

Inhaltsverzeichnis

I Grundlagen	1
1 Elementare Logik und Mengenlehre	3
Einblick	3
Aussagen, Junktoren und Wahrheitstafeln	3
Sätze der Aussagenlogik	5
Prädikate und Quantoren	7
Mengen	9
Zahlen und Intervalle	11
Eigenschaften und Verknüpfungen von Mengen	13
Ausblick	16
Selbsttest	17
2 Definition, Satz, Beweis und mehr	19
Einblick	19
Grundlegendste Elemente bei der Formulierung von Mathematik	19
Formen des Beweisens	20
Direkte und indirekte Beweise	20
Konstruktive und nicht konstruktive Beweise	23
Der Ringschluss	24
Das Gegenbeispiel	25
Vollständige Induktion	26
Ausblick	27
Selbsttest	29
3 Abbildungen	31
Einblick	31
Grundlegendes zu Abbildungen	31
Injektivität, Surjektivität, Bijektivität	32
Die Komposition von Abbildungen	35
Ausblick	37
Selbsttest	39
4 Körper und komplexe Zahlen	41
Einblick	41

Körper	41
Die komplexen Zahlen	44
Ausblick	49
Selbsttest	50
Aufgaben zu den mathematischen Grundlagen	51
II Lineare Algebra	53
5 Vektorräume	55
Einblick	55
Grundlegendes zu Vektorräumen	55
Ausblick	62
Selbsttest	64
6 Basen und Untervektorräume	65
Einblick	65
Spann und Erzeugendensystem	65
Lineare Unabhängigkeit, Basis	67
Eindeutigkeit der Basisdarstellung, Untervektorräume	70
Ausblick	72
Selbsttest	73
7 Lineare Abbildungen und Dimensionssätze	75
Einblick	75
Definition und Beispiele linearer Abbildungen	75
Kern und Bild linearer Abbildungen	77
Dimensionssätze	79
Ausblick	80
Selbsttest	82
8 Matrizen	83
Einblick	83
Die darstellende Matrix einer linearen Abbildung	84
Der Rang einer Matrix	85
Das Matrizenprodukt	87
Besondere Matrizen	89
Ausblick	90
Selbsttest	91
9 Lineare Gleichungssysteme	93
Einblick	93

Grundlegendes zu linearen Gleichungssystemen und Gauß-Algorithmus	93
Struktur der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems	96
Ausblick	100
Selbsttest	102
10 Die Determinante	103
Einblick	103
Der Laplace'sche Entwicklungssatz	103
Berechnung von Determinanten in einfachen Fällen	106
Eigenschaften der Determinanten	108
Ausblick	110
Selbsttest	111
11 Eigenwerte und Eigenvektoren	113
Einblick	113
Eigenwert, Eigenvektor und Eigenraum	113
Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren	116
Algebraische und geometrische Vielfachheit von Eigenwerten	118
Ausblick	121
Selbsttest	123
12 Koordinatenabbildung und Basiswechsel	125
Einblick	125
Die Koordinatenabbildung	125
Darstellende Matrizen und Basiswechsel	126
Ausblick	130
Selbsttest	132
13 Diagonalisierung	133
Einblick	133
Diagonalisierbare Matrizen	133
Weitere Kriterien für Diagonalisierbarkeit	136
Ausblick	139
Selbsttest	140
14 Normierte, euklidische und unitäre Vektorräume	141
Einblick	141
Normierte Vektorräume	141
Skalarprodukte	144
Das Gram-Schmidt'sche Orthonormalisierungsverfahren	149
Orthogonale Abbildungen	153
Ausblick	157

Selbsttest	159
Aufgaben zur linearen Algebra	161
III Analysis	163
15 Grundzüge der Analysis	165
Einblick	165
Folgen und Konvergenz	166
Rechenregeln für konvergente Folgen	169
Konvergenzkriterien für Folgen	172
Das Monotoniekriterium	172
Das Häufungspunktprinzip und das Cauchy-Kriterium	174
Ausblick	178
Selbsttest	180
16 Stetigkeit	181
Einblick	181
Grenzwerte von Funktionen	181
Definition und Beispiele stetiger Funktionen	185
Ausblick	190
Selbsttest	191
17 Der Zwischenwertsatz und Extrema stetiger Funktionen	193
Einblick	193
Der Zwischenwertsatz	193
Bestimmte Divergenz	195
Maximum/Minimum und Supremum/Infimum	196
Maximum und Minimum stetiger Funktionen	197
Ausblick	198
Selbsttest	199
18 Differenzierbarkeit	201
Einblick	201
Grundlegendes zum Differenzieren	201
Differenzierbare und stetige Funktionen	204
Rechenregeln für Ableitungen	204
Eigenschaften differenzierbarer Funktionen	207
Der Mittelwertsatz	208
Monotone Funktionen	210
Die Regel von L'Hospital	212
Ausblick	213

Selbsttest	215
19 Das Taylor-Polynom und lokale Extrema	217
Einblick	217
Höhere Ableitungen	218
Das Taylor-Polynom	220
Lokale Extrema differenzierbarer Funktionen	224
Ausblick	226
Selbsttest	227
20 Unendliche Reihen	229
Einblick	229
Definition und Beispiele von Reihen	229
Die geometrische Reihe	231
Konvergenzkriterien für Reihen	234
Ausblick	240
Selbsttest	241
21 Potenzreihen	243
Einblick	243
Grundlegendes zu Potenzreihen	243
Der Konvergenzradius einer Potenzreihe	245
Die Taylor-Reihe	249
Ausblick	253
Selbsttest	254
22 Das Riemann'sche Integral	255
Einblick	255
Riemann'sche Summen	256
Rechenregeln der Integration	262
Der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung	263
Rechentechniken der Integration	265
Die Substitutionsregel	265
Partielle Integration	267
Ausblick	274
Selbsttest	276
23 Uneigentliche Integrale	277
Einblick	277
Kritische Stellen des Integrationsintervalls	278
Unendliche Integrationsgrenzen	280
Das Integralvergleichskriterium für Reihen	281
Ausblick	282

Selbsttest	284
Aufgaben zur Analysis	285
Lösungen der Selbsttests	287
Lösungen der Aufgaben	291
Literatur und Ausklang	299
Index	302