

Lineare Algebra

I Lineare Gleichungssysteme und Vektorräume

I.1 Beispiele für lineare Gleichungssysteme

In vielen Gebieten der Mathematik und ihrer Anwendungen muss man sich mit linearen Gleichungssystemen beschäftigen. Eine algebraische Gleichung heißt *linear*, wenn die Variablen x_1, x_2, \dots, x_n nur in der ersten Potenz und nicht als Produkte vorkommen, wenn die Gleichung also die Form $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = a$ hat. Die Koeffizienten a_1, a_2, \dots, a_n, a stammen dabei aus einem Zahlenbereich K , welcher wie die Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen einen *Körper* bildet, in welchem man also wie mit reellen Zahlen rechnen kann. Die Lösungen der Gleichung sind n -Tupel mit Elementen aus K , gehören also zu K^n . In den meisten Anwendungen ist K der Körper \mathbb{R} der reellen Zahlen oder der Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen (vgl. II.3). Sollen mehrere solche Gleichungen gleichzeitig erfüllt sein, dann liegt ein lineares Gleichungssystem vor. Da im Folgenden der Ausdruck „lineares Gleichungssystem“ sehr häufig vorkommt, wollen wir ihn mit „LGS“ abkürzen. Ein LGS mit n Variablen und m Gleichungen hat die Form

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= a_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= a_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= a_m \end{aligned}$$

Bei den Koeffizienten a_{ij} gibt der erste Index i die Nummer der Gleichung und der zweite Index j die Nummer der Variablen an. Ein LGS hat entweder keine Lösung, genau eine Lösung oder unendlich viele Lösungen, wie wir im Folgenden sehen werden. Die Lösungsmenge eines LGS ändert sich offensichtlich nicht, wenn man zwei Gleichungen vertauscht, eine Gleichung mit einer von 0 verschiedenen Zahl multipliziert oder das Vielfache einer Gleichung zu einer anderen addiert.

Beispiel 1: Edelstahl ist eine Legierung aus Eisen, Chrom und Nickel; beispielsweise besteht V2A-Stahl aus 74% Eisen, 18% Chrom und 8% Nickel. Aus den in nebenstehender Tabelle angegebenen Legierungen (1) bis (4) soll 1000 kg V2A-Stahl gemischt werden. Um die notwendigen Anteile x_1, x_2, x_3, x_4 von (1) bis (4) (in kg) zu bestimmen, muss man folgendes LGS lösen:

	(1)	(2)	(3)	(4)
Eisen	70%	72%	80%	85%
Chrom	22%	20%	10%	12%
Nickel	8%	8%	10%	3%

$$\begin{aligned} 0,70x_1 + 0,72x_2 + 0,80x_3 + 0,85x_4 &= 740 \\ 0,22x_1 + 0,20x_2 + 0,10x_3 + 0,12x_4 &= 180 \\ 0,08x_1 + 0,08x_2 + 0,10x_3 + 0,03x_4 &= 80 \end{aligned}$$

Multipliziert man alle Gleichungen mit 100, um Kommazahlen zu vermeiden, dann ergibt sich das LGS

$$\begin{aligned} 70x_1 + 72x_2 + 80x_3 + 85x_4 &= 74\,000 \\ 22x_1 + 20x_2 + 10x_3 + 12x_4 &= 18\,000 \\ 8x_1 + 8x_2 + 10x_3 + 3x_4 &= 8\,000 \end{aligned}$$

Subtrahiert man die dritte Gleichung von der zweiten und das 8fache der dritten Gleichung von der ersten, so erhält man das LGS

$$\begin{aligned} 6x_1 + 8x_2 + \mathbf{0}x_3 + 61x_4 &= 10\,000 \\ 14x_1 + 12x_2 + \mathbf{0}x_3 + 9x_4 &= 10\,000 \\ 8x_1 + 8x_2 + 10x_3 + 3x_4 &= 8\,000 \end{aligned}$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit 3 und subtrahiert dann von ihr das 2fache der zweiten Gleichung, so ergibt sich

$$\begin{aligned} -10x_1 + \mathbf{0}x_2 + \mathbf{0}x_3 + 165x_4 &= 10\,000 \\ 14x_1 + 12x_2 + \mathbf{0}x_3 + 9x_4 &= 10\,000 \\ 8x_1 + 8x_2 + 10x_3 + 3x_4 &= 8\,000 \end{aligned}$$

Wählt man nun für x_4 einen beliebigen Wert r , dann liefert die erste Gleichung $x_1 = \frac{33}{2}r - 1000$. Aus der zweiten Gleichung folgt damit $x_2 = -20r + 2000$. Aus der dritten Gleichung folgt schließlich $x_3 = \frac{5}{2}r$. Mit $r = 2s$ ist

$$x_1 = 33s - 1000, \quad x_2 = -40s + 2000, \quad x_3 = 5s, \quad x_4 = 2s.$$

Aufgrund des Sachzusammenhangs dürfen diese Werte nicht negativ sein, es muss also $\frac{1000}{33} \leq s \leq 50$ gelten; für jeden Wert von s in diesem Bereich ergibt sich eine Lösung des gestellten Problems. Beispielsweise ergibt sich mit $s = 40$:

$$x_1 = 320, \quad x_2 = 400, \quad x_3 = 200, \quad x_4 = 80.$$

Beispiel 2: Kennt man in einem Gleichstromnetz die Spannungen und die Widerstände, dann kann man die Stromstärken in den Widerständen mit Hilfe der beiden *kirchhoffschen Regeln* berechnen:

- In jedem Knotenpunkt des Netzes ist die Summe der Stromstärken der ankommenden Ströme gleich der Summe der Stromstärken der abfließenden Ströme.
- In jeder Masche des Netzes ist die Summe der Spannungen gleich der Summe der Produkte aus den (gerichteten) Stromstärken und den Widerständen.

Es sollen die Stromstärken I_1, I_2, \dots, I_5 (gemessen in Ampère) in dem Netz in Fig. 1 bestimmt werden.

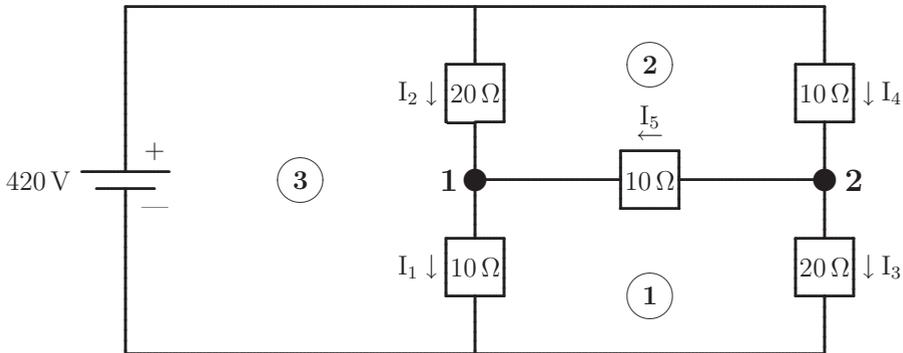


Fig. 1: Gleichstromnetz

$$\begin{array}{rclclcl}
 \text{Knoten 1:} & I_1 & - & I_2 & & - & I_5 & = & 0 \\
 \text{Knoten 2:} & & & & - & I_3 & + & I_4 & - & I_5 & = & 0 \\
 \text{Masche 1:} & 10I_1 & & & - & 20I_3 & & & + & 10I_5 & = & 0 \\
 \text{Masche 2:} & & & 20I_2 & & & - & 10I_4 & - & 10I_5 & = & 0 \\
 \text{Masche 3:} & 10I_1 & + & 20I_2 & & & & & & & = & 420
 \end{array}$$

Zunächst dividiert man die dritte, vierte und fünfte Gleichung durch 10. Subtrahiert man dann die erste Gleichung von der dritten und fünften, dann erhält man das LGS

$$\begin{array}{rclclcl}
 I_1 & - & I_2 & & & - & I_5 & = & 0 \\
 & & & - & I_3 & + & I_4 & - & I_5 & = & 0 \\
 & & I_2 & - & 2I_3 & & & + & 2I_5 & = & 0 \\
 & & 2I_2 & & & - & I_4 & - & I_5 & = & 0 \\
 & & 3I_2 & & & & & + & I_5 & = & 42
 \end{array}$$

Nun subtrahiert man das 2fache bzw. 3fache der dritten Gleichung von der vierten bzw. fünften und vertauscht dann noch die zweite mit der dritten Gleichung:

$$\begin{array}{rclclcl}
 I_1 & - & I_2 & & & - & I_5 & = & 0 \\
 I_2 & - & 2I_3 & & & + & 2I_5 & = & 0 \\
 & & - & I_3 & + & I_4 & - & I_5 & = & 0 \\
 & & & 4I_3 & - & I_4 & - & 5I_5 & = & 0 \\
 & & & 6I_3 & & & - & 5I_5 & = & 42
 \end{array}$$

Nun addiert man das 4fache bzw. 6fache der dritten Gleichung zur vierten bzw. fünften Gleichung:

$$\begin{array}{rclclcl}
 I_1 & - & I_2 & & & - & I_5 & = & 0 \\
 I_2 & - & 2I_3 & & & + & 2I_5 & = & 0 \\
 & & - & I_3 & + & I_4 & - & I_5 & = & 0 \\
 & & & & & 3I_4 & - & 9I_5 & = & 0 \\
 & & & & & 6I_4 & - & 11I_5 & = & 42
 \end{array}$$

Weitere derartige Umformungen (Multiplikation der dritten Gleichung mit -1 , Division der vierten Gleichung durch 3, Subtraktion des 6fachen der vierten Gleichung von der fünften, Division der fünften Gleichung durch 7) führen auf das LGS

$$\begin{array}{rccccrcr} I_1 & - & I_2 & & & - & I_5 & = & 0 \\ & & I_2 & - & 2I_3 & & + & 2I_5 & = & 0 \\ & & & & I_3 & - & I_4 & + & I_5 & = & 0 \\ & & & & & & I_4 & - & 3I_5 & = & 0 \\ & & & & & & & & I_5 & = & 6 \end{array}$$

Jetzt erhält man der Reihe nach aus der fünften, vierten, dritten, ... Gleichung $I_5 = 6$, $I_4 = 3I_5 = 18$, $I_3 = I_4 - I_5 = 12$, $I_2 = 2I_3 - 2I_5 = 12$, $I_1 = I_2 + I_5 = 18$.

