2 Newtons Axiome

Als Grundgesetze der Mechanik werden die Newtonschen Axiome eingeführt. Das 2. Newtonsche Axiom ist eine Differenzialgleichung für die Bahnkurve eines Massenpunkts. Es bestimmt die Dynamik, also die Zeitabhängigkeit der Bewegung.

Alle physikalischen Theorien gehen von gewissen unbewiesenen, grundlegenden Gesetzen aus. Diese entstehen als Verallgemeinerung von (endlich vielen) Beobachtungen. Sie sollten von möglichst einfacher Form sein und es gestatten, eine möglichst große Klasse von Phänomenen zu beschreiben oder vorherzusagen. Diese allgemeinen Gesetze werden *Naturgesetze* genannt. Die Beschreibung von Phänomenen durch diese Gesetze ist in der Physik gleichbedeutend mit ihrer *Erklärung*. Ein Naturgesetz impliziert unendlich viele Vorhersagen. Die Bestätigung von Vorhersagen *verifiziert* das Gesetz, kann es aber nicht beweisen (da die Bestätigung nur in endlich vielen Fällen erfolgen kann). Ein einmal aufgestelltes Naturgesetz kann aber durch eine einzige Beobachtung oder ein einziges Experiment widerlegt (*falsifiziert*) werden.

In der Mechanik können Newtons Axiome (mit einigen Ergänzungen) als Naturgesetze aufgefasst werden. Später werden wir noch alternative Formulierungen der Grundgesetze, insbesondere den Lagrangeformalismus, kennenlernen.

In seinem Werk *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* formulierte Isaac Newton 1687 drei Axiome. Newtons 1. Axiom (auch lex prima genannt) bezieht sich auf die Bezugssysteme (BS):

$$\boxed{\text{1. Axiom:} \quad \begin{array}{l}\text{Es gibt BS, in denen die kräftefreie Bewegung} \\ \text{durch } \dot{\boldsymbol{r}}(t) = \boldsymbol{v} = \text{const. beschrieben wird.}\end{array}} \tag{2.1}$$

Die so spezifizierten, bevorzugten BS heißen *Inertialsysteme* (IS). Am Beispiel eines Beobachters auf einem Karussell macht man sich klar, dass eine Aussage wie (2.1) zwangsläufig vom BS abhängt; man denke etwa an den Versuch, auf einem Karussell Billard zu spielen. Experimentell stellt man fest, dass IS solche BS sind, die gegenüber dem Fixsternhimmel ruhen, oder die sich relativ zu den Fixsternen mit konstanter Geschwindigkeit bewegen.

In allen Gebieten der Physik formuliert man Gesetze, die ein Bezugssystem voraussetzen. Dabei spielen die IS eine hervorgehobene Rolle; so gelten etwa die Maxwellgleichungen nur in IS. Man kann die Gesetze aber auch in anderen BS formulieren. Sie haben dann jedoch im Allgemeinen eine andere und kompliziertere Form; in den Bewegungsgesetzen der Mechanik treten zum Beispiel zusätzliche

Trägheitskräfte auf. Die IS sind dadurch ausgezeichnet, dass in ihnen die physikalischen Gesetze besonders *einfach* sind. Speziell ist wegen (2.1) Billard im Hörsaal einfacher als auf dem Karussell. Auf die Auszeichnung der IS und die Komplikationen in anderen Bezugssystemen gehen wir in Kapitel 5 und 6 noch näher ein.

Gleichung (2.1) besagt, dass die gleichförmige Bewegung (oder Ruhe) ein Zustand ist, in dem der Körper verharrt. So durchquert zum Beispiel ein Komet weitab von anderen Massen den Weltraum mit konstanter Geschwindigkeit. Im Bereich der alltäglichen Erfahrung kann die gleichförmige Bewegung nur näherungsweise beobachtet werden, da praktisch immer Reibungskräfte vorhanden sind.

