweise hat x_1 in unserem Gürtelbeispiel den höchsten Zielfunktionswert, nämlich 2. Jedoch zeigt schon das kleine Beispiel, dass wir in dieser sequentiellen Weise nicht die optimale Lösung finden (bitte probieren!).

In der linearen Optimierung müssen die Werte von Entscheidungsvariablen einer optimalen Lösung *simultan*, nicht sequentiell bestimmt werden. Lineare Optimierungsmodelle wurden erstmalig kurz vor dem zweiten Weltkrieg und während diesem aufgestellt. Die ersten Ergebnisse von L. V. Kantorovich in der Sowjetunion im Jahr 1939 fanden jedoch im Westen kaum Beachtung, bevor eine durchgängige Theorie inklusive Lösungsmethoden ein bis zwei Jahrzehnte später entwickelt wurde. Im Jahr 1947 zeigte T. C. Koopmans, wie klassische ökonomische Theorien als LP-Modelle dargestellt werden können. Im Jahr 1975 bekamen Kantorovich und Koopmans den Nobel-Preis für Wirtschaftswissenschaften für ihre Beiträge zur Theorie der optimalen Ressourcenallokation.

Die Simplex-Methode

Das älteste und bekannteste Lösungsverfahren für LP ist die Simplex-Methode, die von George B. Dantzig im Jahr 1947 zur Lösung von Planungsproblemen bei der U. S. Air Force vorgestellt wurde. Es wurde schnell klar, dass mit

dieser Methode eine erstaunlich große Breite an Modellen von scheinbar weit auseinander liegenden Anwendungsgebieten gelöst werden konnten.

Die Simplex-Methode besteht grundsätzlich aus zwei Phasen: In Phase I wird zunächst nach einer zulässigen Lösung gesucht. Auch dies kann ein schwieriges Problem werden, wenn keine unmittelbar klare zulässige Lösung gegeben ist. In Phase II wird dann, ausgehend von einer zulässigen Lösung, durch iterative Verbesserungen nach einer optimalen Lösung gesucht. Die Suche besteht aus mehreren möglichen Lösungen, so dass eine betrachtete Lösung immer besser (oder zumindest nicht schlechter) als ihr Vorgänger ist. Man kann beweisen, dass die Simplex-Methode unter relativ allgemeinen Bedingungen gegen eine optimale Lösung konvergiert. Der grundsätzliche Ablauf der Methode wird im nächsten Abschnitt vorgestellt.

Die Anwendbarkeit der Simplex-Methode ist in den ca. letzten 50 Jahren parallel mit der Entwicklung der Computertechnologie gestiegen. In den 70er Jahren konnten Modelle mit bis zu einigen tausend Variablen und Restriktionen durch geschickte Nutzung der damaligen limitierten Rechenressourcen gelöst werden. Beispielsweise konnten nicht alle Daten und Zwischenergebnisse im Hauptspeicher eines Computers gehalten werden, sondern mussten durch aufwendige Auslagerungsmechanismen auf der Festplatte zwischengelagert werden. In den 70er Jahren waren 32 kB auf Workstations eine gängige Hauptspeichergroße, während wir heute selbst auf Notebook-Rechnern oft 4 GB oder mehr vorfinden. Nachdem mehr Speicher und leistungsfähigere Prozessoren verfügbar wurden, konnten immer schnellere und stabilere Simplex-basierte LP-Solver (Softwarepakete für lineare Optimierung) entwickelt werden.

Innere-Punkte-Verfahren

In vielen Experimenten und Praxisprojekten stellte sich heraus, dass das Laufzeitverhalten der Simplex-Methode für viele Praxismodelle relativ gut ist, aber aus der theoretischen Sicht im schlechtesten Fall sehr schlecht (exponentiell im Hinblick auf die Problemgröße) sein kann.

Ein großer Fortschritt bei der theoretischen Lösung von linearen Optimierungsmodellen war die Erfindung der Ellipsoidmethode vom russischen Mathematiker L. G. Khachian 1979. Die Laufzeit dieser Methode wächst nur polynomiell in Relation zur Problemgröße; somit handelt es sich grundsätzlich um ein effizientes Lösungsverfahren. Allerdings ist die Laufzeit der Ellipsoidmethode für praktische Modelle extrem lang, so dass die polynomiellen, sogenannten Innere-Punkte-Verfahren jahrelang dem Status der Simplex-Methode als den am meisten verbreiteten Lösungsansatz nicht in Frage stellen konnten. Diese Methodenklasse hat ihren Namen bekommen, weil sie sich im Gegensatz zum Simplex nicht auf der Oberfläche des zulässigen Bereiches bewegen, sondern innere Punkte berücksichtigt.

Im Jahr 1984 veröffentlichte N. Karmarkar (Forscher bei Bell Labs in den USA) ein effizienteres polynomielles Innere-Punkte-Verfahren, das die Grundlage für weitere Entwicklungen bildete. Heute können Innere-Punkte-Verfahren in den meisten Fällen LP schneller lösen als die Simplex-Methode. Es gibt allerdings nicht die eine beste Methode; für viele Modelle sind Varianten der Simplex-Methode am schnellsten. Es gibt viele Gründe, warum ein effizienter LP-Solver beide Methodenklassen beinhalten muss.

2.6 Das Simplex-Verfahren zur Lösung von LP-Modellen

2.6.1 Grundidee und Standardformat



Abb. 2.6. Carl Friedrich Gauss 1777-1855

Man kann beweisen, dass, falls ein LP-Modell genau eine optimale Lösung besitzt, sich diese in einer Ecke des zulässigen Polyeders befindet. Beispielsweise befindet sich die optimale Lösung des Gürtelmodells in der Ecke C (s. Abb. 2.1). Wenn es hingegen mehrere optimale Lösungen gibt, befindet sich mindestens eine von diesen in einer Ecke. Was eine Ecke eines mehr-dimensionalen Polyeders ist, versuchen wir uns an dieser Stelle intuitiv vorzustellen. Eine Definition erfolgt später.

Die Idee der Simplex-Methode ist es, benachbarte Ecken hintereinander zu untersuchen, so dass die Lösung, also der jeweilige Zielfunktionswert, sich bei jeder Bewegung in eine benachbarte Ecke verbessert – oder zumindest nicht verschlechtert – bis ein Optimum gefunden wird.

Eine wichtige Technik bei der Bewegung von einer Ecke zu einer benachbarten ist die Manipulation linearer Gleichungssysteme durch die Gauss'sche Elimination (Gauss: s. Abb. 2.6). Daher wird das zu lösende LP-Modell zunächst in eine Form gebracht, die nur lineare Gleichungen (also keine Ungleichungen) besitzt. Die Formeln (LGS) zeigen die Struktur eines linearen Gleichungssystems, das auf der linken Seite k Variablen und m Restriktionen besitzt.

$$\begin{array}{l}
 \hline
 a_{11}x_{11} + a_{12}x_{12} + a_{13}x_{13} + \dots + a_{1k}x_{1k} = b_1 \\
 a_{21}x_{21} + a_{22}x_{22} + a_{23}x_{23} + \dots + a_{2k}x_{2k} = b_2 \\
 \dots \quad \dots \quad \dots \\
 a_{m1}x_{m1} + a_{m2}x_{m2} + a_{m3}x_{m3} + \dots + a_{mk}x_{mk} = b_m \\
 \hline
 \end{array} \quad \text{(LGS)}$$

Wenn $k > m$ gilt, hat das Gleichungssystem mehr Spalten auf der linken Seite als Zeilen. Somit ist das System unterdeterminiert, d. h. es hat i. d. R. mehr als eine mögliche Lösung (also Wertekombination der x -Variablen). Wenn $k = m$ gilt und die Spaltenvektoren linear unabhängig sind, hat das Gleichungssystem dagegen genau eine eindeutige Lösung. In Vorbereitung auf die Nutzung der Simplex-Methode wird die Koeffizientenmatrix A in das sogenannte Standardformat transformiert, wobei nur Gleichungen zugelassen sind (s. oben) und mehr Spalten als Zeilen vorhanden sind. Das Prinzip der Simplex-Methode ist es nun, aus dieser Koeffizientenmatrix m Spaltenvektoren auszuwählen, mit deren Hilfe die verbleibenden $k - m$ Spaltenvektoren ausgedrückt werden können. Die Bewegung von einer Ecke in eine benachbarte Ecke entspricht nun einem Tausch, wobei genau ein Spaltenvektor aus den gewählten m gegen einen anderen ausgetauscht wird. Im Folgenden wird der Ablauf dieser Methode zuerst algebraisch anhand unseres Beispiels vorgestellt. Im darauffolgenden Abschnitt 2.7 erfolgt die grafische Veranschaulichung.

Transformation eines beliebigen LP in das LP-Standardformat

Als Vorbereitung zum Simplex-Verfahren werden einige Transformationen eines gegebenen LP-Modells gezeigt, um ein einheitliches Format für LP-Modelle, das sogenannte Standardformat, zu erhalten.

Im Standardformat handelt es sich immer (in unserer Definition) um ein Maximierungsproblem. Es gibt keine Ungleichungen mehr, sondern nur Gleichungen. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass sich jedes LP-Modell mit relativ wenig Aufwand in diese Form bringen lässt.

$$\begin{array}{ll} \text{Gleichung} & \rightarrow \text{2 Ungleichungen} \\ 2x_1 + x_2 = 7 & \rightarrow 2x_1 + x_2 \leq 7 \text{ und } 2x_1 + x_2 \geq 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \geq\text{-Ungleichung} & \rightarrow \leq\text{-Ungleichung (optional)} \\ 2x_1 + x_2 \geq 7 & \rightarrow -2x_1 - x_2 \leq -7 \end{array}$$

$$\text{Min-Zielfunktion} \rightarrow \text{Max-Zielfunktion}$$

$$\min 3x_1 - 4x_2 \quad \rightarrow \quad \max -3x_1 + 4x_2$$

$$\begin{array}{ll} \text{Ungleichung} & \rightarrow \text{Gleichung mit Schlupfvariable} \\ 2x_1 + x_2 \leq 7 & \rightarrow 2x_1 + x_2 + x_3 = 7 \text{ mit } x_3 \geq 0 \\ 2x_1 + x_2 \geq 7 & \rightarrow -2x_1 - x_2 - x_4 = -7 \text{ oder} \\ 2x_1 + x_2 \geq 7 & \rightarrow 2x_1 + x_2 - x_4 = 7 \text{ mit } x_4 \geq 0 \text{ Schlupfvariable} \end{array}$$

Eine nichtnegative Schlupfvariable (englisch: slack variable), die für eine Ungleichung eingeführt wird, stellt die absolute Differenz zwischen der linken und der rechten Seite dieser Ungleichung dar. Wendet man diese Transformationen auf das Beispiel in 2.2 an, kann es in das Standardformat überführt werden:

$$\begin{aligned}
 \max z &= 2x_1 + 1,5x_2 \\
 \text{s.t.} \quad &2x_1 + x_2 + x_3 = 1000 \\
 &x_1 + x_2 + x_4 = 800 \\
 &x_1 + x_5 = 400 \\
 &x_2 + x_6 = 700 \\
 &x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
 \end{aligned}$$

Schlupfvariablen sind hier x_3, x_4, x_5 und x_6 !

Jedes LP-Modell lässt sich in diesem Standardformat ausdrücken. Für ein Problem mit n Variablen und m Restriktionen werden dabei m Schlupfvariablen eingeführt, so dass das Gesamtmodell $n + m$ Variablen beinhaltet. Allgemein lautet das Modell dann:

$ \begin{aligned} \max \quad &\sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.t.} \quad &\sum_{j=1}^{m+n} a_{ij} x_j = b_i \text{ für alle } i = 1, \dots, m \\ &x_j \geq 0 \text{ für alle } j = 1, \dots, m+n \end{aligned} $	Oder in Matrix-Schreibweise: $ \begin{aligned} \max \quad &c^T x \\ \text{s.t.} \quad &Ax = b \\ &x \geq 0 \end{aligned} $
---	---

Die Vektoren c bzw. x sind $(n + m)$ -(Spalten)-Vektoren, wobei c m Nullen für die m Schlupfvariablen x_{n+1}, \dots, x_{n+m} beinhaltet und transponiert (c^T) ist, also als Zeilenvektor betrachtet wird. b ist ein m -Vektor. A ist eine $m \times (n+m)$ -Matrix, die durch Anhängen einer $m \times m$ -Matrix an die ursprüngliche $m \times n$ -Matrix entsteht. Die $m \times m$ -Matrix für die Schlupfvariablen hat nur -1 und 1 auf der Diagonalen, alle anderen Einträge sind Null. Es wurde (eigentlich willkürlich) ein Maximierungsproblem definiert. Die Zielfunktion kann mit (-1) multipliziert in ein Minimierungsproblem transformiert werden.