Beispiel 3: Aus SiO_2 (Quarz) und NaOH (Natronlauge) entsteht Na_2SiO_3 (Natriumsilikat) und H_2O (Wasser). Die natürlichen Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4 in der Reaktionsgleichung



bestimmt man aus der Bedingung, dass jedes chemische Element Si, Na, O, H auf beiden Seiten der Reaktionsgleichung gleich oft auftreten muss; diese Zahlen sollen dabei so klein wie möglich sein. Es muss das LGS

$$\begin{array}{rccccrcr} x_1 & & & - & x_3 & & & = & 0 \\ & & x_2 & - & 2x_3 & & & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & & & - & 2x_4 & = & 0 \end{array}$$

gelöst werden. Wegen $x_1 = x_3$ (erste Gleichung) und $2x_3 = x_2 = 2x_4$ (zweite und vierte Gleichung) ergibt sich $x_3 = x_4$, womit auch die dritte Gleichung erfüllt ist: $2x_4 + 2x_4 - 3x_4 - x_4 = 0$. Mit $x_4 = r$ ist also

$$x_1 = r, \quad x_2 = 2r, \quad x_3 = r, \quad x_4 = r.$$

Die Lösung mit den kleinsten natürlichen Zahlen erhält man für $r = 1$.

Aufgaben

1. Die Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ einer Polynomfunktion

$$f : x \mapsto a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

vom Grad n sind eindeutig bestimmt, wenn man $n+1$ Wertepaare $(u, f(u))$ kennt. Man bestimme die Polynomfunktion f vom Grad 4 mit den Wertepaaren $(-2, 73), (-1, 22), (1, 10), (2, 37), (3, 158)$.

2. Man bestimme die Koeffizienten in der chemischen Reaktionsgleichung



3. Zwei Grundstoffe S_1, S_2 sind in den Mischungen A, B, C, D mit den in der Tabelle angegebenen Anteilen enthalten.

Es soll aus A, B, C, D eine Mischung hergestellt werden, welche S_1 mit 4% und S_2 mit 12% enthält. Man bestimme die möglichen Mischungsverhältnisse.

	A	B	C	D
S_1	6%	6%	3%	2%
S_2	15%	10%	15%	10%

4. Fig. 2 zeigt ein Einbahnstraßennetz mit der Anzahl von Fahrzeugen, die pro Zeiteinheit die einzelnen Straßenabschnitte passieren.

Ist die Anzahl der an einer Kreuzung ankommenden Fahrzeuge gleich der Anzahl der weggehenden, dann tritt kein Stau auf. Auf den Teilstrecken DC und CB sollen Ausbesserungsarbeiten vorgenommen werden. Wie viele Fahrzeuge müssen trotzdem diese Teilstrecken passieren? Was ist wohl die günstigste Lösung des Problems?

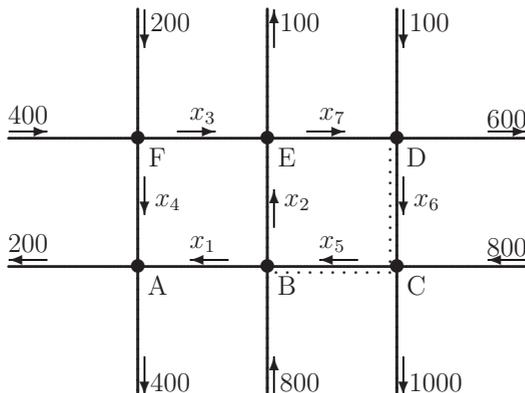


Fig. 2: Einbahnstraßennetz

I.2 Lösungsverfahren

Wie in den Beispielen 1 und 2 in I.1 kann man jedes LGS durch Vertauschen der Gleichungen, Multiplikation einer Gleichung mit einer Zahl $\neq 0$ und Addition einer Gleichung zu einer anderen auf *Stufenform* bringen, d. h. auf eine Form, in der jede Gleichung mindestens eine Variable enthält, die in den folgenden Gleichungen nicht mehr vorkommt. Genauer soll dabei gelten: Sind in einer Gleichung der Stufenform die ersten k Koeffizienten gleich 0, dann sind in der nächsten Gleichung (mindestens) die $k + 1$ ersten Koeffizienten gleich 0 (Fig. 1).

\$	*	*	*	*	*	*	...
0	0	0	\$	*	*	*	...
0	0	0	0	\$	*	*	...
0	0	0	0	0	0	\$...

\$: Koeffizient $\neq 0$
 0: Koeffizient 0
 *: Koeffizient beliebig

Fig. 1: Koeffizientenschema der Stufenform eines LGS

Die Umformungen, die zur Stufenform führen, ändern nichts an der Lösungsmenge des LGS. Man nennt sie daher *Äquivalenzumformungen*.

Die Lösungen eines LGS mit n Variablen sind n -Tupel. Um die Lösungen eines LGS übersichtlich darstellen zu können, schreiben wir n -Tupel als Spalten in Klammern und definieren eine Vervielfachung und eine Addition für n -Tupel:

$$r \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_1 \\ ra_2 \\ \vdots \\ ra_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

Damit lässt sich die Menge der Lösungen des LGS in Beispiel 1 folgendermaßen schreiben:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \\ -20 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + r_1 \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r_2 \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r_3 \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r_4 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r_5 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

($r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 \in \mathbb{R}$).

Die Ausführung von Äquivalenzumformungen wird übersichtlicher, wenn man sie statt an dem LGS nur an der *Koeffizientenmatrix* bzw. der *erweiterten Koeffizientenmatrix*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & a_m \end{array} \right)$$

des LGS durchführt. Kommt dabei eine Variable in einer Gleichung nicht vor, so hat sie den Koeffizient 0.

Beispiel 2: Die erweiterte Koeffizientenmatrix des LGS in Beispiel 2 aus I.1 lautet anfangs bzw. nach Herstellung der Stufenform

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 10 & 0 & -20 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & -10 & -10 & 0 \\ 10 & 20 & 0 & 0 & 0 & 420 \end{array} \right) \quad \text{bzw.} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right)$$

Hier lassen sich auch die Zahlen oberhalb der Diagonalen zu 0 machen (Addition eines geeigneten Vielfachen der letzten Zeile zu den anderen, dann der vorletzten

Zeile zu den anderen usw.). Es ergibt sich

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 18 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{array} \right) \quad \text{und damit} \quad \begin{array}{l} x_1 = 18 \\ x_2 = 12 \\ x_3 = 12 \\ x_4 = 18 \\ x_5 = 6 \end{array}.$$

Wir haben also gesehen, dass sich die erweiterte Koeffizientenmatrix eines LGS durch Äquivalenzumformungen stets auf die folgende *Stufenform* bringen lässt:

		n													
r	$\neq 0$	*	0	0	*	*	0	0	*	0	*	*	*	*	*
	0	0	$\neq 0$	0	*	*	0	0	*	0	*	*	*	*	*
	0	0	0	$\neq 0$	*	*	0	0	*	0	*	*	*	*	*
	0	0	0	0	0	0	$\neq 0$	0	*	0	*	*	*	*	*
	0	0	0	0	0	0	0	$\neq 0$	*	0	*	*	*	*	*
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\neq 0$	*	*	*	*	*
$n - r$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	*
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	*
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	*
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	*

In dem LGS in Beispiel 1, das schon in Stufenform gegeben war, ist $n = 8$ und $r = 3$, in Beispiel 2 ist $n = r = 6$.

Das LGS besitzt genau dann Lösungen, wenn in den letzten $n - r$ Gleichungen der Stufenform, in denen die Koeffizienten der Variablen alle 0 sind, auch in der Konstantenspalte 0 steht. Dann kann man die letzten $n - r$ Gleichungen („ $0 = 0$ “) weglassen. Verbleiben noch r Gleichungen, dann haben die Lösungen des LGS die Gestalt

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \dots + t_{n-r} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

mit $n - r$ frei wählbaren Parametern $t_1, t_2, \dots, t_{n-r} \in \mathbb{R}$.

Das alles lässt sich viel präziser darstellen, wenn wir im nächsten Abschnitt den Begriff des Vektorraums eingeführt haben.

Ein LGS in der in I.1 angegebenen Form heißt *homogen*, wenn $a_1 = a_2 = \dots = a_m = 0$ ist, wenn es also folgendermaßen aussieht:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= \mathbf{0} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= \mathbf{0} \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Andernfalls nennt man das LGS *inhomogen*.

Für ein homogenes LGS gilt offensichtlich: Jedes Vielfache einer Lösung ist wieder eine Lösung, und die Summe zweier Lösungen ist ebenfalls eine Lösung.

Aus einem inhomogenen LGS entsteht das *zugehörige homogene* LGS, indem man die Konstanten rechts vom Gleichheitszeichen durch 0 ersetzt. Die Differenz zweier Lösungen des inhomogenen LGS ist eine Lösung des zugehörigen homogenen LGS, wie man durch Einsetzen sofort sieht. Addiert man zu einer Lösung des inhomogenen Systems eine Lösung des homogenen Systems, so erhält man wieder eine Lösung des inhomogenen Systems. Kennt man also eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems, dann erhält man *alle* Lösungen als Summe dieser speziellen Lösung und einer Lösung des homogenen LGS.

Aufgaben

1. a) Man zeige, dass ein LGS entweder keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen besitzt.

b) Für welche Parameterwerte r, s hat das LGS $\begin{cases} 2x_1 + rx_2 = 3 \\ 4x_1 + 5x_2 = s \end{cases}$ keine Lösung, genau eine Lösung, unendlich viele Lösungen?

2. Man stelle ein LGS mit den drei Variablen x_1, x_2, x_3 auf, welches die Lösungen $(1 + 3r, 2 - r, 5 - 4r)$ ($r \in \mathbb{R}$) besitzt.