Ohne Kräfte bewegen sich Körper gleichförmig (1. Axiom). Kräfte führen dagegen zu einer nicht gleichförmigen Bewegung. Der Begriff Kraft wird zunächst der Alltagssprache (Muskelkraft, Federkraft, Schwerkraft) entnommen; später wird er durch eine Messvorschrift präzisiert. Newtons 2. Axiom (auch lex secunda genannt) beschreibt die Bewegung unter dem Einfluss einer Kraft:

$$\boxed{\text{2. Axiom:} \qquad \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F} \qquad \text{im IS}} \tag{2.2}$$

Dabei ist der Impuls $\boldsymbol{p}$ das Produkt aus der Masse m und der Geschwindigkeit:

$$\boldsymbol{p} = m\,\boldsymbol{v} \tag{2.3}$$

Fast immer haben wir es mit konstanter Masse zu tun (außer etwa bei der Bewegungsgleichung für eine Rakete), so dass das 2. Axiom auch als

$$m\,\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F} \qquad \text{(2. Axiom)} \tag{2.4}$$

geschrieben werden kann. Hierdurch wird die Masse als eine dem betrachteten Körper zugeordnete Eigenschaft eingeführt. Newtons 2. Axiom beinhaltet folgende Definitionen und Aussagen:

1. Definition der Masse
2. Definition der Kraft
3. Physikalische Aussage über die Bahnbewegung

Wir erläutern zunächst, in welcher Weise das 2. Axiom die Masse und Kraft als Messgrößen definiert. Dabei gehen wir davon aus, dass Länge und Zeit bereits definiert sind. Damit ist insbesondere die Beschleunigung $\boldsymbol{a} = \ddot{\boldsymbol{r}}$ eine messbare Größe.

Wir betrachten eine bestimmte, in ihrer Größe unbekannte Kraft (zum Beispiel eine Federkraft) und zwei Körper 1 und 2. Wir messen die Beschleunigungen a_1 und a_2, die durch die unbekannte Kraft hervorgerufen werden. Nach (2.4) ist das Verhältnis m_1/m_2 durch a_2/a_1 gegeben; damit ist m_1/m_2 als Messgröße festgelegt. Wir definieren nun willkürlich die Masse eines bestimmten Körpers als 1 Masseneinheit; dabei wird implizit vorausgesetzt, dass die Eigenschaft Masse eine unveränderliche Eigenschaft des Körpers ist. Der Name der Masseneinheit ist ebenso willkürlich wie die Wahl des Referenzkörpers; bekanntlich wählt man das Kilogramm (kg) als Masseneinheit. Hierdurch und durch die Messvorschrift für m_1/m_2 ist dann die Masse jedes Körpers als Messgröße definiert.

Nachdem die Masse und die Beschleunigung Messgrößen sind, legt (2.4) die Kraft als Messgröße fest. Die Einheit der Kraft ist

$$1\,\mathrm{kg}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 1\,\mathrm{N} = 1\,\mathrm{Newton} \tag{2.5}$$

Wir halten fest: Die Messung von Massen und Kräften erfolgt auf der Grundlage des 2. Axioms.

Nach dem 2. Axiom ist die Masse ein Maß für den Widerstand, den ein Körper der Änderung seiner Geschwindigkeit entgegensetzt. Je größer m ist, umso kleiner ist – bei gegebener Kraft – die Änderung der Geschwindigkeit. Die Größe m heißt daher auch *träge Masse*.

Ein anderer Begriff ist die *schwere Masse*, die proportional zur Stärke der Gravitationskraft auf einen Körper ist; diese schwere Masse wird experimentell durch eine Kraftmessung festgelegt. In dieser Form eingeführt, ist die schwere Masse als Eigenschaft eines Körpers mit der Ladung vergleichbar; die Ladung ist durch die Stärke der Kraft auf einen Körper in einem elektromagnetischen Feld bestimmt. So wie die Ladung könnte die schwere Masse eine von der trägen Masse unabhängige Eigenschaft eines Körpers sein. Experimentell stellt sich aber heraus, dass das Verhältnis von träger zu schwerer Masse immer gleich groß ist (mit einer relativen Genauigkeit bis zu 10^{-12}). Daher führt man keine neue Messgröße „schwere Masse“ ein; vielmehr verzichtet man in den Gleichungen zumeist auf eine Unterscheidung und setzt beide Massen gleich m. Im Rahmen der Newtonschen Mechanik und Gravitationstheorie ist die Gleichheit von träger und schwerer Masse zufällig. Dagegen nimmt sie die Allgemeine Relativitätstheorie zum zentralen Ausgangspunkt (Kapitel 6).

