

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	v
1 Einleitung	1
1.1 Was ist „Elementare Analysis“?	3
1.2 Wie ist dieses Buch aufgebaut?	4
1.3 Was ist bei der Lektüre dieses Buchs zu beachten?	5
2 Funktionale Zusammenhänge und Funktionen	7
2.1 Funktionale Zusammenhänge	8
2.1.1 Eigenschaften funktionaler Zusammenhänge	10
2.1.2 Unterschiedliche Tiefen der Betrachtung	11
2.2 Funktionen	16
2.2.1 Funktionsbegriff	16
2.2.2 Modellieren mit Funktionen	21
2.2.3 Funktionen in unterschiedlichen Bereichen der Mathematik	25
2.3 Grundvorstellungen und Darstellungen von Funktionen	30
2.3.1 Grundvorstellungen	30
2.3.2 Darstellungsarten	35
2.4 Elementare Funktionstypen und ihre Charakteristika	40
2.4.1 Proportionale, antiproportionale und (affin-)lineare Funktionen ..	40
2.4.2 Potenz- und Wurzelfunktionen	46
2.4.3 Exponential- und Logarithmusfunktion	50
2.4.4 Trigonometrische Funktionen	56
2.4.5 Funktionenbaukasten	59
2.4.6 Weitere Funktionen	66
2.4.7 Mit Funktionen arbeiten	68
2.5 Exkurs: Funktionen und Kurven	76
3 Ein anschaulicher Zugang zur Differenzial- und Integralrechnung 79	
3.1 Ableiten: Änderungsraten als fundamentale Idee	81
3.1.1 Von der mittleren zur lokalen Änderungsrate	82
3.1.2 Lokale Änderungsrate und lokale Linearität	85
3.1.3 Von lokalen Änderungsraten zur Ableitungsfunktion	88
3.2 Integrieren: Rekonstruktion als fundamentale Idee	92
3.2.1 Von der Änderungsrate zum Bestand	92
3.2.2 Bestandsfunktionen als Rekonstruktionen aus Änderungsraten ..	95
3.3 Anschaulicher Zusammenhang von „Ableiten“ und „Integrieren“	99
3.4 Grenzen der Anschauung	102
4 Mathematische Grundlagen der Analysis	105
4.1 Die vollständige Zahlengerade: reelle Zahlen	107
4.1.1 Ein kurzer historischer Überblick	107
4.1.2 Die Entdeckung der irrationalen Zahlen	110

4.1.3	Konstruktion der reellen Zahlen durch Intervallschachtelungen ..	113
4.1.4	Die Mächtigkeit von \mathbb{R}	129
4.2	Folgen und ihre Grenzwerte	135
4.2.1	Folgen	136
4.2.2	Konvergenz von Folgen	140
4.2.3	Beispiele konvergenter und divergenter Folgen	147
4.2.4	Sätze über Existenz und Bestimmung von Grenzwerten	154
4.2.5	Anwendungen von Folgen in der Sekundarstufe I	159
4.3	Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit	173
4.3.1	Grenzwerte von Funktionen	173
4.3.2	Untersuchung spezieller Funktionen auf Grenzwerte	177
4.3.3	Stetigkeit	181
4.3.4	Anschauung und Stetigkeit	185
4.3.5	Eigenschaften stetiger Funktionen	190
5	Grenzwerte von Differenzenquotienten: die Ableitung	195
5.1	Die Ableitung an einer Stelle und die Ableitungsfunktion	196
5.1.1	Differenzierbarkeit	196
5.1.2	Einfache Beispiele für differenzierbare Funktionen	198
5.1.3	Stetigkeit und Differenzierbarkeit	199
5.1.4	Lokale Linearität und Tangenten	200
5.1.5	Regel von L'Hospital	202
5.1.6	Differenzialquotient und Differenziale	204
5.2	Berechnung von Ableitungen und Ableitungsregeln	205
5.2.1	Typische algebraische Umformungen bei Differenzenquotienten ..	206
5.2.2	Ableitungsregeln	207
5.2.3	Weitere Ableitungsfunktionen	212
5.2.4	Anschauung und Differenzierbarkeit	215
6	Grenzwerte von Riemann'schen Summen: das Integral	221
6.1	Anschaulicher Standpunkt aus Kapitel 3	222
6.2	Das bestimmte Integral und Integralfunktionen	224
6.3	Erste Berechnungen von („einfachen“) Integralen	231
7	Zusammenhang von Differenzial- und Integralrechnung	237
7.1	Stammfunktionen und Richtungsfelder	237
7.2	Der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung	240
7.3	Integrieren bedeutet auch Mitteln	245
7.4	Von Ableitungsregeln zu Integrationsregeln	246
8	Anwendungen in Theorie und Praxis	251
8.1	Funktionen untersuchen	252
8.1.1	Monotonie und Extrema	253
8.1.2	Krümmungs- und Wachstumsverhalten	264
8.1.3	Bogenlänge	277

8.1.4	Exponential- und Logarithmusfunktion	281
8.1.5	Änderungsraten bei geometrischen Maßen	290
8.2	Das Wechselspiel von Theorie und Anwendungen	291
8.2.1	„Wie viel Nass passt ins Fass?“ – Rotationsvolumina	292
8.2.2	„Wie viel Treibstoff benötigt die Mondrakete?“ – uneigentliche Integrale	298
8.2.3	„Wieso sehen wir einen Regenbogen?“ – Umkehrregel	300
8.2.4	„Wie hoch ist der Effektivzins?“ – Newton-Algorithmus	306
8.2.5	„Wie viel Steuer muss ich zahlen?“ – Elastizität	310
8.2.6	„Wie schnell kühlt eine Tasse Tee ab?“ – Differenzialgleichungen .	320
	Literaturverzeichnis	327
	Index	333