3. Die Lösungsmenge eines LGS kann auf verschiedene Arten dargestellt werden. Man zeige, dass

$$\{(r + 2s, r - s, 1 + 5s) \mid r, s \in \mathbb{R}\} = \{(p + 11q, 3p + 2q, -p + 20q) \mid p, q \in \mathbb{R}\}.$$

4. Man berechne die Lösungsmenge:

a)
$$\begin{aligned} x_1 + x_5 &= 2(x_2 + x_3) \\ x_2 + x_5 &= 3(x_3 + x_4) \\ x_3 + x_5 &= 4(x_4 + x_1) \\ x_4 + x_5 &= 5(x_1 + x_2) \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 + x_5 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_5 &= 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_5 &= 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 5 \end{aligned}$$

I.3 Der Begriff des Vektorraums

Zur Darstellung der Lösungen eines LGS haben wir in I.2 die Vervielfachung von n -Tupeln reeller Zahlen mit einer reellen Zahl und die Addition von n -Tupeln benutzt. Die n -Tupel bilden damit eine algebraische Struktur, welche ein Vektorraum im Sinn der folgenden Definition ist.

Definition 1: Es sei V eine nicht-leere Menge; als Variable für Elemente aus V benutzen wir die Bezeichnungen $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$

In V sei eine Verknüpfung $+$ definiert, so dass $(V, +)$ eine kommutative Gruppe ist, d.h. es gelten das Assoziativgesetz $((\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}))$ für alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ und das Kommutativgesetz $(\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a})$ für alle $\vec{a}, \vec{b} \in V$, es gibt ein neutrales Element \vec{o} ($\vec{a} + \vec{o} = \vec{o} + \vec{a} = \vec{a}$ für alle $\vec{a} \in V$) und jedes Element $\vec{a} \in V$ besitzt ein inverses Element (bezeichnet mit $-\vec{a}$). Ferner sei in V die Vervielfachung mit Elementen aus einem Körper K definiert; für $r \in K$ bezeichnet man das r -fache von \vec{a} mit $r\vec{a}$. (Das Nullelement und das Einselement von K bezeichnen wir wie in Zahlkörpern mit 0 bzw. 1.) Dabei soll für alle $r, s \in K$ und alle $\vec{a}, \vec{b} \in V$ gelten:

$$r(\vec{a} + \vec{b}) = r\vec{a} + r\vec{b}, \quad (r + s)\vec{a} = r\vec{a} + s\vec{a}, \quad r(s\vec{a}) = (rs)\vec{a}, \quad 1\vec{a} = \vec{a}.$$

(Dabei bedeutet in $\vec{a} + \vec{b}$ das Pluszeichen die Verknüpfung in V , in $r + s$ aber die Addition im Körper K .) Dann nennt man V einen K -Vektorraum. Die Elemente von V nennt man *Vektoren*. Das neutrale Element \vec{o} nennt man den *Nullvektor*, der Vektor $-\vec{a}$ heißt der *Gegenvektor* von \vec{a} . Statt $\vec{a} + (-\vec{b})$ schreibt man $\vec{a} - \vec{b}$. Zur Unterscheidung von den Vektoren nennt man die Elemente aus K *Skalare*.

Beispiel 1: Den \mathbb{R} -Vektorraum \mathbb{R}^n der n -Tupel reeller Zahlen haben wir schon in I.2 benötigt, um die Lösungen eines LGS darzustellen.

Beispiel 2: Die Folgen reeller Zahlen bilden ebenfalls einen \mathbb{R} -Vektorraum $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (Menge aller Abbildungen der Menge \mathbb{N} der natürlichen Zahlen in die Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen), wobei die Addition und Vervielfachung von Folgen durch $(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$ und $r(a_n) = (ra_n)$ definiert ist.

Beispiel 3: Die Matrizen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m,n}$$

mit m Zeilen und n Spalten (m, n -Matrizen) mit Elementen aus \mathbb{R} bilden einen \mathbb{R} -Vektorraum, wenn man die Addition und Vervielfachung in Anlehnung an die entsprechenden Operationen bei n -Tupeln folgendermaßen definiert:

$$(a_{ij})_{m,n} + (b_{ij})_{m,n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m,n}, \quad r(a_{ij})_{m,n} = (ra_{ij})_{m,n}.$$

Beispiel 4: Die Menge aller Funktionen auf einem reellen Intervall $[a; b]$ mit Werten in \mathbb{R} bildet einen \mathbb{R} -Vektorraum, wobei man für Funktionen f, g und $r \in \mathbb{R}$ definiert:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ und } (rf)(x) = rf(x) \text{ für alle } x \in [a; b].$$

Vektoren treten in der Geometrie in Gestalt von *Verschiebungen* (in der Ebene oder im Raum) auf. Solche Verschiebungen kann man hintereinanderausführen („addieren“) und mit reellen Faktoren vervielfachen, womit ein \mathbb{R} -Vektorraum entsteht. Vektoren treten auch in der Physik auf, etwa in Gestalt von Kräften, Beschleunigungen oder Geschwindigkeiten („gerichtete Größen“). Daraus erklärt sich die Bezeichnung „Vektor“ (lat. Träger, Fahrer).

Satz 1: In einem K -Vektorraum V gilt:

- (1) $r\vec{o} = \vec{o}$ für alle $r \in K$.
- (2) $0\vec{v} = \vec{o}$ für alle $\vec{v} \in V$.
- (3) $(-r)\vec{v} = -(r\vec{v})$ für alle $r \in K, \vec{v} \in V$.
- (4) Ist $r\vec{v} = \vec{o}$, dann ist $r = 0$ oder $\vec{v} = \vec{o}$.

Beweis: (1) In $r\vec{o} = r(\vec{o} + \vec{o}) = r\vec{o} + r\vec{o}$ addiere man $-r\vec{o}$.

(2) In $0\vec{v} = (0 + 0)\vec{v} = 0\vec{v} + 0\vec{v}$ addiere man $-0\vec{v}$.

(3) Aus $\vec{o} = (r + (-r))\vec{v} = r\vec{v} + (-r)\vec{v}$ folgt, dass $(-r)\vec{v}$ der Gegenvektor von $r\vec{v}$ ist, also $(-r)\vec{v} = -r\vec{v}$. (Es gilt also $-\vec{a} = (-1)\vec{a}$.)

(4) Ist $r\vec{v} = \vec{o}$ und $r \neq 0$, dann ist $\vec{o} = r^{-1}\vec{o} = r^{-1}(r\vec{v}) = (r^{-1}r)\vec{v} = 1\vec{v} = \vec{v}$. \square

Definition 2: Ist V ein K -Vektorraum und U eine Teilmenge von V , welche bezüglich der Addition und Vervielfachung in V wieder ein K -Vektorraum ist, dann nennt man U einen *Untervektorraum* oder *Unterraum* von V .

Ein Unterraum eines Vektorraums V ist nicht leer, denn er muss den Nullvektor \vec{o} enthalten. Genau dann ist U ein Unterraum von V , wenn mit $\vec{a}, \vec{b} \in U$ und $r \in K$ stets $\vec{a} + \vec{b} \in U$ und $r\vec{a} \in U$ gilt (*Unterraumkriterium*).

Beispiel 5: Die Menge der Lösungen eines homogenen LGS mit n Variablen und Koeffizienten aus dem Körper K bildet einen Unterraum von K^n , denn die Summe zweier Lösungen und jedes Vielfache einer Lösung sind wieder Lösungen.

Beispiel 6: Die Menge der konvergenten Folgen reeller Zahlen (vgl. IX.4) bildet einen Unterraum des \mathbb{R} -Vektorraums aller Folgen reeller Zahlen, denn die Summe zweier konvergenter Folgen und jedes Vielfache einer konvergenten Folge sind wieder konvergent.

Beispiel 7: Die Menge der 3,3-Matrizen mit reellen Einträgen, bei denen die Summen der Elemente in den Zeilen und Spalten alle den gleichen Wert haben, bildet einen Unterraum des \mathbb{R} -Vektorraums $\mathbb{R}^{3,3}$ aller 3,3-Matrizen mit reellen

Einträgen. Denn diese Eigenschaft überträgt sich auf die Summen und Vielfachen solcher Matrizen. Ein Beispiel für eine Matrix mit dieser Eigenschaft ist $\begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}$; hier hat die Summe der Zahlen in den Zeilen und Spalten immer den Wert 15. (Dies ist ein besonders schönes Exemplar aus dem Unterraum, denn die Einträge sind die natürlichen Zahlen von 1 bis 9 und auch die Diagonalen ergeben die Summe 15; es handelt sich um ein so genanntes magisches Quadrat.)

Beispiel 8: Die Menge der auf einem reellen Intervall I differenzierbaren Funktionen mit Werten in \mathbb{R} (vgl. X.2) bildet einen Unterraum aller auf I definierten Funktionen mit reellen Werten, denn die Summen und die Vielfachen differenzierbarer Funktionen sind wieder differenzierbar, wie man in der Analysis lernt.

Definition 3: Für Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ eines K -Vektorraums V nennt man die Summe $r_1\vec{a}_1 + r_2\vec{a}_2 + \dots + r_n\vec{a}_n$ mit $r_1, r_2, \dots, r_n \in K$ eine *Linearkombination* der Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$.

Eine Teilmenge U eines Vektorraums V ist offensichtlich genau dann ein Unterraum von V , wenn alle Linearkombinationen von Elementen aus U wieder zu U gehören.

Definition 4: Die Menge aller Linearkombinationen von Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ aus einem Vektorraum V nennt man das *Erzeugnis* von $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ und bezeichnet es mit $\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \rangle$.

Das Erzeugnis $\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \rangle$ ist ein Unterraum U von V , denn Summen und Vielfache von Linearkombinationen von $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ sind wieder Linearkombinationen von $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$. Man nennt dann die Menge $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ ein *Erzeugendensystem* von U .

Beispiel 9: Die homogene Gleichung $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ hat in \mathbb{R}^3 den Lösungsraum

$$\left\{ r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid r, s \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Beispiel 10: Das homogene LGS mit der Koeffizientenmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat in \mathbb{R}^3 nur die eine Lösung $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, also den nur aus dem Nullvektor bestehenden Lösungsraum $\langle \vec{o} \rangle$ (Nullraum).