Das 2. Axiom ist nicht nur eine Definitionsgleichung für die Masse und die Kraft. Vielmehr ist es auch ein physikalisches Gesetz über die Dynamik; es beinhaltet physikalische Aussagen. Zum Beispiel ergibt sich bei konstanter Kraft die nichttriviale Aussage $x \propto t^2$ für eine eindimensionale Bewegung. Diese Aussage kann durch Messung überprüft werden; damit wird das 2. Axiom verifiziert oder falsifiziert. Die aus dem 2. Axiom folgenden Aussagen werden durch Experimente bestätigt, solange die vorkommenden Geschwindigkeiten klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit c sind.

Für mit c vergleichbare Geschwindigkeiten sind die Aussagen des 2. Axioms (wie etwa $x \propto t^2$ für konstante Kraft) aber falsch. Damit ist das Gesetz im Prinzip falsifiziert und daher zu verwerfen. Da das 2. Axiom aber in weiten Bereichen korrekte Vorhersagen macht, geht man nicht soweit. Vielmehr versieht man das 2. Axiom mit der Einschränkung, dass es nur auf Geschwindigkeiten anzuwenden ist, die klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit sind.

Newtons 3. Axiom (auch lex tertia genannt) lautet: Der Kraft, mit der die Umgebung auf einen Massenpunkt wirkt, entspricht stets eine gleich große, entgegen-

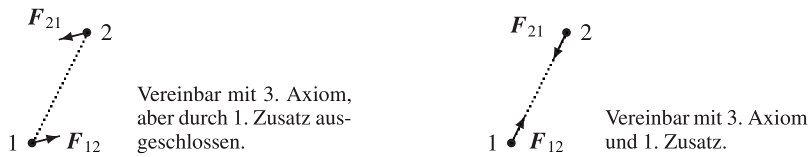

Abbildung 2.1 Die Kräfte zwischen zwei Massenpunkten müssen nach dem 3. Axiom entgegengesetzt gleich groß sein. Zusätzlich beschränken wir uns auf Kräfte, die parallel (oder antiparallel) zum Relativvektor sind.

gesetzte Kraft, mit der der Massenpunkt auf seine Umgebung wirkt, oder

$$\text{3. Axiom:} \quad \boldsymbol{F}_{\text{actio}} = -\boldsymbol{F}_{\text{reactio}} \tag{2.6}$$

Dies bedeutet konkret für die Kräfte, die zwei Massenpunkte aufeinander ausüben (Abbildung 2.1),

$$\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21} \qquad \text{(3. Axiom)} \tag{2.7}$$

Die Aussage (2.6) gilt im allgemeineren Sinn in allen Teilen der Physik: Jede Wirkung, die die Umgebung auf einen Körper ausübt, ruft eine entsprechende Gegenwirkung hervor.

Die Axiome werden auch als Newtons Gesetze (oder lex prima, secunda und tertia) bezeichnet. Sie sind keine Axiome in dem Sinn, dass aus ihnen alle Aussagen der Theorie folgen; insofern kann man die Bezeichnung als „Axiome“ auch kritisieren.

Für einige Ableitungen in einem System von Massenpunkten benötigen wir Annahmen über die auftretenden Kräfte, die wir als 1. und 2. Zusatz bezeichnen. Im ersten Zusatz nehmen wir an, dass die Kräfte, die zwei Massenpunkte aufeinander ausüben (Abbildung 2.1), in Richtung der Verbindungslinie wirken, also

$$(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) \times \boldsymbol{F}_{12} = 0 \qquad \text{(1. Zusatz)} \tag{2.8}$$

Der 2. Zusatz lautet: Wirken mehrere Kräfte $\boldsymbol{F}_i$ auf einen Massenpunkt, so ist die Gesamtkraft $\boldsymbol{F}$ die Summe der Einzelkräfte

$$\boldsymbol{F} = \sum_i \boldsymbol{F}_i \qquad \text{(2. Zusatz)} \tag{2.9}$$

Dies wird auch als Superpositionsprinzip der Kräfte bezeichnet.