Basis eines LP-Modells

Jede nichtsinguläre $m \times m$ -Teilmatrix B von A heißt *Basis* des Standardmodells. Nichtsingularität von B bedeutet, dass die m -dimensionalen Spaltenvektoren von B linear unabhängig sind, sich also kein Spaltenvektor als Linearkombination der anderen ausdrücken lässt.

Aus dem obigen Beispiel im Standardformat ergibt sich folgendes Beispiel für B (siehe Abb. 2.7).

In diesem Fall ist die Teilmatrix B gleich der $m \times m$ -dimensionalen Einheitsmatrix. Wir können das Gleichungssystem nach den in B enthaltenen Spaltenvariablen in einfacher Weise wie folgt auflösen:

$$\begin{aligned}
 x_3 &= 1000 - 2x_1 - x_2 \\
 \text{(S1)} \quad x_4 &= 800 - x_1 - x_2 \\
 x_5 &= 400 - x_1 \\
 x_6 &= 700 - x_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{A} \quad \left[\begin{array}{cccc}
 2x_1 + x_2 + x_3 & & & \\
 x_1 + x_2 & + x_4 & & \\
 x_1 & & + x_5 & \\
 x_2 & & & + x_6
 \end{array} \right] = \begin{array}{l} 1000 \\ 800 \\ 400 \\ 700 \end{array} \\
 \text{B}
 \end{array}$$

Abb. 2.7. Basis für das Beispiel

Die Gleichungen des Standardformats eines LP können also so umgeformt werden, dass sich alle Schlupfvariablen auf der linken Seite befinden. Eine Lösung des Gleichungssystems lässt sich dabei direkt ermitteln, nämlich $x_1 = x_2 = 0, x_3 = 1000, x_4 = 800, x_5 = 400$ und $x_6 = 700$. Diese Lösung wird eindeutig, nachdem alle nicht in B enthaltenden Spaltenvariablen auf 0 gesetzt werden (hier $x_1 = x_2 = 0$).

Diese Vorgehensweise ist für jede nichtsinguläre $m \times m$ -Teilmatrix B anwendbar, denn nachdem man die nicht in B enthaltenen Spaltenvariablen auf 0 gesetzt hat, verbleibt ein $m \times m$ -Gleichungssystem, das für eine nichtsinguläre Matrix (B) eindeutig gelöst werden kann (unter Benutzung der Inversen von B - die Determinante der Matrix B ist ja ungleich Null, da die Spaltenvektoren von B linear unabhängig sind).

Basisvariablen und Nichtbasisvariablen

Die durch die Spalten der Matrix B (Basis) definierten Variablen m aus $(n+m)$ heißen Basisvariablen (BV), die restlichen n Variablen Nichtbasisvariablen (NBV).

Basislösung

Die durch Setzen der Nichtbasisvariablen auf 0 erhaltene eindeutige Lösung für eine Basis B (siehe oben) heißt Basislösung. Eine Basislösung ist

- zulässig, falls alle Basisvariablen bei der Basislösung nichtnegative Werte annehmen, sonst unzulässig und
- degeneriert, falls mindestens eine der Basisvariablen in der Basislösung gleich Null ist.

Beim Simplex-Verfahren startet man mit der Basis B, bei der die Schlupfvariablen als Basisvariablen gewählt werden (wie im Beispiel oben). Diese Basis nennt man Ausgangsbasis und die wie oben erhaltene Basislösung (alle Strukturvariablen auf Null) Ausgangsbasislösung. Falls diese Ausgangsbasislösung zulässig ist, geht man gleich zur Phase II von Simplex über, ansonsten zur Phase I, um eine zulässige Basislösung, falls vorhanden, zu berechnen.

Bemerkung: Als „Basis“ wird in der linearen Algebra eine Zusammenstellung von linear unabhängigen Vektoren im euklidischen Raum bezeichnet, deren Anzahl gleich der Dimension des Vektorraumes ist. Also ist die obige Bezeichnung „Basis“ für B bezüglich des durch die Basisvariablen definierten m -dimensionalen Vektorraums zu verstehen, nicht etwa bezüglich des durch die Strukturvariablen definierten n -dimensionalen Raums.

2.6.2 Schritte des Simplex-Verfahrens

In diesem Abschnitt werden die Schritte des Simplex-Verfahrens mit Hilfe des in 2.2 eingeführten Beispiels eingehend erläutert. Es handelt sich um eine (einfache) Basisform des Simplex-Algorithmus für den Fall, dass die Untergrenzen aller Variablen gleich 0 und die Obergrenzen gleich $+\infty$ sind. Im allgemeinen Fall können explizite Ober- und Untergrenzen direkt im Algorithmus berücksichtigt werden. Computerimplementationen des Verfahrens beinhalten darüber hinaus sehr viele Verfeinerungen, welche die Lösung großer, numerisch schwieriger Modelle mit heutigen Rechnern möglich machen. Dazu mehr im nachfolgenden Kapitel.

Initialisierung:

Man bildet zunächst das Standardformat eines LP-Modells wie in 2.6 und formt es dann in (S1) wie in 2.6.1 um, indem die Schlupfvariablen (aktuelle Basisvariablen) links stehen. Dabei wird als Ausgangsbasis die sogenannte *all-logical basis* gewählt, wobei zunächst die Schlupfvariablen in die Basis gewählt werden. Im Allgemeinen wird auch für eine $=$ -Restriktion eine sogenannte künstliche Variable eingeführt. Schlupfvariablen und künstliche Variablen werden gemeinsam auch logische Variablen genannt. Daher die Bezeichnung „all-logical basis“. Für das Beispiel sieht sie wie folgt aus:

Ausgangsbasis: Nichtbasisvariablen $x_1, x_2 \Rightarrow$ Basisvariablen x_3, x_4, x_5, x_6
(Ausgangs-)Basislösung: 0 0 1000 800 400 700

Wenn alle konstanten Werte der rechten Seite von (S1) nichtnegativ sind (wie im Beispiel), ist dies eine zulässige Lösung, ansonsten muss erst mit der Suche nach einer zulässigen Lösung begonnen werden (Phase I des Simplex-Verfahrens, vgl. 2.6.3).

Grafisch: Man beginnt mit der (trivialen) Ecke $O = (0,0)$ des zulässigen Bereichs. O ist der Durchschnitt der x_1 - und x_2 -Geraden, also hat die zugehörige Basis x_1 und x_2 als NBV (vgl. Abb. 2.1).

Iteration 1

Basisvariablen mit Hilfe der Nichtbasisvariablen darstellen: Weil die Nichtbasisvariablen immer gleich 0 sind, können die Werte der Basisvariablen direkt

abgelesen werden. Die Zielfunktion z wird dabei in einer eigenen Zeile stets wie eine Basisvariable behandelt.

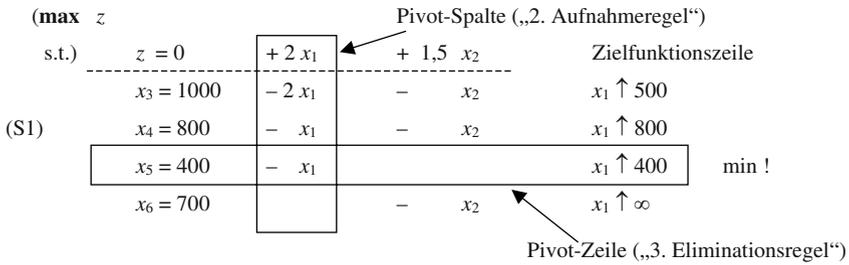


Abb. 2.8. Iteration 1

Aufnahmeregel: Nichtbasisvariablen werden gesucht, die den Zielfunktionswert verbessern. Eine solche Variable, Pivotvariable genannt, wird ausgewählt und in die Basis aufgenommen. Indikator für mögliche Pivotvariablen ist ein positiver Koeffizient in der (modifizierten) Zielfunktion. Alle solche Variablen erhöhen i.d.R. den Zielfunktionswert. Eine mögliche Auswahlstrategie ist, als Pivotvariable diejenige zu wählen, die den höchsten positiven Koeffizienten hat. In unserem Fall ist dies x_1 (da $2 > 1,5$). Damit ist die Pivot-Spalte für Iteration 1 bestimmt (im angegebenen Gleichungssystem (S1)(siehe Abb. 2.8) umrahmt).

Eliminationsregel: Wenn der Wert der Pivotvariablen erhöht wird, ändern sich die Werte der anderen Variablen. Eine bereits zulässige Variable darf dabei nicht unzulässig werden. Der Wert der neuen Basisvariable (Pivotvariable) wird also nur soviel geändert, bis die erste Basisvariable den Wert 0 (untere Grenze) erreicht. Diese Basisvariable wird aus der Basis eliminiert. Falls keine Basisvariable eine Grenze erreicht, ist das Modell unbeschränkt (unbounded). Für jede Gleichungszeile von (S1)(siehe Abb. 2.8) (außer der Zielfunktionszeile) wird untersucht, um wieviel die Pivotvariable erhöht werden kann, ohne dass die Basisvariable (auf der linken Seite der Gleichung) negativ wird. Im Beispiel (S1) schreibt man z. B. für die x_3 -Gleichung: $x_1 \nearrow 500$. D.h. die Nichtbasisvariable x_1 darf bis zu 500 erhöht werden, ohne dass BV x_3 negativ wird. Da keine der Basisvariablen negativ werden darf, wird das Minimum aus diesen Zahlen bestimmt. Im Beispiel $\min(500, 800, 400, \infty) = 400$. Da die Erhöhung von $x_1 \nearrow 400$ die Variable x_5 auf 0 (untere Schranke) setzt, wird x_5 Nichtbasisvariable. Damit stellt die x_5 -Gleichung die Pivot-Zeile des Basistauses (in (S1)(siehe Abb. 2.8) ebenfalls umrahmt).

Somit wurde ein Basistausch vorgenommen: x_1 kommt hinein und x_5 verlässt die Basis: neue Basis ist $\{x_1, x_3, x_4, x_6\}$.

Grafisch: In Abb. 2.1 wird von der Ecke O an der Achse OA zur Ecke A „gewandert“. Man entfernt sich von der x_1 -Geraden (x_1 wird $\neq 0$ und somit

zur BV), bis man die x_5 -Gerade erreicht hat (dort gilt: $x_5 = 0$: x_5 wird NBV). Am Punkt A ist der Schnittpunkt der x_2 - und x_5 -Geraden: Die zugehörige Basis hat x_2 und x_5 als NBV!

Iteration 2

Neue NBV sind x_2 und x_5 , d. h. die BV sind x_1, x_3, x_4 und x_6 Im Gleichungssystem wird die Pivot-Zeile (x_5 -Gleichung) umgeformt in

$$x_1 = 400 - x_5$$

In die anderen Gleichungen von (S1)(siehe Abb. 2.8) wird x_1 gemäß dieser Gleichung eingesetzt. Man erhält z. B. für die x_3 -Gleichung: $x_3 = 1000 - 2x_1 - x_2 = 1000 - 2(400 - x_5) - x_2 = 200 - x_2 + 2x_5$.

Es ergibt sich das umgewandelte Gleichungssystem (S2)(siehe Abb. 2.9):

(S2)	$z = 800$	$+1,5 x_2$	$- 2 x_5$		
	$x_1 = 400$		$- x_5$	$x_2 \uparrow \infty$	
	$x_3 = 200$	$- x_2$	$+ 2 x_5$	$x_2 \uparrow 200$	min !
	$x_4 = 400$	$- x_2$	$+ x_5$	$x_2 \uparrow 400$	
	$x_6 = 700$	$- x_2$		$x_2 \uparrow 700$	

Abb. 2.9. Iteration 2

Nach der Umsetzung des Basistauses durch die Angabe des neuen modifizierten Gleichungssystems werden die Schritte 2. und 3. (Auswahl der Pivot-Spalte /-Zeile bzw. Aufnahme- und Eliminationsregel) direkt im modifizierten Gleichungssystem durchgeführt: Umrahmen der Pivot-Spalte nach Aufnahme- und Eliminationsregel, Bestimmung der Erhöhungen der gewählten Pivotvariablen und Umrahmen der Pivot-Zeile (Zeile, in der die minimale Erhöhung steht).

Basistausch: x_2 hinein und x_3 heraus: neue Basis ist $\{x_1, x_2, x_4, x_6\}$.

Grafisch: In Abb. 2.1 wird nun von Ecke A an der Achse AB entlang zur Ecke B gewechselt. In Abb. 2.4 entfernt man sich von der x_2 -Geraden ($x_2 = 0$), bis man die x_3 -Gerade ($x_3 = 0$) erreicht hat. B ist der Schnittpunkt der x_5 - und x_3 -Geraden. Also hat die zugehörige Basis x_3 und x_5 als NBV.