Definition 5: Eine Menge A von Vektoren aus einem Vektorraum V heißt *linear unabhängig*, wenn eine Gleichung der Form

$$r_1\vec{a}_1 + r_2\vec{a}_2 + \dots + r_n\vec{a}_n = \vec{o} \quad \text{mit} \quad \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\} \subseteq A$$

nur mit $r_1 = r_2 = \dots = r_n = 0$ bestehen kann. Andernfalls heißt die Vektormenge *linear abhängig*.

Man sagt oft auch kurz (aber etwas ungenau), die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ seien linear unabhängig bzw. abhängig, obwohl das ja keine Eigenschaft der einzelnen Vektoren ist, sondern eine Eigenschaft der *Menge* dieser Vektoren.

Ist $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ linear abhängig, dann kann man mindestens einen der Vektoren \vec{a}_i als Linearkombination der anderen darstellen. Ist aber $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ linear unabhängig, dann ist das nicht möglich.

Beispiel 11: Die Vektormenge $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ aus \mathbb{R}^3 ist linear unabhängig,

denn aus $r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ folgt $r = s = 0$.

Beispiel 12: Die auf \mathbb{R} definierten Funktionen $x \mapsto \sin x$ und $x \mapsto \cos x$ sind linear unabhängig, denn aus $r \sin x + s \cos x = 0$ (Nullfunktion) folgt für $x = \frac{\pi}{2}$ bzw. $x = 0$ die Beziehung $r = s = 0$.

Beispiel 13: Die Vektormenge $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$ aus \mathbb{R}^3 ist linear

abhängig: $r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + r_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ bedeutet dasselbe wie

$$\begin{aligned} r_1 + 2r_2 + 3r_3 &= 0 \\ 2r_1 + r_3 + 2r_4 &= 0 \\ 3r_1 + 5r_2 + r_3 + 7r_4 &= 0 \end{aligned}$$

Die Koeffizientenmatrix dieses homogenen LGS mit den vier Variablen r_1, r_2, r_3, r_4 hat die Stufenform $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & -7 \\ 0 & 0 & 27 & -26 \end{pmatrix}$. Zweckmäßigerweise setzt man $x_4 = 27t$ ($t \in \mathbb{R}$) und erhält die Lösungen

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -40 \\ -19 \\ 26 \\ 27 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Es gilt also $-40 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 19 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + 26 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 27 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Beispiel 14: Die Polynome über \mathbb{R} vom Grad $\leq n$ bilden einen Vektorraum. Die Menge $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ ist linear unabhängig: Ist $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ das Nullpolynom, dann ist $p(0) = 0$, also $a_0 = 0$ und $p(x) = xq(x)$ mit $q(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \dots + a_nx^{n-1}$. Auch $q(x)$ muss das Nullpolynom sein, also ist $a_1 = 0$. So fortfahrend findet man $a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.

Definition 6: Es sei V ein Vektorraum und B eine linear unabhängige Teilmenge von V . Ist jeder Vektor aus V als Linearkombination von Vektoren aus B darstellbar, dann nennt man B eine *Basis* von V .

Ist V ein K -Vektorraum mit der Basis $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$, dann schreibt man auch

$$\vec{v} = v_1 \vec{b}_1 + v_2 \vec{b}_2 + \dots + v_n \vec{b}_n = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}_B \quad \text{oder kurz} \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in K^n$$

und nennt diese Spalte aus K^n den *Koordinatenvektor* von \vec{v} bezüglich der Basis B . Die Vektoren $v_i \vec{b}_i$ sind die *Komponenten*, die Zahlen v_i die *Koordinaten* des Vektors \vec{v} bezüglich der Basis B . Diese sind eindeutig durch \vec{v} bestimmt, denn die Basisdarstellung ist eindeutig: Aus

$$v_1 \vec{b}_1 + v_2 \vec{b}_2 + \dots + v_n \vec{b}_n = w_1 \vec{b}_1 + w_2 \vec{b}_2 + \dots + w_n \vec{b}_n$$

folgt $(v_1 - w_1) \vec{b}_1 + (v_2 - w_2) \vec{b}_2 + \dots + (v_n - w_n) \vec{b}_n = \vec{0}$, wegen der linearen Unabhängigkeit der Basisvektoren also $v_1 - w_1 = 0, v_2 - w_2 = 0, \dots, v_n - w_n = 0$.

Bei gegebener Basis wird das Rechnen in einem Vektorraum mit Hilfe der Koordinatenvektoren durchgeführt. Bei der Darstellung von Vektoren durch ihre Koordinatenvektoren muss man also wissen, auf welchem Platz die Koordinate zu einem gegebenen Basisvektor steht, man muss die Basisvektoren also anordnen (1. Basisvektor, 2. Basisvektor usw.). Man muss dann die Basis nicht als *Menge*, sondern als *Tupel* („geordnete Menge“) von Vektoren ansehen.

Ist V endlich erzeugt, d.h. existieren endlich viele Vektoren, deren Erzeugnis V ergibt, dann besitzt V auch eine Basis: Man wähle einfach unter den Erzeugendensystemen eines mit einer minimalen Anzahl von Vektoren. Ein solches ist linear unabhängig, denn wäre einer der Vektoren als Linearkombination der anderen darstellbar, dann könnte man ihn aus dem Erzeugendensystem streichen und erhielte eines mit einer kleineren Anzahl von Vektoren. Aus jedem Erzeugendensystem ergibt sich also eine Basis, indem man Vektoren aus ihm entfernt, welche von den übrigen linear abhängig sind.

Vektorräume, die nicht endlich erzeugt sind, können aber auch eine Basis besitzen. Beispielsweise bilden die Funktionen f_i mit $f_i(x) = x^i$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) eine Basis des Vektorraums aller ganzrationalen Funktionen auf \mathbb{R} .

Der folgende Satz enthält Eigenschaften von Basen eines endlich-erzeugten Vektorraums V , welche häufig benötigt werden. Teil (1) des Satzes besagt, dass man aus einer Basis B von V wieder eine Basis von V erhält, wenn man einen Vektor $\vec{b} \in B$ gegen eine Linearkombination von Vektoren aus B austauscht, falls der Koeffizient von \vec{b} in dieser Linearkombination nicht 0 ist. Aus (1) folgt Teil (2) des Satzes, dieser trägt den Namen *Austauschsatz*.

Satz 2: Der K -Vektorraum V habe die Basis $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$.

- (1) Aus einer Basis von V ergibt sich wieder eine Basis, wenn man zu einem der Basisvektoren eine Linearkombination der übrigen addiert.
- (2) Ist $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m\}$ eine lineare unabhängige Teilmenge von V , dann gibt es m Vektoren in B , die man durch $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m$ ersetzen kann. Insbesondere ist also jede n -elementige linear unabhängige Teilmenge von V eine Basis von V .
- (3) Jede linear unabhängige Teilmenge von V kann man durch weitere Elemente aus V zu einer Basis ergänzen.
- (4) Jede Basis von V enthält gleich viele Vektoren.

Beweis: (1) Ersetzt man \vec{b}_1 durch $r\vec{b}_1$ mit $r \neq 0$, dann ist

$$\vec{v} = v_1\vec{b}_1 + v_2\vec{b}_2 + \dots + v_n\vec{b}_n = \frac{v_1}{r}(r\vec{b}_1) + v_2\vec{b}_2 + \dots + v_n\vec{b}_n$$

und $\{r\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$ ist linear unabhängig. Ersetzt man \vec{b}_1 durch $\vec{b}_1 + \vec{b}_2$, dann ist

$$\vec{v} = v_1\vec{b}_1 + v_2\vec{b}_2 + \dots + v_n\vec{b}_n = v_1(\vec{b}_1 + \vec{b}_2) + (v_2 - v_1)\vec{b}_2 + \dots + v_n\vec{b}_n$$

und $\{\vec{b}_1 + \vec{b}_2, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$ ist linear unabhängig. Daraus ergibt sich die Behauptung.

(2) In der Darstellung von $\vec{u} \neq \vec{0}$ in der Basis B sei der Koeffizient u_i von \vec{b}_i von 0 verschieden. Dann ersetze man \vec{b}_i durch $u_i\vec{b}_i$ und addiere dann die Linearkombination $\sum_{j \neq i} u_j\vec{b}_j$ hinzu. Dann hat man \vec{b}_i durch \vec{u} ersetzt. Nach (1) ergibt sich wieder eine Basis. Diese Ersetzungen wiederhole man für die weiteren Vektoren $\vec{u} \in \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m\}$. Dabei findet man immer ein \vec{b}_i , dessen Koeffizient in der Darstellung von \vec{u} von 0 verschieden ist, weil andernfalls $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m\}$ linear abhängig wäre.

(3) Man ersetze gemäß (2) m Vektoren in einer Basis B durch die Vektoren der gegebenen linear unabhängigen Teilmenge.

(4) Als minimales Erzeugendensystem ist die Anzahl der Vektoren in einer Basis eindeutig festgelegt. Man entnimmt das aber auch der Aussage (1): Wären $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$ und $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m\}$ Basen mit $m < n$, dann hätte man bei Ersetzung von m der Vektoren der ersten Basis durch die m Vektoren der zweiten Basis noch $n - m$ Vektoren in der ersten Basis, welche Linearkombinationen der anderen Vektoren in der Basis sein müssten, was einen Widerspruch ergibt. \square

Da nach Satz 2 (4) zwei verschiedene Basen eines endlich-erzeugten Vektorraums gleich viele Elemente besitzen, ist folgende Definition erlaubt:

Definition 7: Die Anzahl der Elemente einer Basis eines endlich-erzeugten Vektorraums V nennt man die *Dimension* von V und bezeichnet sie mit $\dim V$. Die Dimension des Vektorraums $\{\vec{0}\}$ ist 0.

Beispiel 15: Der Vektorraum \mathbb{R}^n der n -Tupel reeller Zahlen hat die Dimension n . Eine Basis bilden z.B. die n -Tupel, deren Koordinaten alle den Wert 0 haben, bis auf eine, die den Wert 1 hat. Dies nennt man die *Standardbasis* von \mathbb{R}^n . Die Standardbasis von \mathbb{R}^n besteht also aus den Vektoren

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 16: Der Vektorraum $\mathbb{R}^{m,n}$ der m, n -Matrizen reeller Zahlen hat die Dimension $m \cdot n$. Eine Basis ist beispielsweise die Menge aller m, n -Matrizen, deren Einträge alle den Wert 0 haben, bis auf einen, der den Wert 1 hat.