Die beiden Zusätze sind zum Beispiel für die Newtonschen Gravitationskräfte zwischen massiven Teilchen oder für die Coulombkräfte zwischen geladenen Teilchen erfüllt. Sie stellen jedoch eine Einschränkung an die zugelassenen Kräfte dar und sind von weniger grundlegender Bedeutung als die Axiome selbst. Ein Gegenbeispiel zum 1. Zusatz sind die magnetischen Kräfte zwischen bewegten Ladungen; hierzu sei auf die Diskussion im Anschluss an (4.15) verwiesen. In einem Medium können nichtlineare elektromagnetische Feldeffekte auftreten; dann würde der 2. Zusatz nicht für die Coulombkräfte zwischen geladenen Teilchen in diesem Medium gelten.

Anwendungen

Wir werden uns in der Mechanik durchweg auf Kräfte beschränken, die nur von dem Ort und der Geschwindigkeit des Teilchens und von der Zeit abhängen,

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t),\ \dot{\boldsymbol{r}}(t),\ t) \tag{2.10}$$

Wir schließen damit zum Beispiel aus, dass $\boldsymbol{F}$ von der Beschleunigung, von höheren Ableitungen oder von der Bewegung des Teilchens zu früheren Zeiten abhängt. Geschwindigkeitsabhängige Kräfte sind zum Beispiel die Reibungskraft oder die Lorentzkraft.

Bei der Lösung von Problemen mit Hilfe der Newtonschen Axiome treten typischerweise folgende Schritte auf:

1. Aufstellen des Kraftgesetzes.
2. Mathematische Lösung der Differenzialgleichung:
$$m\,\ddot{\boldsymbol{r}}(t) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t),\ \dot{\boldsymbol{r}}(t),\ t) \tag{2.11}$$
3. Bestimmung der Integrationskonstanten der Lösung: Sie werden durch die Anfangsbedingungen für Ort und Geschwindigkeit zu einer bestimmten Zeit (etwa $\boldsymbol{r}(0)$ und $\dot{\boldsymbol{r}}(0)$) festgelegt.
4. Diskussion der Lösung: Die Lösung könnte graphisch dargestellt werden, oder es könnte die Frage nach Erhaltungsgrößen (etwa der Energie) untersucht werden.

Gegenüber dem so definierten Problem sind viele Verallgemeinerungen möglich. Insbesondere treten oft anstelle der Koordinaten x, y und z allgemeinere Koordinaten q_i (mit $i = 1, 2, \ldots, f$). Die Dynamik solcher Systeme (also ihr zeitabhängiges Verhalten) wird dann durch die Funktionen $q_i(t)$ beschrieben. Für diese Funktionen sind die (2.11) entsprechenden Bewegungsgleichungen aufzustellen und zu lösen.

Eindimensionale Bewegung

Als Spezialisierung von (2.11) kommt insbesondere die Beschränkung auf zwei oder eine Dimension, oder ein einfacher Ansatz für die Kraft in Frage. Wir betrachten zunächst die Spezialisierung auf eine Dimension,

$$m\,\ddot{x}(t) = F(x(t),\ \dot{x}(t),\ t) \tag{2.12}$$

Die Lösung folgender spezieller Bewegungsgleichungen sollte dem Leser vertraut sein:

