

Kapitel 4

Fourier-Reihen und Fourier-Integrale

4.1 Fourier-Reihen periodischer Funktionen

Dieser Abschnitt befasst sich mit Fourier-Reihen: der **Sinusreihe**, der **Kosinusreihe** und der **Exponentialreihe** e^{ikx} . Rechteckschwingungen (mit den Funktionswerten 1, 0 oder -1) sind großartige Beispiele für Funktionen mit Deltafunktionen in der Ableitung. Wir sehen uns einen Impuls, eine Stufenfunktion und eine Rampenfunktion an – und glattere Funktionen natürlich auch.

Beginnen wir mit der Funktion $\sin x$. Sie hat die Periode 2π , weil $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ ist. Sie ist eine ungerade Funktion, weil $\sin(-x) = -\sin x$ ist. Und außerdem ist sie an der Stelle $x = 0$ und $x = \pi$ null. Jede Funktion $\sin nx$ hat diese drei Eigenschaften. Fourier betrachtete eine *unendliche Kombination solcher Sinusfunktionen*:

Fourier-Sinusreihe

$$S(x) = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx. \quad (4.1)$$

Wenn die Koeffizienten b_1, b_2, \dots hinreichend schnell kleiner werden (wir ahnen die Bedeutung der Abfallrate), dann erbt die Summe $S(x)$ alle drei Eigenschaften:

$$\text{Periodisch } S(x + 2\pi) = S(x) \quad \text{Ungerade } S(-x) = -S(x) \quad S(0) = S(\pi) = 0.$$

Vor 200 Jahren überraschte Fourier die Mathematiker Frankreichs mit der Behauptung, dass sich *jede Funktion* $S(x)$ mit diesen Eigenschaften als eine unendliche Reihe von Sinusfunktionen darstellen lässt. Diese Idee setzte eine enorme Entwicklung der Fourier-Reihen in Gang. Unser erster Schritt besteht darin, aus $S(x)$ den Koeffizienten b_k zu bestimmen, mit dem $\sin kx$ multipliziert wird.

Es sei $S(x) = \sum b_n \sin nx$. Wir multiplizieren beide Seiten mit $\sin kx$. Anschließend integrieren wir von 0 bis π :

$$\int_0^{\pi} S(x) \sin kx \, dx = \int_0^{\pi} b_1 \sin x \sin kx \, dx + \dots + \int_0^{\pi} b_k \sin kx \sin kx \, dx + \dots \quad (4.2)$$

Bis auf das fett gedruckte Integral mit $n = k$ sind alle Integrale auf der rechten Seite null. Diese Eigenschaft der „**Orthogonalität**“ wird sich durch das gesamte Kapitel ziehen. Die Sinusfunktionen bilden im Funktionenraum 90° -Winkel, wenn ihre Skalarprodukte Integrale von 0 bis π sind:

$$\text{Orthogonalität} \quad \int_0^\pi \sin nx \sin kx dx = 0 \quad \text{für } n \neq k. \quad (4.3)$$

Nullen können wir uns schnell verschaffen, wenn wir $\int \cos mx dx = \left[\frac{\sin mx}{m} \right]_0^\pi = 0 - 0$ integrieren. Das benutzen wir:

Produkt von Sinusfunktionen

$$\sin nx \sin kx = \frac{1}{2} \cos(n-k)x - \frac{1}{2} \cos(n+k)x. \quad (4.4)$$

Die Integration von $\cos mx$ mit $m = n - k$ und $m = n + k$ zeigt die Orthogonalität der Sinusfunktionen.

Der Fall $n = k$ ist die Ausnahme. Dann integrieren wir $(\sin kx)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2kx$:

$$\int_0^\pi \sin kx \sin kx dx = \int_0^\pi \frac{1}{2} dx - \int_0^\pi \frac{1}{2} \cos 2kx dx = \frac{\pi}{2}. \quad (4.5)$$

Der fett gedruckte Term aus Gleichung (4.2) ist $b_k \pi / 2$. Wir multiplizieren also beide Seiten von Gleichung (4.2) mit $2/\pi$:

Sinusoeffizienten $S(-x) = -S(x)$

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi S(x) \sin kx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi S(x) \sin kx dx. \quad (4.6)$$

Beachten Sie, dass $S(x) \sin kx$ eine *gerade* Funktion ist (die Integrale von $-\pi$ bis 0 und von 0 bis π sind gleich).

Ich werde sofort zum wichtigsten Beispiel für eine Fourier-Sinusreihe kommen. $S(x)$ ist eine **ungerade Rechteckschwingung** mit $SW(x) = 1$ für $0 < x < \pi$. Sie ist in Abbildung 4.1 auf der nächsten Seite als eine ungerade Funktion dargestellt (mit Periode 2π), die an den Stellen $x = 0$ und $x = \pi$ verschwindet.