Beispiel 17: Der Vektorraum $\mathbb{R}^{3,3}$ hat die Dimension 9. Diejenigen Matrizen aus $\mathbb{R}^{3,3}$, bei denen die Summen der Zahlen in den einzelnen Zeilen und Spalten den gleichen Wert haben, bilden einen Unterraum U . Dieser hat die Dimension 3, denn eine Basis von U ist z.B. (Aufgabe 6)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Beispiel 18: Die arithmetischen Folgen $(a + dn)$, also die Folgen der Form $a, a + d, a + 2d, a + 3d, \dots$, bilden einen 2-dimensionalen Unterraum des Vektorraums aller Folgen reeller Zahlen; eine Basis ist $\{(1), (n)\}$, wobei (1) die konstante Folge $1, 1, 1, \dots$ und (n) die Folge $1, 2, 3, \dots$ der natürlichen Zahlen ist.

Beispiel 19: Das homogene LGS

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 4x_4 - x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 7x_4 - 2x_5 &= 0 \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 5x_3 - 4x_4 + x_5 \\ x_1 + x_2 &= 2x_3 - 7x_4 + 2x_5 \end{aligned}$$

lässt sich umformen zu

$$\begin{aligned} x_1 &= x_3 - 17x_4 + 5x_5 \\ x_2 &= x_3 + 10x_4 - 3x_5 \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist

$$\left\{ x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -17 \\ 10 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right\},$$

also der von den drei genannten Lösungsvektoren erzeugte Unterraum U von \mathbb{R}^5 .

Die Vektoren in diesem Erzeugendensystem sind linear unabhängig, also hat der Lösungsraum U die Dimension 3. Ist umgekehrt U mit obigem Erzeugendensystem gegeben, dann kann man U als Lösungsraum eines LGS verstehen, nämlich eines LGS mit 5 Variablen, dessen Koeffizientenvektoren sich als Lösungen des folgenden homogenen LGS mit den Variablen a_1, a_2, \dots, a_5 ergeben:

$$\begin{array}{rcccccc} a_1 & + & a_2 & + & a_3 & & = & 0 \\ -17a_1 & + & 10a_2 & & + & a_4 & & = & 0 \\ 5a_1 & - & 3a_2 & & & + & a_5 & = & 0 \end{array}$$

Der Lösungsraum hat die Dimension 2, linear unabhängige Lösungen werden z. B. durch die Quintupel $(2, 3, -5, 4, -1)$ und $(1, 1, -2, 7, -2)$ gegeben. Es ergibt sich also ein homogenes LGS mit 5 Variablen und 2 Gleichungen, welches äquivalent zu dem eingangs betrachteten LGS ist. (Mit den angegebenen Quintupeln erhält man genau das eingangs gegebene LGS.)

Satz 3: Jeder Unterraum U der Dimension m von \mathbb{R}^n ist der Lösungsraum eines homogenen LGS mit $n - m$ Gleichungen.

Beweis: Es sei $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m\}$ eine Basis von U und \vec{u}_i habe die Koordinaten $u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{in}$ ($i = 1, \dots, m$). Der Lösungsraum W des homogenen LGS

$$\begin{array}{rcccccc} u_{11}y_1 & + & u_{12}y_2 & + & \dots & + & u_{1n}y_n & = & 0 \\ u_{21}y_1 & + & u_{22}y_2 & + & \dots & + & u_{2n}y_n & = & 0 \\ & & & & & & \vdots & & \\ u_{m1}y_1 & + & u_{m2}y_2 & + & \dots & + & u_{mn}y_n & = & 0 \end{array}$$

mit den Variablen y_1, y_2, \dots, y_n ändert sich nicht, wenn man das LGS durch Zeilenumformungen auf Stufengestalt bringt, man kann also $u_{ij} = 0$ für $j < i$ annehmen. Außerdem kann man durch Vertauschung der Variablen (also Vertauschung der Basisvektoren) erreichen, dass $u_{ii} \neq 0$, da $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m\}$ linear unabhängig ist. Schließlich können wir noch $u_{ii} = 1$ setzen und durch weitere Zeilenumformungen erreichen, dass $u_{ij} = 0$ für $i < j \leq m$. Das LGS hat dann folgende Form:

$$\begin{array}{rcccccc} y_1 & & & + & u_{1,m+1}y_{m+1} & + & \dots & + & u_{1n}y_n & = & 0 \\ & y_2 & & + & u_{2,m+1}y_{m+1} & + & \dots & + & u_{2n}y_n & = & 0 \\ & & y_3 & + & u_{3,m+1}y_{m+1} & + & \dots & + & u_{3n}y_n & = & 0 \\ & & & y_4 & + & u_{4,m+1}y_{m+1} & + & \dots & + & u_{4n}y_n & = & 0 \\ & & & & & & & & \vdots & & \\ & & & & y_m & + & u_{m,m+1}y_{m+1} & + & \dots & + & u_{mn}y_n & = & 0 \end{array}$$

Der Lösungsraum wird also erzeugt von den $n - m$ linear unabhängigen Vektoren $\vec{c}_{m+j} + \vec{e}_{m+j}$ ($j = 1, \dots, n - m$), wobei \vec{c}_{m+j} die Koordinaten $-u_{1,m+j}, -u_{2,m+j}, \dots, -u_{m,m+j}, 0, 0, \dots, 0$ hat. Der Lösungsraum hat also die Dimension $n - m$. Hat nun der Lösungsraum des eingangs gegebenen LGS die

Basis $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_{n-m}\}$ und hat \vec{w}_j die Koordinaten $w_{j1}, w_{j2}, \dots, w_{jn}$ ($j = 1, \dots, n - m$) dann sind die Vektoren \vec{u}_i Lösungen von

$$\begin{array}{cccccc} w_{11}x_1 & + & w_{12}x_2 & + & \dots & + & w_{1n}x_n & = & 0 \\ w_{21}x_1 & + & w_{22}x_2 & + & \dots & + & w_{2n}x_n & = & 0 \\ & & & & & & \vdots & & \\ w_{n-m,1}x_1 & + & w_{n-m,2}x_2 & + & \dots & + & w_{n-m,n}x_n & = & 0, \end{array}$$

Der Lösungsraum dieses LGS hat die Dimension $n - (n - m) = m$, also ist U der Lösungsraum dieses LGS. \square

Bezüglich einer gegebenen Basis des n -dimensionalen Vektorraums V lässt sich dieser mit \mathbb{R}^n identifizieren, indem man jedem Vektor aus V seinen Koordinatenvektor bezüglich der Basis zuordnet. Also gilt auch allgemeiner als in Satz 3:

Jeder Unterraum U eines endlich-dimensionalen K -Vektorraums V lässt sich als Lösungsraum eines homogenen LGS mit Koeffizienten aus K verstehen. Sollen dabei die Vektoren aus den Koeffizienten der Gleichungen linear unabhängig sein, dann besteht das LGS aus $\dim V - \dim U$ Gleichungen.

Aufgaben

1. Es sei $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ eine linear unabhängige Menge von Vektoren aus einem Vektorraum V . Man zeige, dass dann auch $\{\vec{a} + 2\vec{b}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}\}$ linear unabhängig ist.
2. Es sei P_n der Vektorraum der Polynome über \mathbb{R} vom Grad $\leq n$. Zeige, dass $\{1, 1 + x, (1 + x)^2, \dots, (1 + x)^n\}$ eine Basis von P_n ist.
3. Es sei \mathbb{Q} die Menge der rationalen Zahlen. Man zeige, dass die Zahlen

$$a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} \quad \text{mit} \quad a, b, c \in \mathbb{Q}$$

einen \mathbb{Q} -Vektorraum der Dimension 3 bilden.

4. a) Man beweise, dass die Schnittmenge zweier Unterräume eines Vektorraums V wieder ein Unterraum von V ist.
 b) Man beweise, dass die Vereinigungsmenge zweier Unterräume U_1, U_2 eines Vektorraums V nur dann wieder ein Unterraum von V ist, wenn $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$ gilt.
 c) Es seien U_1, U_2 zwei Unterräume des Vektorraums V . Man zeige, dass $\{\vec{u}_1 + \vec{u}_2 \mid \vec{u}_1 \in U_1, \vec{u}_2 \in U_2\}$ einen Untervektorraum W von V bildet. Unter welcher Voraussetzung ist für jeden Vektor $\vec{w} \in W$ die Darstellung $\vec{w} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ mit $\vec{u}_1 \in U_1, \vec{u}_2 \in U_2$ eindeutig?

5. Bildet die Menge der Matrizen $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ einen \mathbb{R} -Vektorraum? Welche Dimension hat dieser?

6. Man bestimme eine Basis des Lösungsraums des homogenen LGS

$$\begin{aligned}
 x_1 + x_2 + x_3 &= x_4 + x_5 + x_6 \\
 &= x_7 + x_8 + x_9 \\
 &= x_1 + x_4 + x_7 \\
 &= x_2 + x_5 + x_8 \\
 &= x_3 + x_6 + x_9 \\
 &= x_1 + x_5 + x_9 \\
 &= x_3 + x_5 + x_7
 \end{aligned}$$

Eine Lösung bestimmt ein *Zahlenquadrat*, bei welchem die Summen der Zahlen in den Zeilen, Spalten und Diagonalen alle den gleichen Wert haben (Fig. 1).

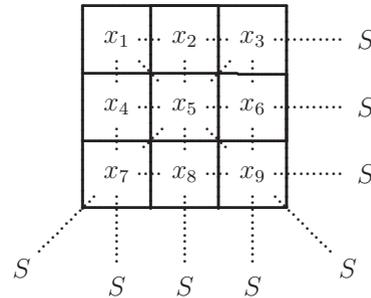


Fig. 1: Zahlenquadrat

I.4 Lineare Mannigfaltigkeiten

Die doch sehr abstrakten Begriffe aus I.3 und dem vorliegenden Abschnitt I.4 werden in I.5 geometrisch interpretiert, so dass man den Zusammenhang der linearen Algebra mit der analytischen Geometrie besser erkennt. Die hier behandelten linearen Mannigfaltigkeiten sind dann nicht anderes als Geraden in der Ebene bzw. Geraden und Ebenen im Raum.