$$\text{Keine Kräfte:} \qquad m\,\ddot{x} = 0 \tag{2.13}$$

$$\text{Homogenes Schwerefeld:} \qquad m\,\ddot{x} = -m\,g \tag{2.14}$$

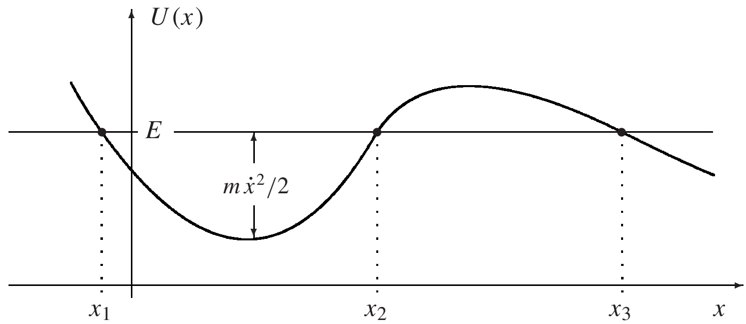

Abbildung 2.2 Die eindimensionale Bewegung in einem Potenzial $U(x)$ kann mit Hilfe des Energieerhaltungssatzes, $E = m\dot{x}^2/2 + U(x) = \text{const.}$, graphisch diskutiert werden. Der Abstand zwischen $U(x)$ und der Horizontalen bei E gibt die kinetische Energie $m\dot{x}^2/2$ an.

$$\text{Schwerefeld mit Reibung:} \qquad m\ddot{x} = -mg - \gamma\dot{x} \tag{2.15}$$

$$\text{Freie gedämpfte Schwingung:} \qquad m\ddot{x} = -kx - 2m\lambda\dot{x} \tag{2.16}$$

$$\text{Erzwungene Schwingung:} \qquad \ddot{x} + \omega_0^2\, x + 2\lambda\dot{x} = f\,\cos(\omega t) \tag{2.17}$$

Der letzte Fall wird in Kapitel 24 noch einmal ausführlich behandelt.

Wir untersuchen die Lösung für eine Kraft, die nur vom Ort abhängt:

$$m\,\ddot{x}(t) = F(x(t)) \tag{2.18}$$

Multiplizieren wir beide Seiten mit $\dot{x}(t)$, so lässt sich die entstehende Gleichung in der Form

$$\frac{m}{2}\,\frac{d}{dt}\,\dot{x}(t)^2 = -\frac{d}{dt}\,U(x(t)) \tag{2.19}$$

mit dem *Potenzial*

$$U(x) = -\int dx\;F(x) + \text{const.} \tag{2.20}$$

schreiben; es gilt $F(x) = -U'(x)$. Die Größe $U(x)$ wird auch die potenzielle Energie genannt. Die Konstante in (2.20) ist für (2.19) ohne Bedeutung. Die Integration von (2.19) ergibt

$$\frac{m}{2}\,\dot{x}(t)^2 = E - U(x(t)) \tag{2.21}$$

Die Integrationskonstante E ist die Summe aus der potenziellen Energie U und aus der kinetischen Energie $m\dot{x}^2/2$; diese Begriffe werden im nächsten Kapitel noch näher diskutiert. Wegen (2.20) ist E nur bis auf eine additive Konstante festgelegt. Wir lösen (2.21) nach $\dot{x} = dx/dt$ auf und erhalten

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{2[E - U(x)]/m}} \tag{2.22}$$

Die Integration dieser Gleichung ergibt

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{2[E - U(x')]/m}} \tag{2.23}$$

Die Anfangsbedingungen für $x(t_0)$ und $\dot{x}(t_0)$ legen die beiden Integrationskonstanten E und x_0 fest. Die Lösung (2.23) bestimmt $t = t(x)$ und damit implizit die gesuchte Funktion $x = x(t)$.

In speziellen Fällen, wie etwa dem Oszillator mit $U(x) = kx^2/2$, kann das Integral (2.23) analytisch gelöst werden. In jedem Fall lässt sich die Lösung aber qualitativ anhand des Graphen von $U(x)$ diskutieren (Abbildung 2.2): Der vertikale Abstand zwischen $U(x)$ und der Horizontalen E gibt $m\dot{x}^2/2$ an. Wählt man noch eine Bewegungsrichtung ($\dot{x} > 0$ oder $\dot{x} < 0$) aus, so kann die Änderung von $\dot{x}^2$ aus der des vertikalen Abstands abgelesen werden. Nähert man sich einem Schnittpunkt von $U(x)$ mit der Horizontalen E, so geht dort $\dot{x} \to 0$. Diese Punkte werden Umkehrpunkte genannt, da sich dort die Bewegungsrichtung umkehrt. Verläuft die Bewegung zwischen zwei Umkehrpunkten ($x_1 \le x \le x_2$ in Abbildung 2.2), so ergibt sich eine Schwingung mit der Periode T:

$$T = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{2[E - U(x)]/m}} \tag{2.24}$$

Dagegen ist der Bereich $x_2 < x < x_3$ in Abbildung 2.2 unzugänglich. An den Stellen x_0 mit $dU/dx = 0$ hat (2.18) die statische Lösung $x = x_0$; nach (2.21) muss hierfür $E = U(x_0)$ gelten. Diese Gleichgewichtslösung ist bei einem Minimum des Potenzials stabil, bei einem Maximum aber labil.