Bemerkung: Die neu berechneten Koeffizienten der Variablen x_2 und x_5 in der z-Gleichung (1,5 und -2) sind die Grenzerträge bei Wertänderungen dieser Nichtbasisvariablen ab diesem Punkt (im Beispiel Punkt A). Die Grenzerträge der Basisvariablen x_1, x_3, x_4 und x_6 sind 0. Die neu berechneten Koeffizienten werden aus historischen Gründen – sowohl für Minimierungs- als auch für Maximierungsprobleme – auch reduzierte Kosten genannt.

Iteration 3

Neue NBV sind x_3 und x_5 , also sind x_1, x_2, x_4 und x_6 BV. Im Gleichungssystem wird die Pivot-Zeile (x_3 -Gleichung) umgeformt in

$$x_2 = 200 - x_3 + 2x_5$$

In die anderen Gleichungen von (S2) wird x_2 gemäß dieser Gleichung eingesetzt. Man erhält das umgewandelte Gleichungssystem (S3)(siehe Abb. 2.10):

(S3)	$z = 1100$	$- 1,5 x_3$	$+ x_5$	
	$x_1 = 400$		$- x_5$	$x_5 \uparrow 400$
	$x_2 = 200$	$- x_3$	$+ 2 x_5$	$x_5 \uparrow \infty$
	$x_4 = 200$	$+ x_3$	$- x_5$	$x_5 \uparrow 200$
	$x_6 = 500$	$+ x_3$	$- 2 x_5$	$x_5 \uparrow 250$

min !

Abb. 2.10. Iteration 3

Basistausch: x_5 hinein und x_4 heraus: neue Basis ist $\{x_1, x_2, x_5, x_6\}$.

Grafisch: In Abb. 2.1 wechselt man von Ecke B an Achse BC entlang zur Ecke C.

Iteration 4

Neue NBV sind x_3 und x_4 , also sind x_1, x_2, x_5 und x_6 BV. Im Gleichungssystem wird die Pivot-Zeile (x_4 -Gleichung) umgeformt zu

$$x_5 = 200 + x_3 - x_4$$

In die anderen Gleichungen von (S2)(siehe Abb. 2.9) wird x_5 gemäß dieser Gleichung eingesetzt.

$$\begin{aligned} z &= 1100 - 1,5x_3 + x_5 \\ &= 1100 - 1,5x_3 + (200 + x_3 - x_4) = 1300 - 0,5x_3 - x_4. \end{aligned}$$

Schon hier wird erkennbar, dass die neue Basis optimal ist, da die Zielfunktion ohne zusätzliche Beschränkung durch die Variablen x_3 und x_4 dargestellt wurde und durch Erhöhen der Werte dieser Nichtbasisvariablen x_3 und x_4 (die auf Null gesetzt sind, also nicht erniedrigt werden können) keine weitere Erhöhung des Zielfunktionswertes mehr erreicht werden kann. Um die Werte der Basisvariablen (und weitere Erkenntnisse über die optimale Lösung) zu gewinnen, betrachten wir das umgewandelte System (S4)(siehe Abb. 2.11):

Grafisch: In Abb. 2.1 stellt die Ecke C=(200,600) eine optimale LP-Lösung dar.

$$\begin{array}{rcll}
 & z = 1300 & -0,5 x_3 & - x_4 \\
 & x_1 = 200 & - x_3 & + x_4 \\
 \text{(S4)} & x_2 = 600 & + x_3 & - 2 x_4 \\
 & x_5 = 200 & + x_3 & - x_4 \\
 & x_6 = 100 & - x_3 & + 2 x_4
 \end{array}$$

Abb. 2.11. Iteration 4

Die Schlupfvariablen x_3, x_4, x_5 und x_6 haben bei dieser optimalen Lösung die Werte 0, 0, 200 und 100. Das heißt insbesondere, dass bei den ersten zwei Ungleichungen des linearen Programms jeweils die rechte Seite gleich der linken Seite ist. Dies bedeutet, dass sowohl Zeit- als auch Lederbelieferungs-Kapazitäten bei der optimalen Lösung vollständig ausgeschöpft sind. Die (endgültigen) reduzierten Kosten sind nun die Koeffizienten der modifizierten Zielfunktion der optimalen Lösung, nämlich 0, 0, -0,5, -1, 0 und 0 für x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 bzw. x_6 . Insbesondere heißen die reduzierten Kosten der Schlupfvariablen auch Schattenpreise der jeweiligen Restriktionen. Im nachfolgenden Abschnitt wird die ökonomische Bedeutung reduzierter Kosten und Schattenpreise ausführlich behandelt. Der Leser mag sich schon jetzt überlegen, was eine Erhöhung der Zeit- oder Lederbelieferungs-Kapazität um eine oder wenige Einheiten bei der optimalen Lösung ausmacht!

2.6.3 Bestimmung einer zulässigen Anfangslösung

Im obigen Beispiel war der Koordinatenursprung $(0,0)$ eine zulässige Lösung und konnte somit als Ausgangs-Basislösung gewählt werden. Wenn dies nicht der Fall ist, wird zuerst ein modifiziertes LP-Modell gelöst. Man nennt dies die Phase I des Simplex-Verfahrens, wobei als Zielsetzung nach einer zulässigen Lösung gesucht wird. Erst danach wird in Phase II des Verfahrens, ausgehend von dieser zulässigen Lösung, eine optimale Lösung des eigentlichen Problems gesucht. Die Phase I wird nun anhand des folgenden Beispiels erläutert. Anschließend werden die Schritte der Phase I und Phase II von Simplex für dieses Beispiel grafisch veranschaulicht (vgl. Abb. 2.16). Es bleibt dem Leser überlassen, die Schritte grafisch zu verfolgen und zu interpretieren.

$$\begin{array}{l}
 \text{Die Ausgangsbasis: NBV: } x_1, x_2 \text{ BV: } (z,) x_3, x_4, x_5, x_6 \\
 \text{Basislösung:} \quad \quad \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 4 \quad 5 \quad -2 \quad -3
 \end{array}$$

Das modifizierte Gleichungssystem lautet:

$$\begin{array}{l}
 z = 0 + 3x_1 + 2x_2 \\
 x_3 = 4 - x_1 - x_2 \\
 x_4 = 5 - 2x_1 - x_2 \\
 x_5 = -2 - x_1 + 4x_2 \\
 x_6 = -3 + x_1 + 2x_2
 \end{array}$$

Beispiel	... im Standardformat
Max $z = 3x_1 + 2x_2$ s.t. $x_1 + x_2 \leq 4$ $2x_1 + x_2 \leq 5$ $-x_1 + 4x_2 \geq 2$ $x_1 + 2x_2 \geq 3$ $x_1, x_2 \geq 0$	Max z s.t. $z - 3x_1 - 2x_2 = 0$ $x_1 + x_2 + x_3 = 4$ $2x_1 + x_2 + x_4 = 5$ $-x_1 + 4x_2 - x_5 = 2$ $x_1 + 2x_2 - x_6 = 3$ $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

Leider ist die Anfangslösung unzulässig, da x_5 und x_6 negative Werte haben! Um zunächst eine zulässige Anfangslösung zu finden, wird eine „Phase I - Zielfunktion“ gebildet, welche die *Summe der Unzulässigkeiten* minimiert. Dies wird dadurch erreicht, dass die Summe der Variablen, die negative – also unzulässige – Werte annehmen, maximiert wird. Ziel ist es, durch Simplex-Schritte die Variablen mit unzulässigen Werten zunächst auf ihre untere Grenze (hier Null) zu bekommen. Dafür werden hier Variablen mit unzulässigen Werten leicht anders behandelt. Man nennt diese Variation des Simplex *erweiterter Simplex*.

Phase I - Zielfunktion:

max s

wobei $s = x_5 + x_6 = (-2 - x_1 + 4x_2) + (-3 + x_1 + 2x_2) = -5 + 6x_2$

Ausgangsbasis: NBV: x_1, x_2 BV: $(s, z), x_3, x_4, x_5, x_6$
 Basislösung: $0 \quad 0 \quad -5 \quad 0 \quad 4 \quad 5 \quad -2 \quad -3$

Mit dieser veränderten Zielfunktion wird nun der Simplex-Algorithmus durchgeführt:

Phase I, Iteration 1:

(*) Eine Variable mit negativem Wert unterschreitet die untere Grenze und soll beim *erweiterten Simplex-Algorithmus* zunächst auf ihre untere Grenze überführt werden.

Basistausch: x_2 hinein, x_5 heraus!

Phase I, Iteration 2:

Setze $x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_5$ ein!

$$s = -5 + 6\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_5\right) = -2 + \frac{3}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_5$$

Neue Basis: NBV: x_1, x_5 BV: $(s, z), x_2, x_3, x_4, x_6$
 Basislösung: $0 \quad 0 \quad -2 \quad 1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{7}{2} \quad \frac{9}{2} \quad -2$

Basistausch: x_1 hinein, x_6 heraus!

$s = -5$		$+ 6x_2$		
$z = 0$	$+ 3x_1$	$+ 2x_2$		
$x_3 = 4$	$- x_1$	$- x_2$	$x_2 \uparrow 4$	
$x_4 = 5$	$- 2x_1$	$- x_2$	$x_2 \uparrow 5$	
$x_5 = -2$	$- x_1$	$+ 4x_2$	$x_2 \uparrow \frac{1}{2}$	min! (*)
$x_6 = -3$	$+ x_1$	$+ 2x_2$	$x_2 \uparrow \frac{3}{2}$	

Abb. 2.12. Phase I, Iteration 1

Umgewandeltes System:

$s = -2$		$+\frac{3}{2}x_1$	$+\frac{3}{2}x_5$	
$z = 1$		$+\frac{7}{2}x_1$	$+\frac{1}{2}x_5$	
$x_2 = \frac{1}{2}$		$+\frac{1}{4}x_1$	$+\frac{1}{4}x_5$	$x_1 \uparrow \infty$
$x_3 = \frac{7}{2}$		$-\frac{5}{4}x_1$	$-\frac{1}{4}x_5$	$x_1 \uparrow \frac{14}{5}$
$x_4 = \frac{9}{2}$		$-\frac{9}{4}x_1$	$-\frac{1}{4}x_5$	$x_1 \uparrow 2$
$x_6 = -2$		$+\frac{3}{2}x_1$	$+\frac{1}{2}x_5$	$x_1 \uparrow \frac{4}{3}$ (s.o.) min!

Abb. 2.13. Phase 1, Iteration 2

Phase I, Beginn von Iteration 3:

Setze $x_1 = x_5 + x_6$ ein

$$s = -2 + \frac{3}{2}(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}x_5 + \frac{2}{3}x_6) + \frac{3}{2}x_5 = 0 + x_5 + x_6$$

Neue Basis: NBV: x_5, x_6 ; BV: $(s, z), x_1, x_2, x_3, x_4$ (Basislösung und modifiziertes System s.u.)

Ende Phase I:

Die Unzulässigkeiten sind abgebaut ($s = 0$ und $x_5, x_6 = 0$, da NBV)!

Beginn Phase II:

Der Simplex-Algorithmus wird nun mit z als Zielfunktion weitergeführt. Ausgangspunkt ist die letzte Basis (Phase I) und das entsprechend umgewandelte System. Setze $x_1 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}x_5 + \frac{2}{3}x_6$ ein (eigentlich letzter Schritt aus Phase I)

$$z = 1 + \frac{7}{2} \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}x_5 + \frac{2}{3}x_6 \right) + \frac{1}{2}x_5 = \frac{17}{3} - \frac{2}{3}x_5 + \frac{7}{3}x_6$$

Ausgangsbasis: NBV: x_5, x_6 , BV: $(z,)$ x_1, x_2, x_3, x_4
 Basislösung: $0 \quad 0 \quad \frac{17}{3} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{5}{6} \quad \frac{11}{6} \quad \frac{3}{2}$

Ausgangssystem für Phase II ist das modifizierte System aus der letzten Iteration in Phase I:

$z = \frac{17}{3}$	$-\frac{2}{3}x_5$	$+\frac{7}{3}x_6$		
$x_1 = \frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}x_5$	$+\frac{2}{3}x_6$	$x_6 \uparrow \infty$	
$x_2 = \frac{5}{6}$	$+\frac{1}{6}x_5$	$+\frac{1}{6}x_6$	$x_6 \uparrow \infty$	
$x_3 = \frac{11}{6}$	$+\frac{1}{6}x_5$	$-\frac{5}{6}x_6$	$x_6 \uparrow \frac{11}{5}$	
$x_4 = \frac{3}{2}$	$+\frac{1}{2}x_5$	$-\frac{3}{2}x_6$	$x_6 \uparrow 1$	min!