Definition 1: Es sei V ein Vektorraum, $\vec{a} \in V$ und ferner U ein Unterraum von V . Die Menge aller Vektoren der Form $\vec{a} + \vec{u}$ mit $\vec{u} \in U$ bezeichnet man mit

$$\vec{a} + U$$

und nennt sie eine *lineare Mannigfaltigkeit*. Hat U die Dimension d , dann spricht man von einer d -dimensionalen linearen Mannigfaltigkeit.

Ist $\vec{a} \in U$, dann ist $\vec{a} + U = U$, denn dann gilt $\vec{a} + \vec{u} \in U$ für alle $\vec{u} \in U$. Ein Unterraum ist also eine spezielle lineare Mannigfaltigkeit.

Beispiel 1: Die Lösungsmenge eines inhomogenen LGS ist eine lineare Mannigfaltigkeit $\vec{a} + U$, wobei \vec{a} eine spezielle Lösung des inhomogenen LGS und U der Lösungsraum des zugehörigen homogenen LGS ist.

Satz 1: Es sei V ein n -dimensionaler K -Vektorraum. Jede m -dimensionale lineare Mannigfaltigkeit $\vec{a} + U$ aus V lässt sich als Lösungsmenge eines LGS über K mit $n - m$ Gleichungen verstehen.

Beweis: In V sei eine Basis B gegeben. Ferner sei $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m\}$ eine Basis von U und

$$\vec{u}_i = \begin{pmatrix} u_{i1} \\ u_{i2} \\ \vdots \\ u_{in} \end{pmatrix}_B \quad (i = 1, \dots, m), \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_B.$$

Der Unterraum U sei der Lösungsraum des homogenen LGS

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{n-m,1}x_1 + a_{n-m,2}x_2 + \dots + a_{n-m,n}x_n &= 0 \end{aligned}$$

(vgl. Satz 3 in I.3) und es sei

$$\begin{aligned} a_{11}a_1 + a_{12}a_2 + \dots + a_{1n}a_n &= b_1 \\ a_{21}a_1 + a_{22}a_2 + \dots + a_{2n}a_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n-m,1}a_1 + a_{n-m,2}a_2 + \dots + a_{n-m,n}a_n &= b_{n-m} \end{aligned}$$

Dann ist $\vec{a} + U$ die Lösungsmannigfaltigkeit des LGS

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n-m,1}x_1 + a_{n-m,2}x_2 + \dots + a_{n-m,n}x_n &= b_{n-m} \end{aligned} \quad \square$$

Satz 2: Ist U ein Unterraum des K -Vektorraums V , dann bildet die Menge $\{\vec{a} + U \mid \vec{a} \in V\}$ mit den Operationen

$$(\vec{a} + U) + (\vec{b} + U) = (\vec{a} + \vec{b}) + U \quad \text{und} \quad r(\vec{a} + U) = r\vec{a} + U$$

für $\vec{a}, \vec{b} \in V$ und $r \in K$ einen K -Vektorraum.

Beweis: Die Operationen in $\{\vec{a} + U \mid \vec{a} \in V\}$ sind wohldefiniert, d. h. sie führen unabhängig von den gewählten Vertretern \vec{a}, \vec{b} der linearen Mannigfaltigkeiten zum gleichen Ergebnis. Ist nämlich $\vec{a}' + U = \vec{a} + U$ und $\vec{b}' + U = \vec{b} + U$, also $\vec{a}' - \vec{a} \in U$ und $\vec{b}' - \vec{b} \in U$, dann ist

$$(\vec{a}' + \vec{b}') + U = (\vec{a} + \vec{b} + (\vec{a}' - \vec{a} + \vec{b}' - \vec{b})) + U = (\vec{a} + \vec{b}) + U.$$

Ist ferner $\vec{a}' + U = \vec{a} + U$, also $\vec{a}' - \vec{a} \in U$, dann ist

$$r\vec{a}' + U = (r\vec{a} + r(\vec{a}' - \vec{a})) + U = \vec{a} + U.$$

Man rechnet leicht nach, dass die Vektorraumaxiome in $\{\vec{a} + U \mid \vec{a} \in V\}$ erfüllt sind (Aufgabe 1). \square

Definition 2: Den Vektorraum aus Satz 2 bezeichnet man mit V/U (sprich „ V nach U “) und nennt ihn den *Quotientenraum* von V nach U .

Sind U_1, U_2 zwei Unterräume des Vektorraums V , dann bildet auch die Schnittmenge $U_1 \cap U_2$ einen Unterraum von V . Für die Vereinigungsmenge gilt das nicht: Mit $\vec{u}_1 \in U_1$ und $\vec{u}_2 \in U_2$ muss nicht $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 \in U_1 \cup U_2$ gelten. Der kleinste Unterraum, der U_1 und U_2 enthält, ist der im Folgenden definierte Unterraum $U_1 + U_2$ von V :

Definition 3: Für zwei Unterräume U_1, U_2 des Vektorraums V sei

$$U_1 + U_2 = \{\vec{u}_1 + \vec{u}_2 \mid \vec{u}_1 \in U_1, \vec{u}_2 \in U_2\}.$$

Offensichtlich ist $U_1 + U_2$ ein Unterraum von V , welcher U_1 und U_2 enthält, und es gibt keinen kleineren Unterraum von V mit dieser Eigenschaft.

Beispiel 2: $U_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ und $U_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ sind Unterräume von \mathbb{R}^3 . Für $\vec{v} \in U_1 \cap U_2$ gilt

$$\vec{v} = x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = y_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Das homogene LGS

$$\begin{array}{rcccc} 3x_1 & + & 5x_2 & - & 2y_1 & & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & & & - & 3y_2 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & y_1 & - & y_2 & = & 0 \end{array}$$

hat die Lösungen $x_1 = 11r$, $x_2 = r$, $y_1 = 19r$, $y_2 = 4r$ ($r \in \mathbb{R}$), die Vektoren in $U_1 \cap U_2$ sind also

$$11r \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 38 \\ 12 \\ 23 \end{pmatrix} \quad (r \in \mathbb{R}).$$

Die in Beispiel 2 angegebenen erzeugenden Vektoren von U_1 und U_2 erzeugen gemeinsam \mathbb{R}^3 , denn je drei von ihnen sind linear unabhängig. Also ist $U_1 + U_2 = \mathbb{R}^3$. Hier gilt also

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2).$$

Dies gilt auch allgemein (Aufgabe 3).

Analog zur Schnittmenge zweier Unterräume kann man die Schnittmenge zweier linearer Mannigfaltigkeiten aus einem Vektorraum V betrachten. Die Schnittmenge zweier Unterräume ist nie leer, da sie mindestens den Nullvektor enthält, die Schnittmenge zweier linearer Mannigfaltigkeiten kann aber leer sein.

Satz 3: Die Schnittmenge zweier linearer Mannigfaltigkeiten eines Vektorraums V ist leer oder selbst wieder eine lineare Mannigfaltigkeit von V .

Beweis: Sind zwei lineare Mannigfaltigkeiten jeweils als Lösungsmenge eines LGS gegeben, dann ist ihre Schnittmenge die Lösungsmenge desjenigen LGS, das durch Zusammenfügen der beiden gegebenen LGS entsteht. \square

In Verallgemeinerung der in Definition 3 gegebenen Summe von Unterräumen könnte man auch die Summe von linearen Mannigfaltigkeiten aus einem gegebenen Vektorraum V definieren: $(\vec{a} + U_1) + (\vec{b} + U_2) = (\vec{a} + \vec{b}) + (U_1 + U_2)$. Diese Summe enthält aber im Allgemeinen nicht die Summanden, es gilt also in der Regel $(\vec{a} + U_1), (\vec{b} + U_2) \not\subseteq (\vec{a} + \vec{b}) + (U_1 + U_2)$. Denn aus $\vec{a} + U_1 \subseteq (\vec{a} + \vec{b}) + (U_1 + U_2)$ folgt $U_1 \subseteq \vec{b} + (U_1 + U_2)$ und daraus $\vec{b} \in U_1 + U_2$ (wegen $\vec{o} \in \vec{b} + (U_1 + U_2)$), was aber nicht der Fall sein muss.

Definition 4: Es seien U_1, U_2 Unterräume eines Vektorraums V und $\vec{a}, \vec{b} \in V$. Die kleinste lineare Mannigfaltigkeit, welche $(\vec{a} + U_1)$ und $(\vec{b} + U_2)$ enthält, nennt man die *lineare Hülle* der beiden Mannigfaltigkeiten und bezeichnet sie mit

$$(\vec{a} + U_1) \vee (\vec{b} + U_2).$$

Satz 4: Für Unterräume U_1, U_2 eines Vektorraums V und $\vec{a}, \vec{b} \in V$ gilt

$$(\vec{a} + U_1) \vee (\vec{b} + U_2) = \vec{a} + (\langle \vec{b} - \vec{a} \rangle + U_1 + U_2).$$

Beweis: Für $\vec{u}_1 \in U_1, \vec{u}_2 \in U_2$ gilt

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{u}_1 &= \vec{a} + \vec{o} + \vec{u}_1 + \vec{o} \in \vec{a} + (\langle \vec{b} - \vec{a} \rangle + U_1 + U_2), \\ \vec{b} + \vec{u}_2 &= \vec{a} + (\vec{b} - \vec{a}) + \vec{o} + \vec{u}_2 \in \vec{a} + (\langle \vec{b} - \vec{a} \rangle + U_1 + U_2), \end{aligned}$$

also

$$\vec{a} + U_1, \vec{b} + U_2 \subseteq \vec{a} + (\langle \vec{b} - \vec{a} \rangle + U_1 + U_2).$$

Ist umgekehrt $(\vec{a} + U_1) \vee (\vec{b} + U_2) = \vec{c} + W$, dann ist

$$\vec{a} - \vec{c} + U_1 \subseteq W \quad \text{und} \quad \vec{b} - \vec{c} + U_2 \subseteq W,$$

also $\vec{a} - \vec{c}, \vec{b} - \vec{c} \in W$ und damit $\vec{b} - \vec{a} \in W$, also auch $\langle \vec{b} - \vec{a} \rangle \subseteq W$. Weil auch $U_1, U_2 \subseteq W$ gilt, ist insgesamt $\langle \vec{b} - \vec{a} \rangle + U_1 + U_2 \subseteq W$. \square

Ist $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ linear abhängig, dann ist $(\vec{a} + U_1) \vee (\vec{b} + U_2)$ der Unterraum $\langle \vec{a} \rangle + U_1 + U_2$ (Aufgabe 6).

