

## Inhaltsverzeichnis

### Vorwort IX

### 1 Einführung 1

- 1.1 Allgemeines zur Methode der finiten Elemente 1
- 1.2 Wie überführt man ein Randwertproblem in eine Variationsgleichung? 4
  - 1.2.1 Beispiel 1 4
  - 1.2.2 Beispiel 2 5

### 2 Grundkonzept 7

- 2.1 Stetiges und diskretes Problem. Beispiele von finiten Elementen 7
  - 2.1.1 Die Grundzüge der Methode 7
  - 2.1.2 Ein erstes Beispiel und eine theoretische Schwierigkeit 10
  - 2.1.3 Die Lösung: Sobolev-Räume 12
  - 2.1.4 Das erste Beispiel (Fortsetzung) 17
  - 2.1.5 Präzisierung der Grundzüge der Methode 18
  - 2.1.6 Beispiele von finiten Elementen 26
- 2.2 Der Aufbau des Gleichungssystems 36
  - 2.2.1 Elementmatrizen 36
  - 2.2.2 Die Elementmatrix für eine spezielle Bilinearform und Dreieckelemente vom Typ 1 37
  - 2.2.3 Die Elementmatrix für Dreieckelemente vom Typ 2 43
  - 2.2.4 Die Elementmatrix für Rechteckelemente vom Typ 1 bzw. bilineare Viereckelemente 45
  - 2.2.5 Die Elementmatrix für den Laplace-Operator mit Tetraederelementen 47
  - 2.2.6 Elementmatrix für den Laplace-Operator mit trilinearen Quaderelementen 48

### 3 Verfahren zur Lösung von linearen Gleichungssystemen 51

- 3.1 Direkte oder iterative Verfahren? 51
- 3.2 Direkte Verfahren 53
  - 3.2.1 Der Gaußsche Algorithmus 53
  - 3.2.2 Symmetrische Matrizen. Das Cholesky-Verfahren 58
  - 3.2.3 Weitere direkte Verfahren 60
- 3.3 Iterative Verfahren 65

3.3.1	Allgemeine Bemerkungen	65
3.3.2	Das Jacobi-Verfahren, das Gauß-Seidel-Verfahren und das Verfahren der sukzessiven Überrelaxation (SOR)	67
3.3.3	Das Verfahren der konjugierten Gradienten (CG)	71
3.3.4	Vorkonditionierte CG-Verfahren (PCG)	75
3.3.5	Mehrgitterverfahren	80
<b>4</b>	<b>Konvergenzaussagen</b>	<b>85</b>
4.1	Allgemeine Bemerkungen zur Konvergenzproblematik	85
4.2	Ein Beweis einer Fehlerabschätzung für Dreieckselemente vom Typ 1	86
4.2.1	Zurückführung des Konvergenzproblems auf ein Approximationsproblem	86
4.2.2	Die Approximation durch stückweise lineare Funktionen	87
4.2.3	Fehlerabschätzung für Dreieckselemente vom Typ 1	97
4.3	Zusammenfassung der Resultate	99
<b>5</b>	<b>Numerische Integration</b>	<b>107</b>
5.1	Allgemeine Bemerkungen	107
5.2	Der Quadraturfehler für lineare Elemente	108
5.3	Eine Übersicht: passende Integrationsformeln	112
<b>6</b>	<b>Randapproximation. Isoparametrische Elemente</b>	<b>121</b>
6.1	Approximation des Gebietes $\Omega$ durch ein Polygon	121
6.2	Isoparametrische Elemente	124
6.3	Randapproximation mit Hilfe isoparametrischer quadratischer Elemente	128
<b>7</b>	<b>Gemischte Verfahren</b>	<b>131</b>
7.1	Ein Strömungsproblem (Stokes-Problem)	131
7.2	Laplace-Gleichung	135
7.3	Biharmonische Gleichung	140
7.3.1	Stetiges und diskretes Problem	140
7.3.2	Formulierung als gemischtes Problem	142
7.4	Lösung der entstehenden Gleichungssysteme	146
<b>8</b>	<b>Nichtkonforme FEM</b>	<b>151</b>
8.1	Laplace-Gleichung	151
8.1.1	Diskretes Problem	151
8.1.2	Konvergenzproblem	156
8.1.3	Beispiele nichtkonformer finiter Dreieck- und Rechteckelemente	158
8.2	Biharmonische Gleichung	164
8.2.1	Stetiges und diskretes Problem	164
8.2.2	Beispiele nichtkonformer finiter Dreieck- und Rechteckelemente	166
8.3	Stokes-Problem	172
<b>9</b>	<b>Nichtstationäre (parabolische) Aufgaben</b>	<b>177</b>
9.1	Das stetige, das semidiskrete und das diskrete Problem	177
9.2	Numerische Integration von Anfangswertaufgaben: eine Übersicht	179

9.3	Die Diskretisierung des semidiskreten Problems mit dem $\theta$ -Schema	187
9.4	Eine Gesamtfehlerabschätzung für das $\theta$ -Schema	189
<b>10</b>	<b>Gittergenerierung und Gittersteuerung</b>	<b>193</b>
10.1	Erzeugung und Verfeinerung von Dreiecksgittern	193
10.2	Fehlerschätzung und Gittersteuerung	197
10.2.1	Residuale und zielorientierte Fehlerschätzer	198
10.2.2	Schätzer, basierend auf Superkonvergenz und Mittelung	201
<b>Anhang A</b>	<b>Hinweise auf Software und ein Beispiel</b>	<b>205</b>
A.1	Notwendige Files für das MATLAB-Programm fem2d	206
A.2	Einige numerische Ergebnisse	209
	<b>Literaturnachweis</b>	<b>213</b>
	<b>Index</b>	<b>217</b>