Abb. 2.14. Phase 2

Basistausch: x_6 hinein, x_4 heraus!

Phase II, Iteration 1:

Setze $x_6 = 1 - \frac{2}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5$ ein

$$z = \frac{17}{3} - \frac{2}{3}x_5 + \frac{7}{3} \left(1 - \frac{2}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 \right) = 8 - \frac{14}{9}x_4 + \frac{1}{9}x_5$$

Neue Basis: NBV: x_4, x_5 BV: $(z,)$ x_1, x_2, x_3, x_6
 Basislösung: $0 \quad 0 \quad 8 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \quad 1$

Phase II, Iteration 2:

Setze $x_5 = 9 - 9x_3 + 5x_4$ ein

$$z = 8 - \frac{14}{9}x_4 + \frac{1}{9}(9 - 9x_3 + 5x_4) = 9 - x_3 - x_4$$

$$x_1 = \dots = 1 +/\dots$$

$$x_2 = \dots = 3 +/\dots$$

...

Neue Basis: NBV: x_3, x_4 BV: $(z,)$ x_1, x_2, x_5, x_6
 Basislösung: $0 \quad 0 \quad 9 \quad 1 \quad 3 \quad \dots \dots$

Diese Lösung ist optimal; Erhöhen der NBV x_3 und x_4 verbessert den Zielfunktionswert nicht.

Modifiziertes System:	$z = 8$	$-\frac{14}{9}x_4$	$+\frac{1}{9}x_5$	
	$x_1 = 2$	$-\frac{4}{9}x_4$	$-\frac{1}{9}x_5$	$x_5 \uparrow 18$
	$x_2 = 1$	$-\frac{1}{9}x_4$	$+\frac{2}{9}x_5$	$x_5 \uparrow \infty$
	$x_3 = 1$	$+\frac{5}{9}x_4$	$-\frac{1}{9}x_5$	$x_5 \uparrow 9$ min!
	$x_6 = 1$	$-\frac{2}{3}x_4$	$+\frac{1}{3}x_5$	$x_5 \uparrow \infty$

Basistausch: x_5 hinein, x_3 heraus!

Abb. 2.15. Phase 2, Iteration 1

Abb. 2.16 zeigt eine grafische Veranschaulichung der Simplex-Schritte der Phasen I und II im Raum der Strukturvariablen x_1 und x_2 für das obige Beispiel. Beachte, dass die Punkte O, A, B, C und D nach den Definitionen in 2.2.3 alle Ecken heißen, die auch zu Basislösungen entsprechen. Die Ecken O und A sind unzulässige Ecken und die zugehörigen Basislösungen sind unzulässig. Eine formale Beschreibung der Simplex-Methode mit oberen und unteren Grenzen für Variablen und Restriktionen befindet sich in den Online-Lernmaterialien.

2.7 Grafische Veranschaulichung – Vertiefung

Dieser Abschnitt beinhaltet vertiefendes Material für besonders interessierte, insbesondere geometrisch und visuell orientierte Leserinnen und Leser.

2.7.1 Grafische Veranschaulichung der Grundidee des Simplex-Verfahrens

Betrachten wir noch einmal die grafische Lösung des LP-Beispielprogramms in Abb. 2.1. Das Simplex-Verfahren würde im Ursprung O als trivialer Basislösung anfangen. Die Isogewinngerade durch diesen Punkt liefert einen Zielfunktionswert von $z = 2 \cdot 0 + 1,5 \cdot 0 = 0$. Durch Erhöhen des Wertes von x_1 von 0 auf 400 bewegt man sich von der Ecke O zur Ecke $A = (400, 0)$. Die Isogewinngerade wird also nach oben parallel verschoben. Nun ist $z = 2 \cdot 400 + 1,5 \cdot 0 = 800$ geworden.

Durch Erhöhen des Wertes von x_2 von 0 auf 200 bewegt man sich von der Ecke A zur Ecke $B = (400, 200)$ auf einer Kante des zulässigen Bereichs. Die Isogewinngerade verschiebt sich parallel nach oben: z erhöht sich weiter auf $2 \cdot 400 + 1,5 \cdot 200 = 1100$. Als letztes bewegt man sich auf einer Kante des zulässigen Bereichs zur Ecke $C = (200, 600)$, die dann eine optimale Lösung mit $z = 1300$ darstellt.

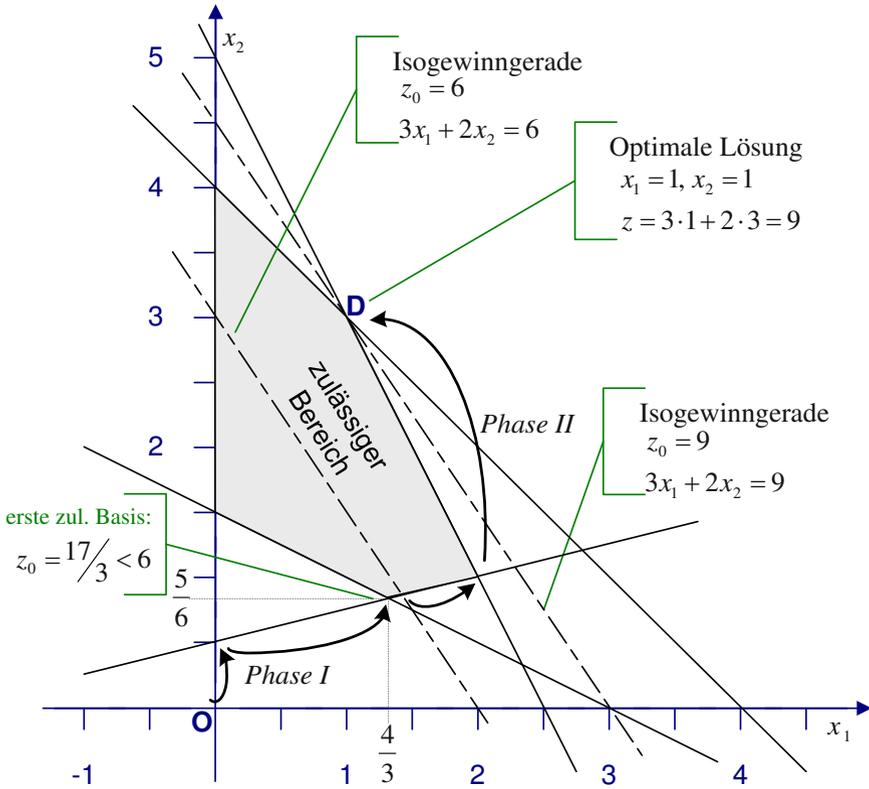


Abb. 2.16. Grafische Veranschaulichung der Simplexschritte (Phase I und Phase II)

Nur im letzten Schritt wird keiner der Werte der ursprünglichen Modellvariablen, der sog. Strukturvariablen, von 0 auf einen positiven Wert erhöht. Eigentlich wird auch hier eine Variable von 0 auf einen positiven Wert erhöht (wie bei den ersten zwei Schritten). Diese Variable ist keine Strukturvariable, sondern eine Schlupfvariable (vgl. Abschnitt 2.6.1).

Grafische Deutung von Schlupfvariablen

Betrachten wir die Ungleichung (b) $x_1 + x_2 \leq 800$ für die Restriktion der Lederbelieferung. Der Wert der zugehörigen Schlupfvariable x_4 für einen bestimmten Punkt in der Ebene modelliert in gewissem Sinne den Abstand dieses Punktes zu der Restriktionsgeraden $x_1 + x_2 = 800$ „in Richtung des zulässigen Bereiches“.

Falls $x_4 = 0$, dann gilt $x_1 + x_2 = 800$. Der Punkt liegt auf der Restriktionsgeraden.

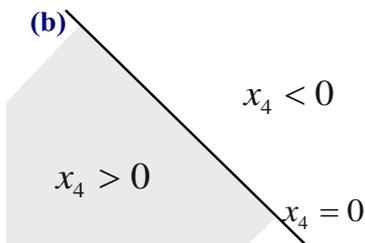


Abb. 2.17. Schlupfvariable 1

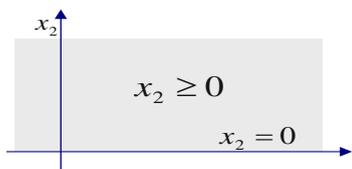


Abb. 2.18. Schlupfvariable 2

Falls $x_4 < 0$, dann gilt $x_1 + x_2 > 800$, und der Punkt ist oberhalb der Restriktionsgeraden im unzulässigen Bereich.

Falls $x_4 > 0$, dann gilt $x_1 + x_2 < 800$. Der Punkt ist im zulässigen Bereich oder im unzulässigen Bereich, dann aber bedingt durch eine andere Restriktion, deren Schlupfvariable < 0 ist (siehe Abb. 2.17).

Also stellt die Ungleichung $x_4 \geq 0$ die untere Halbebene dar, die alle die Restriktion (b) $x_1 + x_2 \leq 800$ erfüllenden Punkte der Ebene beinhaltet. Diese Halbebene nennen wir die x_4 -Halbebene und die Gerade $x_1 + x_2 = 800$ ($\Leftrightarrow x_4 = 0$) die x_4 -Gerade.

Nicht nur jede Schlupfvariable definiert so eine Halbebene – oder allgemeiner einen Halbraum im R^n , sondern auch jede Strukturvariable: Die im Bild gezeichnete x_2 -Halbebene beinhaltet alle Punkte, welche die (implizite) Restriktion $x_2 \geq 0$ erfüllen (Die Punkte auf der x_2 -Geraden gehören zur entsprechenden Halbebene)(siehe Abb. 2.18).

Wie eine Halbebene von einer Geraden abgegrenzt ist, wird im drei- bzw. n-

dimensionalen Raum ein Halbraum von einer Ebene bzw. (($n - 1$)-dimensionalen) Hyperebene abgegrenzt. Z.B. stimmt die x_2 -Gerade ($x_2 = 0$) auf der Ebene mit der x_1 -Achse überein, aber im dreidimensionalen bzw. n -dimensionalen Raum stellt $x_2 = 0$ die durch die x_1 - und x_3 -Achsen aufgespannte Ebene (x_2 -Ebene) bzw. die durch die x_1 -, x_3 -, x_4 -, ..., x_n -Achsen aufgespannte Hyperebene (im R^n) dar (x_2 -Hyperebene). Der durch $x_2 \geq 0$ definierte Halbraum wird durch die x_2 -Hyperebene abgegrenzt und wird x_2 -Halbraum genannt.

Im Allgemeinen nennt man für jede Variable des LP-Standardmodells (Struktur- oder Schlupfvariable), d. h., für x_j ($j = 1, 2, \dots, n, n + 1, \dots, n + m$):

- die Hyperebene im R^n , die durch $x_j = 0$ definiert ist, die x_j -Hyperebene und
- den Halbraum im R^n , der durch $x_j \geq 0$ definiert ist, x_j -Halbraum.

In Abb. 2.19 (S. 63) ist der Übersichtlichkeit halber x_j direkt neben der x_j -Gerade ($x_j = 0$) auf der Seite der x_j -Halbebene ($x_j \geq 0$) eingesetzt.

Grafische Charakterisierung des zulässigen Bereichs eines LP-Modells

Mit Hilfe der obigen Ausführungen stellen wir fest, dass der zulässige Bereich eines LP-Modells der Durchschnitt von $n + m$ Halbräumen des n -dimensionalen Punkterraumes R^n ist. Diese Halbräume sind nach obiger Notation genau die x_1 -, x_2 -, ..., x_n -, x_{n+1} -, ..., x_{n+m} -Halbräume. In Abb. 2.19 ist der zulässige Bereich der Durchschnitt der x_1 -, x_2 -, x_3 -, x_4 -, x_5 - und x_6 -Halbebenen.

Man kann zeigen, dass der Durchschnitt von Halbräumen konvex und „linear bzw. geradlinig abgegrenzt“ ist. Wäre der zulässige Bereich ZB nicht konvex, dann würden zwei Punkte A und $B \in ZB$ existieren, auf deren Verbindungsstrecke AB mindestens ein Punkt $X \notin ZB$ liegt. Dann müsste also eine x_j -Hyperebene existieren, in der die Variable x_j nicht-negative Werte für A und B , aber einen negativen Wert für X annimmt. Dafür wiederum müsste die Verbindungsstrecke AB die x_j -Hyperebene zum Punkt X verlassen, um dann zurückzukehren und zu B zu gelangen. Dies ist nicht möglich, weil eine Gerade entweder in einer Hyperebene enthalten ist oder die Hyperebene in genau einem Punkt trifft.