Beispiel 3: Im \mathbb{R}^3 kann man $\vec{a} + \langle \vec{u} \rangle$ und $\vec{b} + \langle \vec{v} \rangle$ mit $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{o}$ als Geraden deuten (vgl. I.5). Die lineare Hülle

$$\vec{a} + (\langle \vec{b} - \vec{a} \rangle + \langle \vec{u} \rangle + \langle \vec{v} \rangle)$$

ist dann

- \mathbb{R}^3 , falls $\{\vec{b} - \vec{a}, \vec{u}, \vec{v}\}$ linear unabhängig ist,
- die Ebene $\vec{a} + \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, falls $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ linear unabhängig und $\vec{b} - \vec{a} \in \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ ist (Ebene durch zwei sich schneidende Geraden),
- die Ebene $\vec{a} + \langle \vec{b} - \vec{a}, \vec{v} \rangle$, falls $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ linear abhängig und $\{\vec{b} - \vec{a}, \vec{v}\}$ linear unabhängig ist (Ebene durch parallele Geraden),
- die Gerade $\vec{a} + \langle \vec{u} \rangle$, falls $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ linear abhängig und $\vec{b} - \vec{a} \in \langle \vec{u} \rangle$ ist.

In I.5 werden diese geometrischen Aspekte weiter behandelt.

Aufgaben

1. Man zeige, dass in V/U (vgl. Satz 2) die Vektorraumaxiome erfüllt sind.

2. Es sei $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$ und $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Man stelle $\vec{a} + U$ als Lösungsmannigfaltigkeit eines LGS dar.

3. Man zeige, dass für alle Unterräume U_1, U_2 eines endlichdimensionalen Vektorraus V gilt:

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$$

4. Man zeige, dass die Schnittmenge zweier verschiedener 2-dimensionaler linearer Mannigfaltigkeiten aus \mathbb{R}^3 entweder leer oder eine eindimensionale lineare Mannigfaltigkeit ist.

5. Man zeige, dass für $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{u}, \vec{v} \in V$ genau dann

$$(\vec{a} + \langle \vec{u} \rangle) \vee (\vec{b} + \langle \vec{v} \rangle) = \vec{c} + \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

gilt, wenn $(\vec{a} + \langle \vec{u} \rangle) \cap (\vec{b} + \langle \vec{v} \rangle) \neq \emptyset$ ist.

6. Man beweise: Ist $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ linear abhängig, dann ist $(\vec{a} + U_1) \vee (\vec{b} + U_2)$ der Unterraum $\langle \vec{a} \rangle + U_1 + U_2$.

I.5 Geometrische Interpretation

In einem ebenen Koordinatensystem, das wir uns ohne Beschränkung der Allgemeinheit als ein kartesisches Koordinatensystem vorstellen dürfen, kann man jeden Punkt (p_1, p_2) durch seinen *Ortsvektor*

$$\vec{OP} = \vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

darstellen und so dem „Punktraum“, der aus allen Zahlenpaaren besteht, die Vektorraumstruktur von \mathbb{R}^2 aufprägen. Allgemeiner ordnet man einem Punktepaar $A(a_1, a_2), B(b_1, b_2)$ den *Vektor*

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix} = \vec{b} - \vec{a}$$

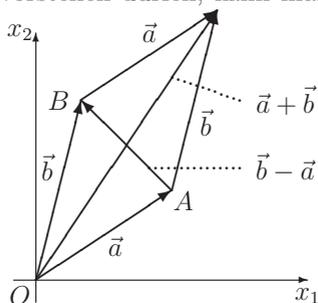


Fig. 1: Vektorpfeile

zu. Vektoren stellt man bildlich als Pfeile („Vektorpfeile“) dar, wobei alle gleich langen und gleich gerichteten Pfeile den gleichen Vektor darstellen (Fig. 1). So wird es möglich, geometrische Sachverhalte in der Ebene mit Hilfe von Vektoren aus \mathbb{R}^2 zu beschreiben.

Ist $\vec{u} \neq \vec{o}$, dann ist die Menge aller Punkte mit den Ortsvektoren

$$\vec{x} = \vec{p} + t\vec{u} \quad (t \in \mathbb{R})$$

die Gerade durch den Punkt P (mit dem Ortsvektor \vec{p}) und dem *Richtungsvektor* \vec{u} (Fig. 2). Diese Gerade ist also die eindimensionale lineare Mannigfaltigkeit $\vec{p} + \langle \vec{u} \rangle$ aus \mathbb{R}^2 .

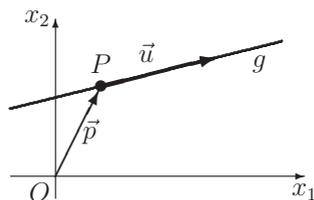


Fig. 2: Geradengleichung

In gleicher Weise kann man in einem räumlichen Koordinatensystem geometrische Sachverhalte mit Hilfe von Vektoren aus \mathbb{R}^3 beschreiben.

Ist $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$ und U ein Unterraum von \mathbb{R}^3 , dann ist $\vec{p} + U$ eine Gerade durch den Punkt P (mit dem Ortsvektor \vec{p}) oder eine Ebene durch den Punkt P , wenn U die Dimension 1 oder 2 hat. Im ersten Fall ist $U = \langle \vec{u} \rangle$ mit $\vec{u} \neq \vec{o}$ und \vec{u} heißt der *Richtungsvektor* der Geraden, im zweiten Fall ist $U = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, wobei $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ linear unabhängig ist, und \vec{u}, \vec{v} heißen *Spannvektoren* der Ebene (Fig. 3).

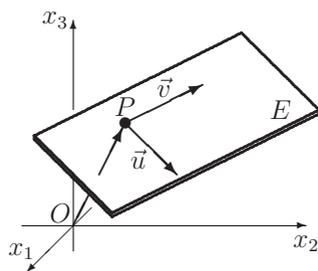


Fig. 3: Ebenengleichung

Die Berechnung des Schnittpunkts zweier Geraden, des Durchstoßpunktes einer Geraden durch eine Ebene oder der Schnittgeraden zweier Ebenen bedeutet nun die Bestimmung der Schnittmengen zweier linearer Mannigfaltigkeiten. Die Berechnung einer Ebene durch zwei Geraden oder einer Ebene durch einen Punkt und eine Gerade bedeutet die Bestimmung der linearen Hülle zweier linearer Mannigfaltigkeiten. In den folgenden Beispielen sind \vec{p} , $\vec{p} + \langle \vec{u} \rangle$, $\vec{p} + \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ lineare Mannigfaltigkeiten der Dimension 0 bzw. 1 bzw. 2 aus \mathbb{R}^3 .

Beispiel 1 (Durchstoßpunkt einer Geraden durch eine Ebene): Es soll der Schnittpunkt der Geraden g und der Ebene E bestimmt werden:

$$g : \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad E : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Dazu muss man die Gleichung $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

bzw. das LGS $\left\{ \begin{array}{l} 2+r = 1+2s-t \\ 2-r = 1-t \\ 1+r = 5+s+3t \end{array} \right\}$ lösen: $r = -\frac{1}{3}$, $s = -\frac{1}{3}$, $t = -\frac{4}{3}$

Der Durchstoßpunkt hat den Ortsvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$, welcher sich natürlich auch in der Form $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ ergibt.

Beispiel 2 (Schnittgerade zweier Ebenen): Es soll die Schnittgerade der Ebenen E_1 und E_2 bestimmt werden:

$$E_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad E_2 : \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Dazu muss man die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bzw. das LGS $\left\{ \begin{array}{l} 1+r+s = 2+2u \\ s = 3+t \\ 3 = 2+t+u \end{array} \right\}$ lösen: $t = 1 - u$, $s = 4 - u$,

$r = -3 - 3u$. Die Schnittgerade ist also die lineare Mannigfaltigkeit

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Beispiel 3 (Ebene durch Punkt und Gerade): Die lineare Hülle von $\vec{p} = \vec{p} + \langle \vec{o} \rangle$ (Punkt) und $\vec{q} + \langle \vec{u} \rangle$ mit $\vec{u} \neq \vec{o}$ (Gerade) ist $\vec{p} + \langle \vec{q} - \vec{p}, \vec{u} \rangle$ (Ebene), falls $\vec{q} - \vec{p} \notin \langle \vec{u} \rangle$ (falls also der Punkt nicht auf der Geraden liegt). Beispielsweise ist

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \vee \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle \right) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Aufgaben

1. Man zeige in Ergänzung zu Beispiel 3, dass der dort angegebene Punkt nicht auf der angegebenen Geraden liegt.
2. Es seien zwei Geraden $\vec{p} + \langle \vec{u} \rangle$ und $\vec{q} + \langle \vec{v} \rangle$ in \mathbb{R}^3 gegeben. Man zeige:

$$(\vec{p} + \langle \vec{u} \rangle) \cap (\vec{q} + \langle \vec{v} \rangle) = \emptyset \iff (\vec{p} + \langle \vec{u} \rangle) \vee (\vec{q} + \langle \vec{v} \rangle) = \mathbb{R}^3$$

(Im vorliegenden Fall nennt man die Geraden *windschief*.)

3. a) Auf zwei windschiefen Geraden (vgl. Aufgabe 2) seien jeweils zwei verschiedene Punkte A, B bzw. C, D gegeben. Man zeige, dass dann auch die Geraden durch A, C und durch B, D windschief sind.
 b) Besitzt das Viereck mit den Ecken $A(1, 2, -1)$, $B(5, -3, 0)$, $C(0, 4, 1)$, $D(1, 0, 1)$ einen Diagonalschnittpunkt?

