Vorwort

Alle Wege führen nach Rom! Und welcher ist der beste? Was heißt „der beste“ und wie findet mein Navi einen solchen? Diese Fragen bilden nur einen kleinen Teilaspekt dessen, was in diesem Buch behandelt wird. Andere Fragestellungen betreffen das Färben von Landkarten, die Analyse von Abwassersystemen oder die Planung von Massenhochzeiten.
Historisch gesehen begann die Graphentheorie im Jahr 1736, als Leonhard Euler sein Königsberger Brückenproblem vorstellte: Kann man den wöchentlichen Sonntagsspaziergang durch die Stadt so planen, dass man jede der sieben Brücken genau einmal überquert und am Ende wieder zu Hause ankommt (Abb. 1, links)? Beim Lösen dieses Problems schuf Euler die Graphen. Hierbei handelt es sich nicht etwa um Funktionsgraphen, wie man diese aus der Kurvendiskussion kennt; ein Graph in unserem Sinn besteht aus Knoten und Kanten, die diese Knoten verbinden (Abb. 1, rechts). Mit einem solchen Konzept lässt sich das Brückenproblem in Königsberg und auch in jeder anderen Stadt einfach lösen. Darin besteht auch heute noch ein Reiz der Graphentheorie: Viele Probleme aus der Praxis lassen sich leicht in ihre Sprache übersetzen. Häufig treten schon dadurch die Problemstruktur und die Hauptschwierigkeit deutlich zutage.

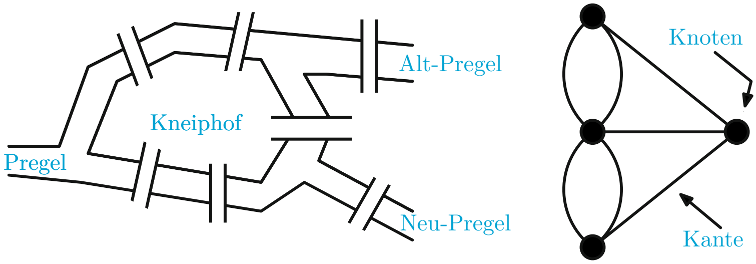

Abb. 1: Links sehen Sie Königsberg zu Eulers Zeiten und rechts eine Darstellung als Graph.

Heute stellt die Graphentheorie eines der wichtigsten Teilgebiete der Diskreten Mathematik dar. Ihre Anwendungsfelder wurden in den letzten Jahrzehnten vielfältiger und für die moderne Welt immer entscheidender. Konnten sich Unternehmen früher noch durch den Erwerb besserer Produktionsmittel voneinander absetzen, so ist heute die optimale Nutzung der vorhandenen Ausstattung entscheidend. Eine moderne Fluggesellschaft etwa muss mit den vorhandenen Flugzeugen und Flughafenzeiten möglichst viele Fluggäste befördern. Dieses Problem lässt sich beispielsweise mit der Graphentheorie als spezielles Multi-Commodity-Flow-Problem formulieren und optimal lösen. Auch beim Lotsen von Automatic Guided Vehic-

les durch den Hamburger Hafen kommt die Graphentheorie zum Tragen und hilft dabei die Schiffe so schnell wie möglich zu entladen.
Welche Fragestellungen beschäftigen einen Mathematiker, wenn er ein Problem untersucht? Als erstes muss natürlich die Problemstellung in die Sprache der Graphentheorie übersetzt werden. Betrachtet man das Königsberger Brückenproblem, so bilden die Landmassen die Knoten und die Brücken die Kanten. In diesem Graphen wird anstelle eines Spaziergangs eine so genannte Euler-Tour gesucht, die jede Kante genau einmal durchläuft. Des Weiteren stellt sich die Frage, welche Eigenschaft ein Graph besitzen muss, damit eine Euler-Tour existiert; und ob man diese Eigenschaft nutzen kann, um effiziente Algorithmen zu konstruieren, die eine solche Tour bestimmen. Diese beiden Fragen nach einer Charakterisierung und einer Lösungsmöglichkeit werden uns bei allen Problemstellungen begegnen. Die Antworten fallen jedoch sehr unterschiedlich aus. Beim Königsberger Brückenproblem können sie positiv beantwortet werden, bei anderen Problemen ist hingegen sowohl eine Charakterisierung als auch die Konstruktion von Lösungsverfahren schwierig. Einige Lösungsverfahren sind nur für kleine Probleminstanzen geeignet, wohingegen bei großen Problemen sogar ein Supercomputer Jahre zur Berechnung der Lösung benötigen würde.