2.7.2 Basis vs. Ecke

Eine Ecke bezüglich eines LP-Modells mit n Strukturvariablen bezeichnet einen Punkt des n -dimensionalen Raums, der als Durchschnitt von n Hyperebenen aus den $n + m$ durch die LP-Restriktionen definierten Hyperebenen dargestellt werden kann. Eine Ecke ist unzulässig, falls sie nicht zum zulässigen Bereich des LPs gehört. Beispielsweise ist in Abb. 2.19 die Ecke $C(200,600)$ der Durchschnitt der zwei Restriktionsgeraden ($2x_1 + x_2 = 1000$) und ($x_1 + x_2 = 800$), also der Durchschnitt der x_3 - und x_4 -Geraden. Die Ecke $A(400,0)$ ist der Durchschnitt der x_5 -Geraden ($x_1 = 400 \Leftrightarrow x_5 = 0$) und der x_2 -Geraden ($x_1 = 0$). Der Punkt $N(800,0)$, der Durchschnitt der x_4 - und x_2 -Geraden, ist auch eine Ecke, liegt aber im unzulässigen Bereich, ist also eine unzulässige Ecke.

Eine degenerierte (entartete) Ecke ist eine Ecke, die als Durchschnitt von mehr als n Hyperebenen dargestellt werden kann. Eine solche Ecke auf der Ebene ergibt sich z. B., wenn drei Restriktionsgeraden einen gemeinsamen Schnittpunkt haben.

Eine Basis B definiert eindeutig eine Basislösung durch Setzen aller Nichtbasisvariablen (NBV) auf 0. Jede Basislösung (und somit jede Basis) entspricht derjenigen Ecke, die als Durchschnitt aller n x_j -Hyperbenen dargestellt wird, wobei x_j NBV bezüglich der Basis ist.

Eine entartete Ecke kann durch mehrere Basen/Basislösungen dargestellt werden. Diese sind gleichwertige entartete Basislösungen. Eine BV des Werts Null kann als NBV deklariert werden und eine NBV mit dem Wert 0 kann stattdessen in die Basis aufgenommen werden.

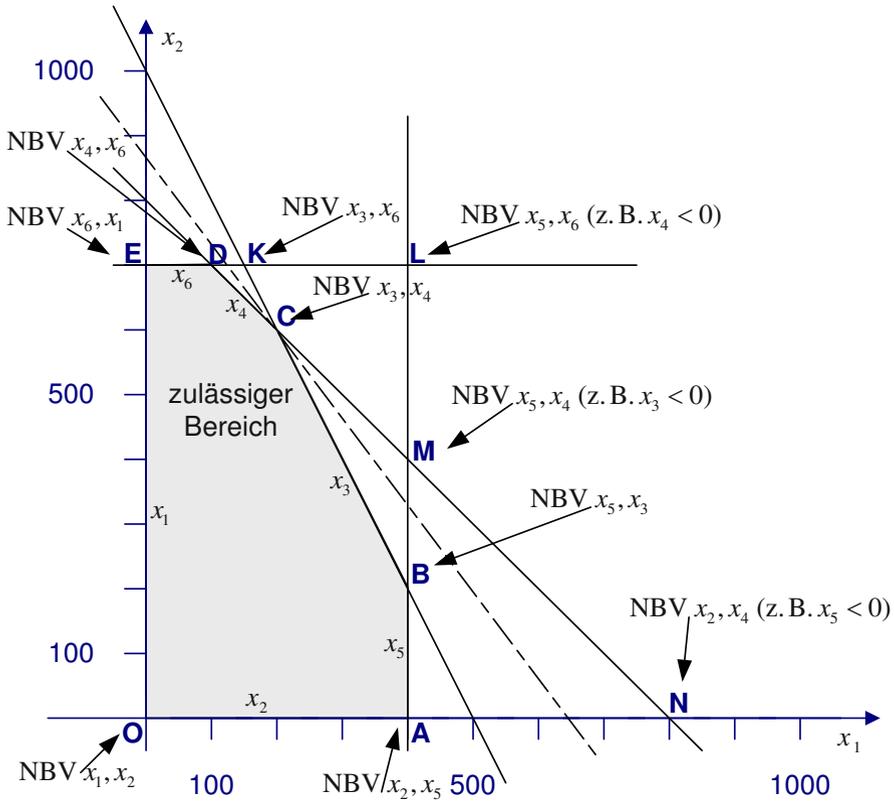


Abb. 2.19. Entsprechung Ecke - Basis (NBV = Nichtbasisvariablen bezüglich Basis)

Man kann zeigen, dass optimale Lösungen eines LP-Modells, falls vorhanden, am Rande des zulässigen Bereichs liegen. Die Lösung kann eindeutig sein, also in genau einer Ecke wie in Abb. 2.1 liegen. Sie kann auch zwischen optimalen Ecken auf einer Verbindungsstrecke oder allgemeiner auf einer konvexen Hyperebenenfläche (Typ 1, 2 oder 3 in Abb. 2.2) verlaufen, falls die Zielfunktionsgerade(-hyperebene) im Optimum auf einer „Kante des zulässigen Bereichs“ liegt. Dann gibt es unendlich viele optimale Lösungen (mehrdeutige Lösung). Da eine optimale Lösung an einer Ecke des zulässigen Bereichs liegen muss, reicht es bei der Lösung von LPs mittels der Simplex-Methode aus, die Ecken, also Basislösungen, zu untersuchen.

2.7.3 Was ist ein „Simplex“?

Ein (m -dimensionales) Simplex ist ein durch $m + 1$ Punkte des R^m , die nicht in einer Hyperebene liegen, aufgespannter Polyeder. Eine Verbindungsstrecke ist ein eindimensionales Simplex, ein Dreieck ist ein zweidimensionales Sim-

plex und ein Tetraeder ist ein dreidimensionales Simplex (ein Punkt ist ein nulldimensionales Simplex.)

Jede Ecke bzgl. eines LP im Raum R^n (der Strukturvariablen) wird durch mindestens eine Basis bzw. Basislösung (mehrere bei Entartung) dargestellt. Alle Basislösungen definieren Punkte im Raum R^{n+m} (der Struktur- und Schlupfvariablen). Diese liegen nur in den m -dimensionalen Unterräumen des R^{n+m} , die durch Setzen von n (Nichtbasis-)Variablen auf 0 definiert sind. Bei einer gegebenen Basislösung kann also die Lage des zugehörigen Punktes im durch die m BV definierten R^m betrachtet werden. In der Regel (bei nicht entarteten Basislösungen) liegt so ein Punkt außerhalb der x_j -Hyperebenen (definiert jeweils durch $x_j = 0$) des R^m für jede BV x_j .

Als Nachbarschaft betrachtet man Basislösungen, die (projiziert auf denselben R^m) auf diesen x_j -Hyperebenen liegen, d. h. eine BV, z. B. x_{13} in Abb. 2.20, wird auf 0 gesetzt und kann als NBV bzgl. einer anderen Basis/Basislösung angesehen werden. Es verbleiben nun $m - 1$ BV, die mit der Hinzunahme einer alten NBV in die Basis vervollständigt werden können. Dafür gibt es potentiell n Möglichkeiten. Also steht ein gezeichneter Punkt für $x_i = 0$ in Abb. 2.20 eigentlich für n mögliche Punkte, die zu n möglichen Basislösungen (Ecken) – projiziert auf R^m – gehören. Solche Basislösungen nennt man Nachbar-Basislösungen zu der betrachteten Basislösung. Es gibt somit für eine betrachtete Basislösung insgesamt $n \times m$ mögliche Nachbar-Basislösungen, die durch gleichzeitiges Ändern einer BV zu einer NBV und einer NBV = 0 in eine BV konstruiert werden können.

Die Simplex-Methode wählt dabei zunächst eine NBV, die zur Basis hinzugenommen werden soll (Strategie: Erhöhen des Wertes der gewählten NBV verbessert i.d.R. den Zielfunktionswert). Es gibt dann genau m Möglichkeiten zu einer der Nachbar-Basislösungen zu gelangen, nämlich – projiziert auf R^m – genau die gezeichneten (nun eindeutigen) Punkte für $x_i = 0$ (x_i BV, die jeweils zur NBV werden soll).

Die betrachtete Basislösung zusammen mit diesen m Punkten bilden in R^m ein m -dimensionales Simplex, das sozusagen die Nachbarschaft der Basislösung bei einer Wahl der zur Basis hinzuzunehmenden NBV darstellt (siehe Abb. 2.20). Dieses Simplex hat die schöne Eigenschaft, dass mindestens eine der dargestellten Nachbar-Basislösungen zulässig sein muss. Nun hat man eine

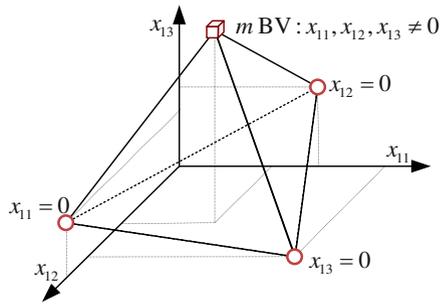


Abb. 2.20. Das m -dim. Simplex der Simplex-Methode (für $m = 3$, BV sind x_{11}, x_{12} und x_{13})

andere Basis und kann ein anderes Simplex im entsprechenden R^m bzgl. neuer BV (anderer m -dimensionaler Unterraum des R^{n+m}) erforschen. Irgendwann stellt sich hoffentlich heraus, dass die Lösung durch Hinzunahme einer NBV zur betrachteten Basis nicht mehr verbessert werden kann: Eine optimale Basislösung wurde schon erreicht!

Dem Leser wird nun empfohlen, die Simplex-Schritte anhand des Beispiels im Abschnitt 2.6.2 durchzugehen und sich den Zusammenhang zwischen der algebraischen und der grafischen Vorgehensweise schrittweise gedanklich zu konstruieren.

2.8 Ökonomische Interpretation und Auswertung einer LP-Lösung

Oben wurde erwähnt, dass die ökonomische Bedeutung der linearen Optimierung so hoch eingeschätzt wurde, dass Kantorovich und Koopmans dafür der Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften verliehen wurde. In diesem Abschnitt wird diese Bedeutung anhand eines Beispiels diskutiert.

Beispiel: Holzverarbeitung

Eine holzverarbeitende Firma „Säger“ produziert fünf Produkte. Holz1, Holz2, Holz3, Holz4 und Holz5. Zur Herstellung der Produkte benötigt die Firma zwei Arbeitsgänge: schleifen und lackieren. Zusätzlich werden für jedes Holz-Produkt 80 Arbeitsstunden pro Monat (30 Arbeitstage) für das Zusammenschneiden der Hölzer benötigt. Die folgende Tabelle zeigt die Deckungsbeiträge und die eingesetzten Ressourcen.

	Holz1	Holz2	Holz3	Holz4	Holz5
Deckungsbeitrag (€)	2200	2250	1400	1600	800
Schleifen (h)	40	80	-	100	60
Lackieren (h)	30	28	64	-	-

Die Fabrik hat 4 Schleifmaschinen, die an einem Tag 10 Stunden im Betrieb sind ($30 \cdot 10 \cdot 4 = 1200$ Arbeitsstunden für die Schleifmaschinen im Monat).

Die Fabrik hat auch 4 Lackierpistolen, welche 6 Stunden am Tag zur Verfügung stehen ($30 \cdot 6 \cdot 4 = 720$ Arbeitsstunden für die Lackierpistolen im Monat).

Für das Zuschneiden der Hölzer werden 10 Arbeiter beschäftigt, jeder dieser Arbeiter arbeitet 5 Stunden pro Tag ($30 \cdot 10 \cdot 5 = 1500$ Arbeitsstunden aller Arbeiter im Monat)

Die Firma „Säger“ möchte unter Berücksichtigung aller betrieblichen Restriktionen ein solches monatliches Produktionsprogramm erstellen, das den gesamten Deckungsbeitrag maximiert.

Das entsprechende Optimierungsmodell lautet:

$$\max z = 2200x_1 + 2250x_2 + 1400x_3 + 1600x_4 + 800x_5, \quad (\text{Zielfunktion})$$

$$\begin{aligned} \text{s.t. } & 40x_1 + 80x_2 + 100x_4 + 60x_5 \leq 1200 \text{ (Schleifen)} \\ & 30x_1 + 28x_2 + 64x_3 \leq 720 \text{ (Lackieren)} \\ & 80x_1 + 80x_2 + 80x_3 + 80x_4 + 80x_5 \leq 1500 \text{ (Arbeitsstunden)} \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Dieses Modell wurde mit einer Optimierungssoftware gelöst, in diesem Falle mit ClipMOPS.