I.6 Konvexe Mengen

Sind zwei Punkte A, B durch ihre Ortsvektoren \vec{a}, \vec{b} gegeben, dann beschreiben die Ortsvektoren

$$r\vec{a} + s\vec{b} \quad \text{mit } r, s \geq 0 \quad \text{und } r + s = 1$$

die Punkte der Strecke AB (Fig. 1), denn

$$r\vec{a} + s\vec{b} = (1-s)\vec{a} + s\vec{b} = \vec{a} + s(\vec{b} - \vec{a}).$$

Jedem Zahlenpaar (r, s) mit $r, s \geq 0$ und $r + s = 1$ ist eindeutig ein Punkt P der Strecke AB zugeordnet und umgekehrt bestimmt ein Punkt der Strecke eindeutig ein solches Zahlenpaar.

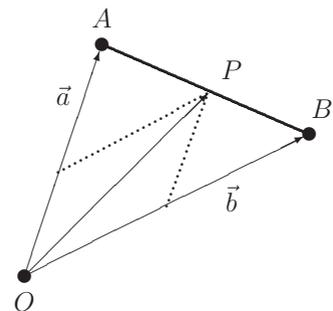


Fig. 1: Strecke AB

Sind drei Punkte A, B, C durch ihre Ortsvektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ gegeben, dann beschreiben die Ortsvektoren

$$r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} \quad \text{mit } r, s, t \geq 0 \quad \text{und } r + s + t = 1$$

die Punkte der Dreiecksfläche ABC (Fig. 2), denn

$$r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} = (1 - s - t)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} = \vec{a} + s(\vec{b} - \vec{a}) + t(\vec{c} - \vec{a}).$$

Für $r = 0$ ergeben sich die Punkte der Seite BC , für $s = 0$ bzw. $t = 0$ die der Seite AC bzw. AB . Ein Punkt der Dreiecksfläche und das Zahlentripel (r, s, t) mit obigen Eigenschaften bestimmen sich gegenseitig eindeutig.

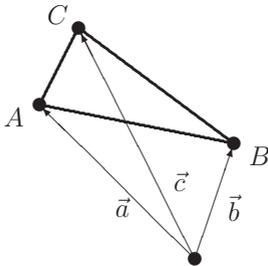


Fig. 2: Dreieck ABC

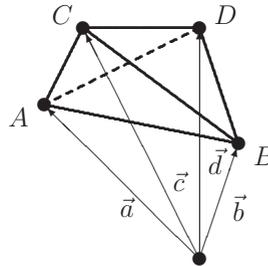


Fig. 3: Tetraeder $ABCD$

Sind vier Punkte A, B, C, D im Raum durch ihre Ortsvektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ gegeben, dann beschreiben die Ortsvektoren

$$r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} + u\vec{d} \quad \text{mit } r, s, t, u \geq 0 \quad \text{und } r + s + t + u = 1$$

die Punkte eines Tetraeders $ABCD$ (Fig. 3), denn

$$r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} + u\vec{d} = (1 - s - t - u)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} + u\vec{d} = \vec{a} + s(\vec{b} - \vec{a}) + t(\vec{c} - \vec{a}) + u(\vec{d} - \vec{a}).$$

Für $r = 0$ ergeben sich die Punkte der Dreiecksfläche BCD , für $r = s = 0$ die Punkte der Strecke CD .

Definition 1: Eine Punktmenge M heißt *konvex*, wenn für alle $P, Q \in M$ auch die Punkte der Strecke PQ zu M gehören.

Die Strecke AB , die Dreiecksfläche ABC und das Tetraeder $ABCD$ sind Beispiele für konvexe Punktmenge. Geraden, Halbgeraden, Ebenen und Halbebenen sind ebenfalls Beispiele für konvexe Punktmenge.

Satz 1: Die Schnittmenge von konvexen Mengen ist wieder konvex.

Beweis: Sind M_1, M_2 konvexe Mengen, dann gilt für $P, Q \in M_1 \cap M_2$ sowohl $PQ \subseteq M_1$ als auch $PQ \subseteq M_2$, also $PQ \subseteq M_1 \cap M_2$. \square

Definition 2: Für $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$ nennt man die Linearkombination

$$r_1 \vec{a}_1 + r_2 \vec{a}_2 + \dots + r_k \vec{a}_k \quad \text{mit } r_1, r_2, \dots, r_k \geq 0 \text{ und } r_1 + r_2 + \dots + r_k = 1$$

eine *Konvexkombination* von $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$. Die Menge aller Konvexkombinationen von $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ nennt man die *konvexe Hülle* der Menge dieser Vektoren. Für k Punkte mit den Ortsvektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ nennt man die Menge der Punkte mit Ortsvektoren aus der konvexen Hülle von $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ die *konvexe Hülle* dieser Punktmenge.

Satz 2: Die konvexe Hülle einer endlichen Menge von Punkten aus \mathbb{R}^n ist konvex.

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} & r(r_1 \vec{a}_1 + r_2 \vec{a}_2 + \dots + r_k \vec{a}_k) + s(s_1 \vec{a}_1 + s_2 \vec{a}_2 + \dots + s_k \vec{a}_k) \\ &= (rr_1 + ss_1) \vec{a}_1 + (rr_2 + ss_2) \vec{a}_2 + \dots + (rr_k + ss_k) \vec{a}_k. \end{aligned}$$

Aus $r, s, r_i, s_i \geq 0$ folgt $rr_i + ss_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, k$), und aus $r + s = 1$ und $r_1 + r_2 + \dots + r_k = s_1 + s_2 + \dots + s_k = 1$ folgt

$$\begin{aligned} & (rr_1 + ss_1) + (rr_2 + ss_2) + \dots + (rr_k + ss_k) \\ &= r(r_1 + r_2 + \dots + r_k) + s(s_1 + s_2 + \dots + s_k) = r \cdot 1 + s \cdot 1 = 1. \quad \square \end{aligned}$$

Die konvexe Hülle von k Punkten der Ebene ist ein konvexes Polygon mit k Ecken. Die konvexe Hülle von k Punkten im Raum ist ein konvexes Polyeder mit k Ecken. Dabei können Ecken auch „entartet“ sein, wenn sie z.B. auf der Verbindungsstrecke zweier Nachbarecken liegen. Die konvexe Hülle von k Punkten des \mathbb{R}^n mit den Ortsvektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ nennt man einen $(k-1)$ -dimensionalen *Simplex*, wenn $\{\vec{a}_2 - \vec{a}_1, \vec{a}_3 - \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k - \vec{a}_1\}$ linear unabhängig ist. Simplexe im Raum sind Strecken, Dreiecksflächen und Tetraederkörper. Der Simplexbegriff ist für die lineare Optimierung (Kapitel VIII) von Bedeutung (Simplexmethode). Dort untersucht man Simplexe bzw. allgemeiner konvexe k -dimensionale Polyeder, die sich als Lösungsmenge linearer Ungleichungssysteme ergeben.

Satz 3: Die Lösungsmenge des linearen Ungleichungssystems

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\leq b_m \end{aligned}$$

bildet eine konvexe Teilmenge von \mathbb{R}^n .

Beweis: Die Lösungsmenge des Ungleichungssystems ist die Schnittmenge der Lösungsmengen der einzelnen Gleichungen. Nach Satz 1 muss also nur gezeigt werden, dass die Lösungsmenge einer einzelnen Ungleichung konvex ist. Dies folgt für zwei Lösungen \vec{x}, \vec{y} aus

$$\begin{aligned}
 & a_1(rx_1 + sy_1) + a_2(rx_2 + sy_2) + \dots + a_n(rx_n + sy_n) \\
 & = r(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n) + s(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n) \leq (r + s)b = b,
 \end{aligned}$$

falls $r, s \geq 0$ und $r + s = 1$. □

Satz 3 gilt natürlich auch, wenn statt der \leq -Zeichen bei einigen oder allen der Ungleichungen $\geq, =, <$ oder $>$ steht.

Beispiel 1: Die Lösungsmenge des Ungleichungssystems

$$\begin{aligned}
 3x_1 + 2x_2 &\geq 14 \\
 x_1 - 4x_2 &\leq 0 \\
 4x_1 - 3x_2 &\leq 26 \\
 x_1 + 6x_2 &\leq 47 \\
 x_1 - x_2 &\geq -2
 \end{aligned}$$

kann in der Ebene als Schnittmenge von fünf Halbebenen gedeutet werden. Die Lösungsmenge bildet ein Fünfeck (Fig. 4).

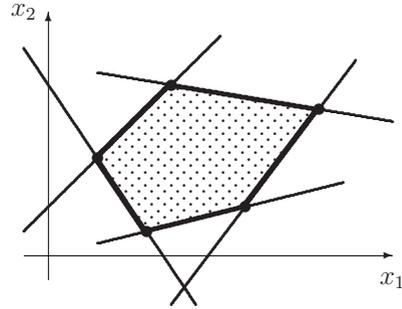


Fig. 4: Zu Beispiel 1

Aufgaben

1. Es seien A, B, C, D Punkte der Ebene mit den Ortsvektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$. Welche geometrische Bedeutung haben die Punkte mit den Ortsvektoren

$$\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}, \quad \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}, \quad \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c} + \frac{1}{4}\vec{d} \quad ?$$

2. In der Ebene sei ein konvexes Viereck $ABCD$ durch die Ortsvektoren der Ecken gegeben. Man zeige, dass die Darstellung des Ortsvektors eines Punktes der Vierecksfläche als Konvexkombination der Ortsvektoren der Ecken i. Allg. nicht eindeutig ist.
3. Man beschreibe die Vierecksfläche mit den Ecken $A(1, 1), B(7, 2), C(5, 5), D(2, 6)$ als Lösungsmenge eines Ungleichungssystems.
4. Man zeige, dass die Punkte (x_1, x_2, x_3) mit $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ und

$$\begin{aligned}
 x_1 + x_2 + x_3 &\leq 12 \\
 x_3 &\leq 2 \\
 2x_1 + x_2 - x_3 &\leq 7 \\
 3x_1 - x_2 + x_3 &\leq 5
 \end{aligned}$$

einen Polyederkörper beschreiben und berechne dessen Ecken.