Aufbau des Buches

Jedes Kapitel dieses Buchs behandelt ein Themengebiet aus der Graphentheorie bzw. der Netzwerkoptimierung. Den Ausgangspunkt bildet immer ein Problem aus der Praxis, anhand dessen die graphentheoretischen Begriffe und Definitionen eingeführt werden. An Beispielen und ersten Beobachtungen werden dann die Charakteristika eines Problems und die gängigen Lösungsverfahren erarbeitet. Der Text ist dabei in Definitionen, Sätze, Beispiele und Beweise gegliedert. Diese Form erlaubt einen schnellen Überblick über die Themen und erleichtert die Arbeit mit diesem Buch. Eine kurze Einführung in diese Struktur bietet der Anhang A *Satz, Beweis, Definition*. Wichtig beim Lesen des Textes ist es, sich neue Begriffe, Aussagen oder Algorithmen über Beispiele zu verdeutlichen und zu überprüfen. Deswegen finden Sie im Text immer wieder kleine Aufgaben, die mit einem Übungssymbol am Rand des Textes gekennzeichnet sind. Einige dieser Fragen sind mit einer Nummer versehen. Eine Lösung befindet sich dann am Ende des jeweiligen Kapitels nach dem Aufgabenteil.
Das Buch richtet sich an interessierte Schüler der Oberstufe, Studenten der Mathematik und Informatik im ersten und zweiten Semester sowie Praktiker. Es wird neben den mathematischen Grundkenntnissen aus der Schule kein weiteres Wissen vorausgesetzt. In dem schon erwähnten Anhang A finden Sie eine Einführung in die wichtigsten Beweismethoden; gerade die Beweise im ersten Kapitel sind gut verständlich und lassen sich anhand eines Beispiels leicht nachvollziehen. Die

grundlegenden Inhalte eines Kapitel können Sie allerdings auch ohne die Beweise verstehen. Ebenfalls im Anhang enthalten ist ein Kapitel B über die in diesem Buch verwendeten Symbole. Falls Ihnen die Zeichen $\in$, $\sum$, $\prod$, und $\forall$ unbekannt sind, sollten Sie einen kurzen Blick in diesen Abschnitt werfen.

Inhalt

Im *ersten Kapitel* werden grundlegende Begriffe wie Graph, Grad, Weg und Konzepte der Graphentheorie wie der Zusammenhang eingeführt. Außerdem wird die spezielle Graphenklasse der Bäume untersucht. Das *zweite Kapitel* handelt von der Breiten- und Tiefensuche, mit deren Hilfe sich ein gegebener Graph auf sein Grundgerüst, einen Baum, reduzieren lässt. Die Algorithmen können ebenso dafür Verwendet werden, einen Gegenstand in einem Labyrinth zu finden, einen kürzesten Weg von einem Startknoten bezüglich der Anzahl der Kanten zu berechnen oder einen Graphen auf Bipartitheit zu überprüfen.
Auch im *nächsten Kapitel* beschäftigen wir uns mit Bäumen. Dabei werden wir das Minimal-Spannende-Baum-Problem lösen, d.h. zu einem gegebenen Graphen mit Kantengewichten einen günstigsten spannenden Baum in diesem Graphen finden. Mit dem Algorithmus von Prim oder dem Algorithmus von Kruskal, kann ein solcher spannender Baum schnell berechnet werden. Anwendung findet das Problem beispielsweise bei der Verlegung von Kabeln in einem Server-Raum.
Im *vierten Kapitel* wenden wir uns dem Reisen zu und behandeln das schon beschriebene Königsberger Brückenproblem. Neben der Modellierung durch Graphen hat Euler schon damals eine einfache Charakterisierung aller Graphen gefunden, die eine Euler-Tour enthalten. Ein Algorithmus zur Berechnung einer solchen Tour wurde allerdings erst von Hierholzer 1873 veröffentlicht. Als Alternative zu diesem Algorithmus wird noch der Algorithmus von Fleury vorgestellt. Beide Algorithmen können auch dazu verwendet werden einen Euler-Weg zu berechnen.
Nach den Euler-Graphen behandeln wir ein weiteres Reise-Problem, bei dem eine Rundreise gesucht ist, die anstelle aller Kanten, alle Knoten genau einmal durchläuft. Ein solcher Graph heißt hamiltonsch und schon hier sei vorweggenommen, dass eine einfache Charakterisierung hamiltonscher Graphen noch nicht bekannt ist. Der Satz von Dirac bietet lediglich eine hinreichende Bedingung über den Minimalgrad eines Graphen. Erweitert man das Problem auf vollständige Graphen mit Kantengewichten, so erhält man das berühmte *Travelling-Salesman*-Problem, für das noch keinen effizienten Algorithmus existiert. Wieso vermutlich auch nie einer gefunden wird und was genau „effizient“ bedeutet, wird im Abschnitt über die Komplexitätstheorie erklärt.
Im *sechsten Kapitel* beschäftigt uns die Frage, ob ein Graph so gezeichnet werden kann, dass sich keine Kanten überkreuzen. Solche planaren Graphen haben viele schöne Eigenschaften und erfüllen vor allem die Euler-Formel, welche einen Zu-