Man erhält folgendes Ergebnis:

Holzfabrik	Holz_1	Holz_2	Holz_3	Holz_4	Holz_5	TYP	RHS						
Max	2200	2250	1400	1600	800								
LB													
UB	INF	INF	INF	INF	INF								
TYP	CON	CON	CON	CON	CON					Activity	Name	Status	reduced Cost
Schleifen	40	80		100	60	<=	1200		1200	Schleifen	UB	1,25	
Lackieren	30	28	64			<=	720		540	Lackieren	BS	0	
Arbeiter	80	80	80	80	80	<=	1500		1500	Arbeiter	UB	26,875	
Activity	7,50	11,25	0,00	0,00	0,00		41812,50						
Name	Holz_1	Holz_2	Holz_3	Holz_4	Holz_5								
Status	BS	BS	LB	LB	LB								
reduced Cost	0	0	-750	-675	-1425								

Abb. 2.21. Lösung des Beispiels in ClipMOPS

Die optimale Lösung des obigen Modells lautet: $z = 41812,50$
 Strukturvariablen: $x_1 = 7,50$; $x_2 = 11,25$; $x_3 = x_4 = x_5 = 0$,
 d. h. es werden 7,5 Einheiten von Holz1, 11,25 Einheiten von Holz2
 und 0 von den Anderen produziert. Der erzielte Deckungsbeitrag be-
 trägt 41812,50 € pro Monat. Für die Lösung des Modells wurde es
 im Standardformat dargestellt; also wurden drei Schlupfvariablen x_6 ,
 x_7 und x_8 eingefügt. Die optimale Basis beinhaltet die Variablen x_1 ,
 x_2 und x_7 . Die Grenzerträge (reduzierte Kosten) der strukturellen
 Nichtbasisvariablen bei der optimalen Lösung sind (c'_i neu berechne-
 ter Zielfunktionskoeffizient der Variablen x_i):

$$c'_3 = -750, c'_4 = -675, c'_5 = -1425$$

Die reduzierten Kosten der Schlupfvariablen bei der optimalen Lösung
 sind:

$$c'_6 = -1,25, c'_7 = 0, c'_8 = -26,875$$

Diese entsprechen den sogenannten Schattenpreisen (shadow prices
 oder dual prices) der jeweils zur Schlupfvariablen zugehörigen Re-
 striktionen. Anhand einer LP-Lösung samt reduzierter Kosten und
 Schattenpreise kann man direkt die modifizierte Zielfunktion bei der

berechneten optimalen Basislösung (vgl. 2.2) schreiben. Für das Beispiel sieht sie wie folgt aus:

$$z = 41812,50 - 750x_3 - 675x_4 - 1425x_5 - 1,25x_6 - 26,875x_8$$

Dabei existieren bei den auftretenden Nichtbasisvariablen immer nur Minus-Zeichen bei einer Maximierungsziel­funktion oder nur Plus-Zeichen bei einer Minimierungsziel­funktion, da bei der optimalen Lösung kein Basiswechsel mit einer Verbesserung des Zielfunktionswertes mehr möglich sein sollte. Im Beispiel sind x_3 , x_4 , x_5 , x_6 und x_8 NBV, davon x_3 , x_4 und x_5 strukturelle Variablen und x_6 und x_8 Schlupfvariablen.



<http://www.mops-optimizer.com>

2.8.1 Interpretation der reduzierten Kosten und der Schattenpreise

Außer den optimalen Werten der (ursprünglichen) Strukturvariablen ergeben die reduzierten Kosten und die Schattenpreise einer optimalen Basislösung grundsätzlich interessante Informationen über die Lösung und deren Sensitivität. Obwohl die Sensitivitätsanalyse heute nicht mehr die Bedeutung hat wie früher, wird sie hier kurz diskutiert, um das Verständnis von LP-Modellen im Allgemeinen zu fördern. Dadurch können Fragen folgender Art grundsätzlich beantwortet werden:

Frage 1: Sind die Preise der Produkte 3, 4 und 5 zu niedrig im Vergleich zu denen der Produkte 1 und 2? Um wie viel teurer sollten diese Produkte sein, um ohne Verluste beim Gesamtgewinn produziert werden zu können?

Der Grenzertrag (reduzierte Kosten) einer strukturellen Nichtbasisvariable stellt die marginale Auswirkung im Zielfunktionswert dar, wenn der Wert der Variable um eine Einheit erhöht wird. Wenn der Grenzertrag für eine Variable negativ (bei einer Max-Zielfunktion) ist, verschlechtert sich der Zielfunktionswert bei erzwungener Erhöhung des Wertes dieser Variablen marginal (Abb. 2.22a). Der Begriff „marginal“ bedeutet hier „solange kein Basiswechsel stattfindet“ (vgl. 2.6.1). Im obigen Beispiel bedeutet der negative Wert $c'_3 = -750$, dass der Zielfunktionswert sich um 750 € verschlechtern würde, wenn eine Einheit von Holz3 produziert würde. Dies kann anhand der Abb. 2.22a und der oben angegeben modifizierten Zielfunktion bewiesen werden.

Eine Preiserhöhung des Produktes Holz3 von 750 € würde dazu führen, dass bei gleichbleibendem Ertrag Holz3 produziert werden kann (möglicherweise statt Holz1 oder Holz2). Qualitativ veranschaulicht auf der 2-dimensionalen Ebene (siehe Abb. 2.22b) bedeutet die Preiserhöhung die Veränderung eines Koeffizienten in der Zielfunktion. Dadurch verändert sich die Neigung der

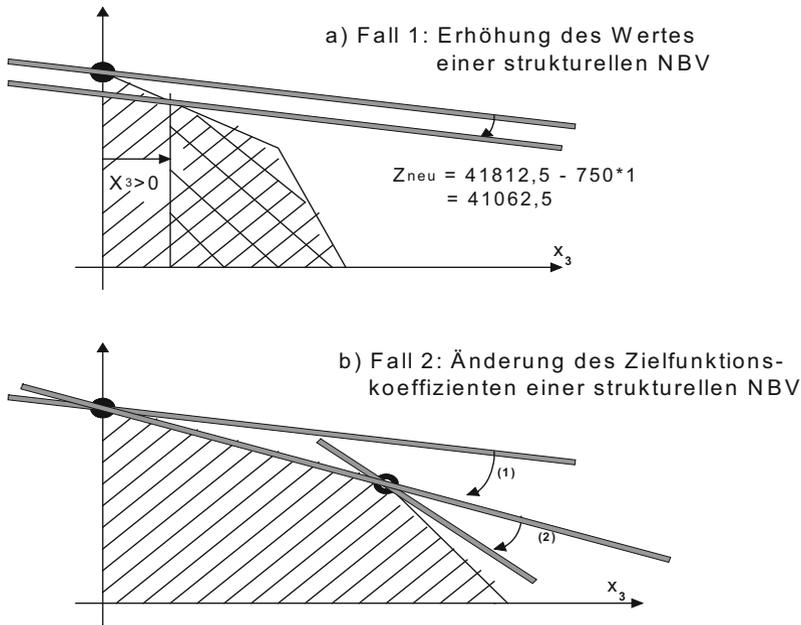


Abb. 2.22. Reduzierte Kosten: Qualitative Veranschaulichung

Zielfunktionsgeraden, bis sie mit einer Restriktion übereinstimmt (Lösung mehrdeutig zwischen zwei Ecken). Lässt die Marktsituation eine Erhöhung des Preises von Holz3 (Variable x_3) um mehr als 750 € zu, bekommen wir eine verbesserte optimale Lösung unter Hinzunahme von Holz3 (Basiswechsel wird erzwungen, veranschaulicht in Abb. 2.22: nur die zweite Ecke mit $x_3 \neq 0$ ist optimal). Entsprechend sind die Preiserhöhungen 675 € für Holz4 und 1425 € für Holz5 nötig, um sie ohne Verlust produzieren zu können.

Frage 2: Wie ändert sich die Lösung, wenn die Kapazitäten der Arbeitsgänge Schleifen und Lackieren erhöht werden?

Im Standardformat eines LP entspricht jeder Restriktion eine Schlupfvariable; im Beispiel sind es die Variablen x_6 , x_7 und x_8 . Die reduzierten Kosten der Schlupfvariablen in der optimalen Lösung entsprechen den Schattenpreisen (dual prices) der entsprechenden Restriktionen. Der Schattenpreis einer Restriktion gibt an, wie viel sich der Zielfunktionswert ändert, wenn die Kapazität der entsprechenden Ressource um eine Einheit erhöht wird.

Im o.g. Problem würde die Erhöhung der Kapazität „Schleifen“ pro Stunde und Maschine 1,25 € und die Erhöhung der Kapazität pro „Arbeiter“ 26,875 € bringen. Diese Werte gelten jedoch nur marginal (bis zu bestimmten Grenzen). Qualitativ veranschaulicht auf der 2-dimensionalen Ebene (siehe Abb. 2.23) bedeutet die Erhöhung der Kapazität einer Ressource, die auf der rechten Seite der entsprechenden Restriktion steht, die parallele Verschiebung der Restriktionsgeraden. Dadurch wird eventuell die auf dieser Restriktionsgera-

den liegende optimale Ecke verschoben (Basis muss sich nicht ändern, aber die Werte der Strukturvariablen ändern sich). Falls sich z. B. die Restriktionsgerade für die Schleifkapazität um 1 Einheit verschiebt, verschiebt sich entsprechend die optimale Ecke und der Schattenpreis ergibt die nötige parallele Verschiebung der Zielfunktionsgeraden zur neuen Lage der optimalen Ecke.

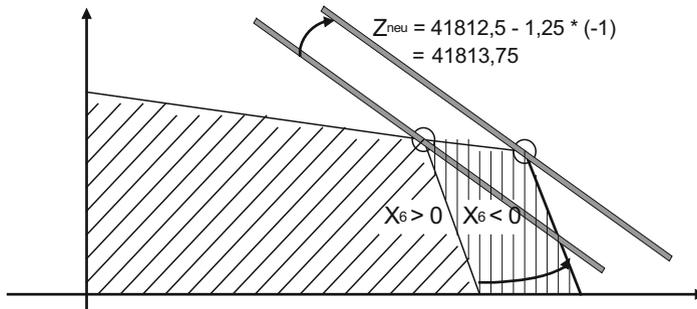


Abb. 2.23. Schattenpreise: Qualitative Veranschaulichung

Die Kapazität der Lackierpistolen wird hier nicht ausgenutzt, so dass eine Kapazitätserhöhung unmittelbar nichts bringen würde: Die reduzierten Kosten von x_7 (bzw. Schattenpreise von Lackierpistolenrestriktion) sind $= 0$.

Bemerkung: Eine Änderung des Wertes einer Nichtbasisvariable (NBV) x_j von 0 auf einen strikt positiven bzw. negativen Wert kann man als eine Entfernung von der x_j -Hyperebene (x_j -Gerade auf der Ebene) in Richtung des zulässigen Bereichs (für $x_j > 0$) bzw. in die andere Richtung (für $x_j < 0$) auffassen.

Bei der modifizierten Zielfunktion sieht man, dass die Erzwingung eines positiven bzw. negativen Wertes δ_j für eine NBV x_j eine marginale Verschlechterung bzw. Verbesserung des Zielfunktionswertes um $\delta_j \cdot \text{reduced-costs}(x_j)$ nach sich zieht, wobei reduced-costs für die reduzierten Kosten einer strukturellen Variable oder auch für die Schattenpreise der zu einer Schlupfvariable x_j gehörenden Restriktion steht. Es ist zu beachten, dass die Veränderung δ_j einer Struktur- oder Schlupfvariable immer aus Sicht des Ursprungs-LP zu betrachten ist:

Das Erzwingen der Produktion von Holz3 von 1 Einheit bedeutet, dass sich die Strukturvariable x_3 marginal um $\delta_3 = +1$ verändert (vgl. Abb. 2.22). Hingegen bedeutet eine Kapazitätserweiterung (z. B. der Schleifkapazität) um eine Einheit, dass sich der Wert der zur Schleifen-Restriktion gehörenden Schlupfvariable x_6 marginal um $\delta_6 = -1$ verändert (vgl. Abb. 2.23)!

Eine nützliche Regel sollte man sich letztlich merken: Falls eine Veränderung eine Einschränkung des zulässigen Bereichs bewirkt, dann kann sich der Zielfunktionswert nicht verbessern, sondern höchstens verschlechtern (vgl. Abb.

2.22). Umgekehrt; falls eine Veränderung eine Erweiterung des zulässigen Bereichs bewirkt, dann wird sich der Zielfunktionswert nicht verschlechtern, sondern eher verbessern (vgl. Abb. 2.23: Kapazitätserweiterung).

Sensitivitätsanalysen

Reduzierte Kosten und Schattenpreise drücken nur im bestimmten Rahmen die Änderungen des Zielfunktionswertes bzw. der Lösung aus. Die Sensitivitätsanalyse beschäftigt sich damit, in welchen Grenzen marginale Auswirkungen gültig sind.

