

Inhalt

Einleitung	1
I Algebra in der Schule	5
1 Das Gerüst des Lehrgangs	5
2 Zur historischen Entwicklung des Algebraunterrichts.....	8
3 Zur Begründung des Lehrgangs.....	14
3.1 Bildungsziele	14
3.2 Das Problem der Gültigkeit	15
3.3 Das Problem der Angemessenheit	16
3.4 Das Problem des Wertes.....	17
II Zahlen	21
1 Zahlen in algebraischer Sicht.....	21
1.1 Algebraisches Verständnis der Zahlen	21
1.2 Axiomatische und konstruktive Begründungen der Zahlen	22
1.3 Zahl und Wirklichkeit	24
2 Zum Lernen des Zahlbegriffs.....	24
2.1 Lernen durch Erweiterung	25
2.2 Lernen in Stufen.....	26
2.3 Regellernen	28
2.4 Zur Rolle des Verknüpfungsbegriffs	31
3 Natürliche Zahlen im Unterricht.....	32
3.1 Rechenoperationen und ihre Beziehungen	32
3.2 Kopfrechnen – Schriftliches Rechnen – Taschenrechner.....	35
3.3 Rechenoperationen als Verknüpfungen	37
3.4 Natürliche Zahlen als Maßzahlen von Größen	39
4 Bruchzahlen im Unterricht.....	41
4.1 Das Problem der Reihenfolge der Erweiterungen	41
4.2 Zugänge	42
4.3 Bruchrechnung.....	46
4.4 Verknüpfungseigenschaften.....	50
4.5 Dezimaldarstellung	51
4.6 Bruchrechnung und Taschenrechner	53
4.7 Strukturelle Vertiefung	56

5	Rationale Zahlen im Unterricht	57
5.1	Modelle	58
5.2	Über den Status der Vorzeichenregeln	58
5.3	Zugänge zu den Regeln.....	60
5.4	Das Problem der Regelformulierung	62
5.5	Das Problem der Differenzierung	63
5.6	Verknüpfungseigenschaften.....	64
6	Reelle Zahlen im Unterricht.....	66
6.1	Die Entdeckung irrationaler Zahlen.....	66
6.2	Das Problem der Numerik	68
6.3	Das Problem der Verknüpfungseigenschaften.....	72
III	Terme	77
1	Die Formelsprache	77
1.1	Die Formelsprache als formale Sprache	78
1.2	Die Variablen.....	79
1.3	Zahlen und Größen	81
1.4	Modellbildung mit Termen.....	82
1.5	Deutung von Termumformungen	85
2	Schwierigkeiten beim Lernen der Formelsprache	86
2.1	Regeln und Regelhierarchien erfassen.....	86
2.2	Über Termumformungen sprechen.....	88
2.3	Üben von Termumformungen	91
2.4	Über den Umgang mit Fehlern bei Termumformungen	92
2.5	Fehleranalysen	94
3	Über das Lehren der Formelsprache	95
3.1	Vom Wert der Formelsprache.....	95
3.2	Der Computer als Werkzeug für die Formelsprache	97
3.3	Ziele beim Lehren der Formelsprache.....	98
3.4	Denken und Umformen	99
3.5	Zum Lernen der Formelsprache.....	101
4	Die Formelsprache im Unterricht	103
4.1	Intuitiver Umgang mit Variablen und Termen	103
4.2	Termberechnungen mit dem Taschenrechner.....	106
4.3	Reflexionen über die Formelsprache	110
4.4	Erarbeitung der Termumformungen	113
4.5	Nutzung der Formelsprache.....	118
4.6	Erweiterung der Formelsprache.....	120
4.7	Neue Formelsprachen	124
4.8	Der Computer als Tutor für Termumformungen	127

IV Funktionen	131
1 Zum Begriff der Funktion	131
1.1 Entwicklung des Funktionsbegriffs	131
1.2 Funktionseigenschaften	133
1.3 Funktionstypen.....	134
1.4 Modellbildung mit Funktionen	135
2 Zum Lehren des Funktionsbegriffs	136
2.1 Der Funktionsbegriff als Unterrichtsgegenstand	136
2.2 Funktionales Denken	139
2.3 Umwelterschließung mit Funktionen.....	141
2.4 Taschenrechner und Funktionen.....	147
2.5 Der Computer als Werkzeug für Funktionen.....	152
2.6 Diskussion der Werkzeuge	155
2.7 Lernmodelle für den Funktionsbegriff.....	158
3 Der Funktionsbegriff im Unterricht	162
3.1 Rollen des Funktionsbegriffs	162
3.2 Vermittlung von Grunderfahrungen	163
3.3 Entdeckung von Funktionseigenschaften	167
3.4 Aufdecken von Zusammenhängen.....	176
3.5 Entdeckung neuer Funktionstypen.....	178
3.6 Das Problem der Umkehrfunktion.....	185
3.7 Funktionen und Relationen.....	186
3.8 Mit Funktionen operieren	188
3.9 Von den Funktionen zu den Folgen.....	189
3.10 Erweiterungen.....	198
3.11 Funktionen und Verknüpfungen	205
3.12 Relationen zwischen Funktionen	206
V Gleichungen	211
1 Gleichungen im Wandel	211
1.1 Entwicklung der Gleichungslehre in der Schule.....	212
1.2 Gleichungen als Werkzeuge	216
1.3 Zum Umgang mit Schwierigkeiten und Fehlern.....	217
2 Gleichungen in den Themensträngen der Algebra.....	218
2.1 Zahlen und Gleichungen.....	219
2.2 Terme und Gleichungen.....	220
2.3 Funktionen und Gleichungen.....	220
2.4 Kurven und Gleichungen	222
3 Über das Lernen des Umgangs mit Gleichungen	225
3.1 Zum Lernen von Algorithmen für Gleichungen	225
3.2 Über Gleichungen und Umformungen reden.....	227

3.3 Das Problem der Sachaufgaben	229
4 Gleichungen im Unterricht	233
4.1 Entwicklung des Themenstrangs	233
4.2 Gleichungen und Ungleichungen in \mathbb{N}	234
4.3 Gleichungen in \mathbb{B}	238
4.4 Gleichungen in \mathbb{Q} als Rechenregeln	240
4.5 Das Lösen von Gleichungen in \mathbb{Q}	242
4.6 Gleichungstypen in \mathbb{Q}	248
4.7 Gleichungstypen in \mathbb{R}	254
4.8 Taschenrechner und Gleichungen.....	262
VI Erkenntnis im Algebraunterricht	267
1 Sätze im Algebraunterricht	268
1.1 Regeln – Formeln – Sätze.....	268
1.2 Die Entdeckung des binomischen Satzes.....	270
1.3 Das Finden einer Summenformel	272
1.4 Existenzsätze.....	275
1.5 Beweisen im Algebraunterricht	277
1.6 Beweisen lehren	279
2 Begriffsbildung im Algebraunterricht.....	280
2.1 Begriffsbildung	280
2.2 Lernen durch Definitionen.....	282
2.3 Begriff und Problem	284
2.4 Paradoxien bei algebraischen Begriffen	285
3 Algebra als Theorie im Unterricht	288
3.1 Bezugstheorien.....	288
3.2 Theoretisches Beziehungsgefüge.....	289
3.3 Gruppe als algebraische Struktur	290
Literatur	297
Sachwörter	309