Die hier auftretenden Strukturen (Integration zu einer Differenzialgleichung 1. Ordnung wegen Energieerhaltung, graphische Diskussion der Lösung) werden uns später bei allgemeineren Problemen wiederholt begegnen.

Aufgaben

2.1 Abstürzender Satellit

Ein Erdsatellit (Masse m) bewegt sich unter dem Einfluss der Gravitationskraft und einer Reibungskraft:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_{\text{grav}} + \boldsymbol{F}_{\text{diss}} = -m\,\frac{\alpha}{r^2}\,\boldsymbol{e}_r - m\,\gamma(r)\,\boldsymbol{v}$$

Dabei ist r der Abstand zum Erdmittelpunkt, $\alpha = GM$ mit der Erdmasse M und $\gamma(r) > 0$. Stellen Sie mit Hilfe der Ergebnisse aus Aufgabe 1.1 die Bewegungsgleichungen in Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) auf. Wie müssen $\gamma(r)$, β und ϵ gewählt werden, damit

$$r(t) = r_0\left(1-\beta t\right)^{2/3}, \quad \theta(t) = -\frac{1}{\epsilon}\,\ln\left(1-\beta t\right)^{2/3}, \quad \phi(t) = \text{const.} \tag{2.25}$$

die Bewegungsgleichungen löst? Welche Form hat die Bahnkurve? Bestimmen Sie den Betrag der Geschwindigkeit $|\boldsymbol{v}|$ als Funktion von r.

2.2 Regentropfen im Schwerefeld

Ein kugelförmiger Wassertropfen (Radius R, Volumen V, Masse m) fällt in der mit Wasserdampf gesättigten Atmosphäre senkrecht nach unten. Auf ihn wirken die Schwerkraft und eine Reibungskraft,

$$F = F_{\text{grav}} + F_{\text{diss}} = m\,g - \lambda\,R^2\,v \qquad (\lambda > 0)$$

Der Wassertropfen startet mit der Geschwindigkeit $v(0) = 0$. Durch Kondensation wächst das Volumen des Wassertropfens proportional zu seiner Oberfläche an; Radius und Masse des Tropfens sind also zeitabhängig. Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf, und integrieren Sie sie, indem Sie R anstelle der Zeit t als unabhängige Variable einführen.

2.3 Schwingungsperiode eines anharmonischen Oszillators

Ein Körper der Masse m bewege sich im Potenzial

$$U(x) = \frac{f}{2}\,x^2 + \alpha\,x^4$$

Berechnen Sie die Periode T der Schwingung für den leicht anharmonischen Fall (für $\alpha E \ll f^2$, wobei E die Energie ist).

Anleitung: Verwenden Sie die Substitution $\sin^2\!\varphi = U(x)/E$ und drücken Sie x und dx in Abhängigkeit von φ bis zur 1. Ordnung in α aus.

2.4 Einfluss der Zeitdefinition auf die Bewegungsgleichung

In einem Inertialsystem werde durch eine ungenaue Uhr die Zeit T definiert; für T setze man einen bestimmten Zusammenhang $T = T(t)$ zur (wahren) IS-Zeit t an. Mit dieser Uhr misst man für die kräftefreie, eindimensionale Bewegung eines Körpers $d^2x/dT^2 = a_0 = F/m$ im Gegensatz zu Newtons Axiomen. Dies demonstriert die Abhängigkeit physikalischer Gesetze von der Zeitdefinition.

Bestimmen Sie die scheinbare Kraft F. Für eine konkrete Uhr mit schwächer werdender Feder gelte speziell $T(t) = \lambda^{-1}\ \ln(1 + \lambda t)$. Was ergibt sich dann für die scheinbare Kraft F?