Die Sensitivitätsanalyse scheint auf den ersten Blick ein sinnvolles Werkzeug für die Analyse von LP-Modellen und deren Lösungen sein. Jedoch ist sie für Praxisprobleme nur sehr eingeschränkt nutzbar. Der Grund dafür liegt in der Tatsache, dass große praktische Probleme typischerweise stark degeneriert sind. Somit ist der Wert vieler Basisvariablen gleich 0. In dem Fall gehören zu einem Eckpunkt mehrere Werte der reduzierten Kosten, so dass keine Aussagen über das Lösungsverhalten bei der Änderung des zugrundeliegenden Problems möglich sind.

Bemerkung: Große LP-Modelle aus der Praxis haben fast immer eine degenerierte optimale Lösung. Für jede optimale Basis gelten dann unterschiedliche Werte der reduzierten Kosten von Variablen. Somit ist die klassische Sensitivitätsanalyse (wie oben geschildert) in solchen Fällen wertlos!

Dank der Effizienz heutiger Optimierungssoftware und schneller Rechner kann ein LP jedoch meistens in kürzester Zeit mehrmals gelöst werden, und zwar mit verschiedenen Parametern. Auf diese Weise können What-If-Analysen im Sinne einer Sensitivitätsanalyse schnell durchgeführt werden. Die klassische Sensitivitätsanalyse, wie oben geschildert, hat somit kaum noch praktische Bedeutung.

Obwohl bei degenerierten großen LP-Modellen reduzierte Kosten und Schattenpreise für eine ökonomische Interpretation an Bedeutung verlieren, sind sie z. B. für die Lösung großer LP-Modelle mit sehr vielen Variablen doch sehr hilfreich: Mit der Column-Generation-Methode werden LPs mit sehr vielen Variablen dadurch gelöst, dass unter Verwendung der Schattenpreise schrittweise „gute Spalten“ – neue Variablen – generiert werden. Diese Methode ist anwendbar in vielen Bereichen der Praxis, für z. B. Besatzungseinsatzplanung in Fluggesellschaften sowie Verschnitt-Minimierung.

2.8.2 Duales Modell und seine Interpretation

In der Dualitätstheorie der linearen Programmierung wird bewiesen, dass jedes lineare Optimierungsmodell ein „Partnermodell“ besitzt, dass das duale Modell genannt wird und im gewissen Sinne komplementär ist. Das duale Modell des in der Einführung von 2.8 aufgestellten Beispielmmodells heißt:

$$\begin{array}{rcllcl}
\mathbf{min} & z' & = & 1200y_1 & + & 720y_2 & + & 1500y_3 \\
\text{s.t.} & & & & & & & \\
& 40y_1 & + & 30y_2 & + & 80y_3 & & \geq 2200 \\
& 80y_1 & + & 28y_2 & + & 80y_3 & & \geq 2250 \\
& & & + & 64y_2 & + & 80y_3 & \geq 1400 \\
& 100y_1 & & & + & 80y_3 & & \geq 1600 \\
& 60y_1 & & & + & 80y_3 & & \geq 800 \\
& y_1 & , & y_2 & , & y_3 & & \geq 0
\end{array}$$

Es wird ersichtlich, dass die Werte der rechten Seite nun in der Zielfunktion und die ursprünglichen Zielfunktionskoeffizienten in der rechten Seite erscheinen. Nach der Theorie der linearen Optimierung sind ein Modell und das entsprechende duale Modell eng verknüpft; aus der Lösung des Einen kann man die Lösung des Anderen ablesen.

Regeln zur Bildung eines dualen Modells:

Man betrachtet ein primales (ursprüngliches) LP-Modell, hier in Matrix-Notation, wobei keine Schlupfvariablen enthalten sind (jedes Modell kann in diese Form gebracht werden):

$$\begin{array}{l}
\text{(P)} \quad \max z = c^T x, \quad c, x \text{ sind } n\text{-Vektoren} \\
\text{s.t.} \quad Ax \leq b, \quad A \text{ ist } m \times n\text{-Matrix und } b \text{ ein } m\text{-Vektor,} \\
\quad \quad x \geq 0,
\end{array}$$

so dass x die Strukturvariablen, genannt primale Variablen, beinhaltet. Das folgende LP heißt das duale LP-Modell zu (P):

$$\begin{array}{l}
\text{(P')} \quad \min z' = b^T y, \quad y \text{ ist ein } m\text{-Vektor von sogenannten dualen Variablen} \\
\text{s.t.} \quad A^T y \geq c, \quad A^T \text{ ist die transponierte Matrix } A, \\
\quad \quad y \geq 0.
\end{array}$$

Dabei gelten die folgenden Transformationsregeln:

- Der Zielvektor c des primalen Modells wird zum „Kapazitäten-Vektor“ des dualen Modells.
- Der Kapazitäten-Vektor b des primalen Modells wird zum Zielvektor des dualen Modells.
- Bei primaler Maximierungsvorschrift ist die duale Zielfunktion zu minimieren.
- Die transponierte primale Koeffizienten-Matrix A^T ist die Koeffizienten-Matrix des dualen Modells. (Transposition einer Matrix: Spalten werden zu Zeilen und umgekehrt.)
- Bei \leq -Beschränkung des primalen Modells mit max-Zielfunktion sind die dualen Variablen vorzeichenbeschränkt ($y \geq 0$). Das Gleiche gilt für \geq -Beschränkung bei einer min-Zielfunktion.
- Bei primalen Gleichungsnebenbedingungen sind die entsprechenden dualen Variablen vorzeichenunbeschränkt, d. h. freie Variablen.

Die Lösung des dualen Modells für das obige Beispiel durch ClipMOPS liefert Abb. 2.24:

HF-Dual	Schleifen	Lackieren	Arbeiter	<i>TYP</i>	<i>RHS</i>					
<i>Min</i>	1200	720	1500							
<i>LB</i>										
<i>UB</i>										
<i>TYP</i>	<i>INF</i>	<i>INF</i>	<i>INF</i>							
	<i>CON</i>	<i>CON</i>	<i>CON</i>			<i>Activity</i>	<i>Name</i>	<i>Status</i>	<i>reduced Cost</i>	
Holz1	40	30	80	>=	2200	2200	Holz1	LB	7,5	
Holz2	80	28	80	>=	2250	2250	Holz2	LB	11,25	
Holz3		64	80	>=	1400	2150	Holz3	BS	0	
Holz4	100		80	>=	1600	2275	Holz4	BS	0	
Holz5	60		80	>=	800	2225	Holz5	BS	0	
<i>Activity</i>	1,25	0,00	26,88		41812,50					
<i>Name</i>	Schleifen	Lackieren	Arbeiter							
<i>Status</i>	BS	LB	BS							
<i>reduced Cost</i>	0	180	0							

Abb. 2.24. Lösung des dualen Modells in ClipMOPS

Die optimale Lösung des dualen Modells lautet: $y_1 = 1,25$, $y_2 = 0$, $y_3 = 26,875$, der Zielfunktionswert beträgt 41812,50 €. Es ist kein Zufall, dass der optimale Zielfunktionswert des dualen Problems identisch mit dem optimalen Zielfunktionswert des ursprünglichen – primalen – Problems ist! Dies ist eine Haupteigenschaft der Dualität von LP-Modellen (siehe unten).

Die Idee der Dualität zwischen den beiden o. g. Problemen kann man vielleicht in folgender Weise veranschaulichen: Wir nehmen an, dass eine Firma alle Ressourcen der o. g. Fabrik kaufen möchte. Welcher Preis soll dafür bezahlt werden? Da für den Käufer ein niedriger Preis günstiger ist, werden die Ressourcenkosten minimiert: y_1 , y_2 und y_3 sind Preise der Ressourceneinheiten von Schleifen bzw. Lackieren in €/Std. (Die entsprechenden Koeffizienten 1200, 720 und 1500 haben die Einheit Std., also ist die Zielfunktion in €.)

Damit sich der Verkauf für den Verkäufer lohnt, muss er/sie mindestens soviel verdienen, wie die Ressourcen bei der Produktion wert wären (sonst wäre es profitabler, weiter zu produzieren). Dies ergibt die \geq -Restriktionen des dualen Modells.

Wir haben eine Restriktion für jedes Produkt: Ressourcen sollen jeweils für alle Produkte mindestens soviel erbringen, wie die jeweiligen Produkte an Wert haben (Deckungsbeiträge). Die Restriktionen verstehen sich in €/Einh. Für jede Restriktion steht rechts der Preis eines Produkts, der von der linken Seite nicht unterschritten wird. Die Koeffizienten an der linken Seite stellen jeweils für jede Ressource die benötigten Maschinenstunden für das Produkt in Std./Einh. dar (da die y_i 's €/Std. als Einheit haben, erhalten wir insgesamt €/Einh.).

Dualitätseigenschaften in der Linearen Programmierung

Die folgenden Eigenschaften können mathematisch bewiesen werden:

- Das duale Modell des dualen Modells ist das primale Modell.
- Ist x zulässige Lösung für das primale Modell und y zulässige Lösung für das duale Modell in der o. g. Form, so gilt: $z = c^T x \leq b^T y = z'$. Denn $z = c^T x \leq (A^T y) x = (y^T A) x = y^T (A x) \leq y^T b = b^T y = z'$, dabei wurden die Restriktionen des dualen, dann des primalen Modells angewandt.
- Wenn eines der zueinander dualen Modelle eine optimale Lösung hat, so hat auch das dazu duale Modell eine optimale Lösung und die optimalen Zielfunktionswerte stimmen überein.
- Ist das primale Modell unbeschränkt, so hat das duale Modell keine zulässige Lösung.
- Hat das primale Modell keine zulässige Lösung, so hat das duale Modell keine optimale Lösung (das duale Modell kann unbeschränkt oder unzulässig sein).
- Die reduzierten Kosten der Schlupfvariablen einer optimalen Lösung eines primalen Problems sind identisch zu den Werten der Strukturvariablen der optimalen dualen Lösung.
- Analog entsprechen die reduzierten Kosten der dualen Schlupfvariablen den Werten der primalen Strukturvariablen.

Für praktische Zwecke ist es somit gleichgültig, ob man das ursprüngliche (primale) oder das duale Modell löst; manchmal ist das duale Modell schneller lösbar. Die Variante „duale Simplex“ des Simplex-Algorithmus sucht zuerst nach einer dual zulässigen Lösung („besser als optimal“) und verbessert dann schrittweise die Zulässigkeit der Lösung, bis er in einer für das duale und primale Problem zulässige Lösung gefunden hat. Dann ist man genau im Optimum gelandet! Oft ist der duale Simplex für Praxisprobleme schneller als der ursprüngliche primale Algorithmus. Dies ist insbesondere der Fall, wenn eine dual, aber nicht primal zulässige Basislösung als Anfangslösung bekannt ist.

2.9 Praxisbeispiele

2.9.1 Produktionsplanung bei Bottle Caps

Quelle: Prof. Dr. Danny C. Myers, Bowling Green State University, OH, USA

Die Firma Bottle Caps produziert Kunststoff-Verschlüsse für Erfrischungsgetränke. Um die Produktionsanlagen möglichst gleichmäßig auszulasten, läuft die Produktion möglichst über das ganze Jahr, obwohl die Nachfrage sehr stark saisonal schwankt und in den heißen Sommermonaten am höchsten ist. Es gibt zwar Prognosen über die Nachfrage bestimmter Getränke, aber das Konsumentenverhalten ist nicht wirklich vollständig vorhersehbar. Unter Umständen können bereits produzierte Verschlüsse nicht abgesetzt werden.

Somit ist die Haltbarkeit der Produkte zeitlich beschränkt. Auf der anderen Seite fallen die Lagerkosten an, falls im Vorrat produziert werden kann.

Für „Bottle Caps“ wurde ein lineares mehrperiodisches Optimierungsmodell aufgestellt, das die optimalen monatlichen Produktionsmengen aller Verschlussarten über ein Jahr bestimmt, so dass unter Befriedigung der prognostizierten Nachfrage die Gesamtkosten minimiert werden. Das Modell hat eine in Abb. 2.5 vorgestellte treppenartige Struktur, die Lagerhaltung berücksichtigt. Das Modell wird für jeden Monat mit aktualisierten Absatzprognosen neu berechnet. Somit wird das Prinzip der rollierenden Planung verfolgt.

Im Sinne eines Entscheidungsunterstützungssystems kann das Modell für What-If-Analysen mit unterschiedlichen Zahlen und Parametern genutzt werden.



In den Online-Lerneinheiten ist ein interaktives Modell enthalten, das die Manipulation von Parametern erlaubt und die Lösung mittels eines LP-Modells dazu individuell generiert.