sammenhang zwischen der Anzahl an Knoten, Kanten und Flächen eines planaren Graphen herstellt. Des Weiteren wird diese Klasse durch den Satz von Kuratowski vollständig charakterisiert.
Das *siebte Kapitel* behandelt das Färben von Graphen. Darunter fällt insbesondere das berühmte Vier-Farben-Problem, das die Mathematiker über 100 Jahre in Atem hielt. Dabei sollte die Vermutung bewiesen werden, jede Landkarte könne mit vier Farben gefärbt werden, ohne dass benachbarte Länder dieselbe Farbe erhalten. Den Vier-Farben-Satz werden wir nicht beweisen, dafür den etwas schwächeren Fünf-Farben-Satz.
Im *nächsten Kapitel* betrachten wir gerichtete Graphen und erweitern viele schon behandelte Problemstellungen auf diese. Im Anschluss (Kapitel 9) beschäftigen wir uns mit der Berechnung eines kürzesten Wegs zwischen zwei gegebenen Orten. Neben einem Optimalitätskriterium lernen wir den Algorithmus von Dijkstra und den Algorithmus von Moore-Bellman-Ford kennen, der auch bei Graphen mit negativen Kantengewichten einen kürzesten Weg berechnet.
Kapitel 10 behandelt die Fragestellung, wieviel Wasser in einem Wassersystem an einer bestimmten Stelle maximal zur Verfügung stehen kann. Dazu entwickeln wir zuerst eine sinnvolle Modellierung der gegebenen Problemstellung über (maximale) Flüsse. Der Algorithmus von Ford-Fulkerson berechnet dazu eine optimale Lösung, deren Maximalität mit Hilfe des Max-Fluss-Min-Schnitt-Satzes bewiesen wird.
In *Kapitel 11* untersuchen wir das Problem, Güter möglichst kostengünstig in einem Netzwerk zu transportieren. Dazu erweitern wir die Definition eines Flusses aus dem vorherigen Kapitel, lernen ein neues Optimalitätskriterium über negative Zykel kennen, und berechnen anschließend einen solchen kostenminimalen Fluss mit dem Cycle-Canceling- oder dem Successive-Shortest-Path-Algorithmus.
Das *letzte Kapitel* behandelt das Problem Paare zu bilden, wie es zum Beispiel bei der Zuordnung von Bewerbern zu Jobs auftreten kann. Für bipartite Graphen beweisen wir hier den Satz von König und den Satz von Hall und lernen dabei einen Algorithmus zur Berechnung einer maximalen Paarung bzw. eines maximalen Matchings kennen.

Literatur

Drei Bücher sollen hier kurz vorgestellt werden, die gut als weiterführende Literatur geeignet sind. Das Buch von Douglas West „Introduction to Graph Theory“ wurde als Begleitbuch einer Vorlesung zur Graphentheorie geschrieben. Das Buch enthält anschauliche Beispiele und behandelt alle Themen bis auf das der Flüsse (Kapitel 10 und 11) auf einem mathematisch abstrakterem Niveau als dies hier in diesem Buch geschieht. Allerdings wird von dem Leser ein hohes Maß an mathematischem Verständnis vorausgesetzt. Als Ergänzung zu dem Thema der Flüsse

sei das Buch „Network Flows“ von Ravindra Ahuja, Thomas Magnanti und James Orlin empfohlen. Das letzte Buch „Kombinatorische Optimierung erleben“, auf das hier verwiesen werden soll, stammt von Stephan Hußmann und Brigitte Lutz-Westphal. Ein großer Schwerpunkt des Buches liegt in der didaktischen Aufbereitung der Kombinatorischen Optimierung und seiner Anwendung in Schulen. Der Leser wird zum Mitarbeiten ermutigt und lernt so die Arbeitsweise von Mathematikern – insbesondere auch die vielen Irrwege bis zur Lösungen eines Problems – kennen.
Das hier vorliegende Buch soll den Leser in die grundlegenden Themengebieten der Graphentheorie und Netzwerkoptimierung einführen. Alle Sätze, Beweise und Algorithmen entsprechen dem Standardwissen in diesem Gebiet und werden hier mit vielen Beispielen und Anwendungen vorgestellt.

Danksagung

Dieses Buch wäre ohne die Unterstützung meiner Kollegen, Freunde und Familie nicht entstanden. Die Idee zu diesem Buch entstand bei der Vorbereitung mehrerer Kurse für die Deutschen Schülerakademie, die ich mit Georg Hoever gehalten habe. Bei ihm möchte ich mich für die vielen Anregungen, kritischen Nachfragen und Diskussionen bedanken. Henrik Büsing, Wiebke Höhn, Mareike Massow, Jens Schulz und Madeleine Theile haben ebenfalls mit ihren Anmerkungen zu den Kapiteln wertvolle Unterstützung geliefert und das Buch um einige Beispiele reicher gemacht. Für den sprachlichen Schliff hat Tobias Kober gesorgt, der sich als Germanist und Theologe durch die vielen Kapitel gearbeitet hat.
Der Aufbau des Buches orientiert sich an dem von Professor Möhring entwickelten Skript zur Vorlesung Algorithmische Diskrete Mathematik. Für sein Engagement in der Vorlesung, seine ansteckende Begeisterung für dieses Gebiet und die viele Zeit, die er mir zur Verfügung gestellt hat, möchte ich mich ganz herzlich bedanken. Abschließend gilt mein Dank Frau Bartels und Herrn Rüdinger von Spektrum Akademischer Verlag für die gute Zusammenarbeit.