Im Allgemeinen gibt es heutzutage eine Vielzahl von Produkten mit einer relativ kurzen Lebensdauer, sei es aufgrund von technologischen Änderungen (Computerspiele), physikalischem Verfall (Milch, Obst) oder Änderungen von Konsumentenpräferenzen (Musik, Mode). Solche Produkte sind nur begrenzt lagerungsfähig, müssen also auf Bedarf hin produziert werden. Wenn dieser über das Jahr konstant bzw. schon im Voraus bekannt ist, stellt das die Produzenten vor keine großen Probleme hinsichtlich ihrer Kapazitätsauslastung und Liefertreue. Das Beispielunternehmen Bottle-Caps produziert Kunststoffverschlüsse, welche auch als begrenzt haltbares Produkt gelten. Sie unterliegen zwar nicht einem physikalischen Verfall, müssen aber im Zuge von Werbekampagnen der Getränkehersteller im Design (Farbe, Schrift, etc.) angepasst werden und können somit nicht für unbegrenzte Zeit „produziert“ werden. Die Produktnachfrage kann über das Jahr (Monat, Woche) variieren, und auch die Produkthaltbarkeit ist nicht unbedingt festgelegt bzw. bekannt. Diese Tatsachen führen für die Hersteller grundsätzlich zu folgenden Problemen: 1. Wie groß ist die pro Jahr maximal absetzbare Menge bei bekannter Nachfrageverteilung und konstanter bekannter Produktlebensdauer, die mit den gegebenen Produktionsanlagen hergestellt werden können? 2. Führt eine Verlängerung der Produktlebensdauer zu einer Erhöhung dieser Menge?

2.9.2 Optimierung der Südzucker Rübenlogistik

Quelle: [Lukesch 2005]

Die Südzucker AG verarbeitet in Deutschland pro Jahr zehn Millionen Tonnen Zuckerrüben. Produziert wird an elf Standorten in der Zeit zwischen Mitte September und Ende Dezember. Auf Grund der unterschiedlichen Witterungsbedingungen in den Anbauregionen kommt es jedes Jahr zu unterschiedlichen

Rübenmengen in den Anbaugemeinden. Die Entscheidung über die Zuordnung der Rübenanbauflächen zu den elf Südzucker Verarbeitungswerken stellt sich jedes Jahr neu, da die unterschiedlichen Witterungsbedingungen in den Anbauregionen zu teilweise drastischen Unterschieden im Rübenenertrag führen. Das mit den Rübenbauern vertraglich vereinbarte Vergütungssystem für die Lieferung der Rüben zu einem bestimmten Zeitpunkt führt zu einer nichtlinearen Zielfunktion und einer komplexen Struktur von Nebenbedingungen, die das Optimierungssystem einzuhalten hat. Bei der Firma wurde ein Planungsmodell als lineares Programm formuliert, welches unter Berücksichtigung der vorhandenen Verarbeitungskapazitäten grundsätzlich ein kostenminimales Ergebnis liefert. Um die Nichtlinearitäten zu beherrschen, wurde ein iteratives Verfahren entwickelt, so dass durch das Lösen vieler LP hintereinander das nichtlineare Optimum mit einer gewünschten Genauigkeit erreicht werden kann.

2.10 Übungsaufgaben

Weitere Übungen und Lösungen befinden sich im Internet.



<http://dsor-lectures.upb.de/>



Aufgabe 2-1: Farbenfabrik

Ein Hersteller produziert zwei Arten von Farbe: Innen- und Außenfarbe, jeweils aus zwei Materialien: Grau und Weiss. Der Deckungsbeitrag beträgt für die Außenfarbe 5000 € und Innenfarbe 4000 € jeweils per 1000 kg Farbe.

Für die Produktion der Außenfarbe braucht man täglich 6000 kg graue und 1000 kg weiße Farbe; für die Innenfarbe täglich 4000 kg graue und 2000 kg weiße Farbe.

Insgesamt stehen aufgrund längerfristiger Lieferverträge der Produktion täglich 24.000 kg graue und 6000 kg weiße Farbe zur Verfügung.

Eine Marktanalyse besagt, dass der tägliche Absatz von Innenfarbe nicht mehr als 2000 kg beträgt (mehr sollte täglich nicht produziert werden). Weiterhin darf die täglich produzierte Menge von Innenfarbe nicht mehr als 1000 kg höher sein als die tägliche Produktionsmenge von Außenfarbe.

- a) Betrachten Sie diese Situation als eine Optimierungsaufgabe. Welche Art von Entscheidungen sollen getroffen werden? Mit anderen Worten, welche Entscheidungsvariablen gibt es? Wie lautet die Zielsetzung der Aufgabe? Welche Restriktionen gibt es?
- b) Formulieren Sie ein lineares Optimierungsmodell zur Lösung der Optimierungsaufgabe. Wählen Sie aussagekräftige Bezeichnungen für Variablen und Restriktionen.

- c) Lösen Sie das Modell grafisch; d. h. zeichnen Sie ein zweidimensionales Bild und bestimmen Sie mit dem Auge die optimale Lösung.
- d) Lösen Sie das Modell mit Hilfe des Simplex-Algorithmus.
- e) Geben Sie Ihre Lösung für den Entscheidungsträger als Handlungsempfehlung ab, d. h. beschreiben Sie in der natürlichen Sprache, welche Werte die Entscheidungsvariablen haben sollten und welcher Zielfunktionswert sich daraus ergibt.



Aufgabe 2-2: Gürtelbeispiel mit mehreren Produktionsstätten

Betrachten Sie das „Gürtelbeispiel“ aus Abschnitt 2.2. Obwohl Gürtel nur in ganzzahligen Mengen produziert werden können, sollen im Folgenden lineare Modelle mit kontinuierlichen Variablen genutzt werden. (Falls es fraktionale Lösungswerte gibt, werden sie gerundet.) Lösen Sie die folgenden Aufgaben:

- a) Das Unternehmen hat eine zweite Produktionslinie für Gürtel eingerichtet. Diese Linie braucht zur Herstellung von B-Gürteln nur 0,8 Zeiteinheiten (ZE). Für die Erstellung eines A-Gürtels werden weiterhin 2 ZE gebraucht. Linie 2 hat (zusätzlich zur ersten Linie) ebenfalls 800 Ledereinheiten, 1000 Zeiteinheiten, 400 Gürtelschnallen vom Typ A und 700 Gürtelschnallen vom Typ B zur Verfügung. Bestimmen Sie graphisch die optimalen Produktionsmengen für die Linie 2 (unabhängig von der Linie 1).
- b) Das Unternehmen möchte nun die Gesamtsituation verbessern, so dass beide Produktionslinien gemeinsam betrachtet werden. Die Komponenten Leder und Gürtelschnallen können beliebig zwischen beiden Produktionslinien verteilt werden. Die Ressource Zeit ist allerdings maschinenbedingt nicht übertragbar. Stellen Sie ein lineares Optimierungsmodell zur Bestimmung der optimalen Produktionsmengen pro Linie und Produkt auf. Der erzielte Deckungsbeitrag pro Gürteltyp ändert sich nicht.



Aufgabe 2-3: Gürtelbeispiel mit mehreren Perioden

Betrachten Sie das ursprüngliche „Gürtelbeispiel“ aus Abschnitt 2.2. Dort wurde implizit angenommen, dass die gesamte Produktion mit dem gegebenen Deckungsbeitrag verkauft werden kann. Wir möchten jedoch auch die maximal zu erzielenden Absatzmengen berücksichtigen.

Wir wandeln das (ursprüngliche) Gürtelbeispiel folgendermaßen um: Es werden zwei Perioden betrachtet (Sonderfall des mehrperiodischen Produktionsplanungsproblems). Zu Beginn der ersten Periode stehen jeweils 100 Stück vom Gürtel A und Gürtel B im Lager. Am Ende der zweiten Periode sollen ebenfalls 100 Stück jeweils von beiden Sorten im Lager stehen.

Wir können in der ersten Periode im Vorrat auch für die darauffolgende Periode produzieren; allerdings fallen dann Lagerhaltungskosten in Höhe von 20 Cent pro Gürtel und Periode an.

Die Restriktionen für Gürtelschnallen, Lederlieferungen und Maschinenkapazitäten bleiben im betrachteten Zeithorizont unverändert und gelten jeweils pro Periode.

Wir gehen davon aus, dass die Nachfrage vollständig bekannt ist und sich folgendermaßen verteilt:

Periode 1: Gürtel A 400 Stück und Gürtel B 400 Stück,
 Periode 2: Gürtel A 700 Stück und Gürtel B 300 Stück.

Stellen Sie ein lineares Optimierungsmodell für diese zweiperiodische Optimierungsaufgabe auf. Lösen Sie das Modell mit mathematischer Optimierungssoftware. Formulieren Sie die Lösung wieder als Handlungsanweisung in verständlicher Form.

2.11 Was sollte ich gelernt haben?



Bestandteile eines LP-Modells

Aus welchen Bestandteilen setzt sich ein LP-Modell zusammen und welche Eigenschaften haben diese?



Modelle ohne zulässige Lösung

Woran erkennt man im Simplex-Algorithmus, dass ein LP-Modell keine zulässige Lösung hat?



Modelle mit einer unbeschränkten optimalen Lösung

Woran erkennt man im Simplex-Algorithmus, dass die optimale Lösung eines Modells unbeschränkt ist?



Mehrdeutige Optimallösungen

Woran erkennt man bei der grafischen Lösung, dass ein LP-Modell mehrere optimale Lösungen hat?

Erkennt man dies direkt im Simplex-Algorithmus?



Degenerierte (entartete) Optimallösungen

Was heißt degenerierte Optimallösung? Woran erkennt man, dass eine optimale Lösung degeneriert ist: a) in der grafischen Lösung, b) im Simplex-Algorithmus?

Bemerkung: Beachten Sie, dass die Degeneriertheit keine seltene Eigenschaft ist, sondern bei sehr vielen großen Praxismodellen auftritt!

 *Maximierung oder Minimierung*

Warum ist es mathematisch äquivalent, Maximierung oder Minimierung zu betrachten?

 *Mehrere Produktionsstätten*

Welche grundsätzliche Struktur haben Produktionsplanungsmodelle mit mehreren Produktionsstätten?

 *Mehrere Perioden*

Welche grundsätzliche Struktur haben Produktionsplanungsmodelle mit mehreren Perioden?

Bemerkung: Beachten Sie, dass Optimierungsmodelle oft mit unterschiedlichen Zeithorizonten und Genauigkeiten gelöst werden: Für mehrere Jahre wird auf Monatebene eine Grobplanung durchgeführt, die durch Wochen- und Tagesmodelle verfeinert wird.

 *Grundbegriffe*

Welche Struktur hat das Standardformat eines LP-Modells? Welche Schritte werden bei der Umwandlung in das Standardformat durchgeführt?

Testen Sie Ihr Wissen und wandeln Sie das folgende Beispiel in das Standardformat um:

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s. t.} \\ x_1 + x_2 &\leq 4 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 5 \\ -x_1 + 2x_2 &\geq 2 \\ x_1 + 2x_2 &\geq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Was versteht man unter einer Basis im algebraischen und geometrischen Sinne? Was ist eine Basislösung?

Wieviele Basisvariablen gehören zur Basis eines LP-Modells im Standardformat?

Welche Eigenschaft haben die Werte der Basisvariablen?

Welche Eigenschaft haben die Werte der Nichtbasisvariablen?

Welche Besonderheit haben die Werte der Basis- bzw. Nichtbasisvariablen einer *degenerierten* Basislösung?

*Die Simplex-Methode*

Wie lautet die Grundidee der Simplex-Methode?

Aus welchen zwei Phasen besteht die Simplex-Methode?

Was versteht man unter einer Iteration?

Welche einzelnen Schritte führt man in jeder Iteration der Phase II durch?

Wie bildet man die Zielfunktion in jeder Iteration der Phase I?

Woran erkennt man, dass eine gegebene Basislösung optimal ist?

Woran erkennt man, dass es keine zulässige Lösung gibt?

*Sensitivitätsanalyse*

Warum hat die klassische Sensitivitätsanalyse heute kaum noch praktische Bedeutung?

*LP Modell vs. duales Modell:*

Welche Eigenschaft hat das duale Modell eines LP-Modells im Standardformat?

Warum kann das duale Modell statt des primalen gelöst werden?

Welche allgemeinen Transformationsregeln gelten?

Wie lautet das duale Modell des u. a. (primalen) LP-Modells?

$\max z = c^T x$ c, x sind n -Vektoren,

s.t. $Ax \leq b$, A ist $m \times n$ -Matrix und b ein m -Vektor

$x \geq 0$ x beinhaltet die Strukturvariablen, genannt primale Variablen

Wie lautet das duale Modell des oben unter „Grundbegriffe“ genannten Modells?