Beispiel 4.1 Bestimmen Sie die Fourier-Sinusoeffizienten b_k für die Rechteckschwingung $SW(x)$.

Lösung Verwenden Sie für $k = 1, 2, \dots$ den ersten Teil von Gleichung (4.6) mit $S(x) = 1$ zwischen 0 und π :

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin kx dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{-\cos kx}{k} \right]_0^\pi = \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{2}{1}, \frac{0}{2}, \frac{2}{3}, \frac{0}{4}, \frac{2}{5}, \frac{0}{6}, \dots \right\}. \quad (4.7)$$

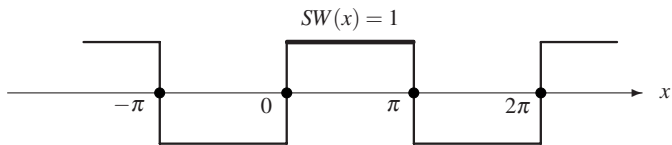


Abb. 4.1 Die ungerade Rechteckschwingung $SW(x + 2\pi) = SW(x) = \{1, 0 \text{ oder } -1\}$.

Die geradzahigen Koeffizienten b_{2k} sind alle null, weil $\cos 2k\pi = \cos 0 = 1$ ist. Die ungeradzahigen Koeffizienten $b_k = 4/\pi k$ fallen mit $1/k$. Diese $1/k$ -Abfallrate wird uns bei allen Funktionen begegnen, die sich aus *glatten Abschnitten und Sprüngen* zusammensetzen.

Setzen Sie die Koeffizienten $4/\pi k$ und null in die Fourier-Sinusreihe $SW(x)$ ein:

Rechteckschwingung

$$SW(x) = \frac{4}{\pi} \left[\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \dots \right]. \tag{4.8}$$

Abbildung 4.2 skizziert diese Summe nach einem Term, den nächsten zehn Termen und fünf weiteren Termen. Sie können das ganz wichtige **Gibbs-Phänomen** beobachten, das auftritt, wenn diese „Partialsommen“ mehr Terme einschließen. Fernab von den Sprungstellen nähern wir uns $SW(x) = 1$ oder -1 gut. An der Stelle $x = \pi/2$ liefert die Reihe eine wunderschön alternierende Summe für die Zahl π :

$$1 = \frac{4}{\pi} \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right] \quad \text{also} \quad \pi = 4 \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right]. \tag{4.9}$$

Das Gibbs-Phänomen ist die *Überschwingung*, die immer näher an die Sprungstelle heranrückt. Ihre Höhe ist $1.18\dots$. Die Höhe nimmt aber nicht ab, wenn wir mehr Terme der Reihe hinzunehmen! Das Überspringen ist die einzige große Hürde bei der Berechnung aller diskontinuierlicher Funktionen (wie Schockwellen in einer Flüssigkeitsströmung). Wir bemühen uns sehr, das Gibbs-Phänomen zu umgehen, aber manchmal gelingt uns das nicht.

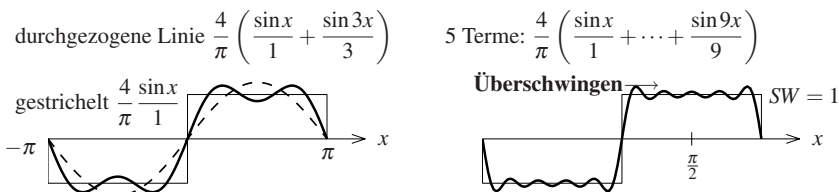


Abb. 4.2 Gibbs-Phänomen: Partialsommen $\sum_1^N b_n \sin nx$ überschwingen nahe der Sprungstellen.

Fourier-Koeffizienten sind am besten

Betrachten wir noch einmal den ersten Term $b_1 \sin x = (4/\pi) \sin x$. Das ist die **nächste Näherung** der Rechteckschwingung SW durch ein Vielfaches von $\sin x$ (nächste Näherung im Sinne kleinster Quadrate). Von dieser optimalen Eigenschaft der Fourier-Koeffizienten überzeugen wir uns, indem wir den Fehler über alle b_1 minimieren:

$$\text{Der Fehler ist } \int_0^\pi (SW - b_1 \sin x)^2 dx.$$

$$\text{Die Ableitung nach } b_1 \text{ ist } -2 \int_0^\pi (SW - b_1 \sin x) \sin x dx.$$

Das Integral über $\sin^2 x$ ist $\pi/2$. Damit ist die Ableitung genau dann null, wenn $b_1 = (2/\pi) \int_0^\pi S(x) \sin x dx$ ist. Das ist Gleichung (4.6) für den Fourier-Koeffizienten.

Jeder Term $b_k \sin kx$ ist so nah wie möglich an $SW(x)$. Wir können die Koeffizienten b_k einzeln nacheinander bestimmen, *weil die Sinusfunktionen orthogonal sind*. Bei der Rechteckschwingung ist $b_2 = 0$, weil alle anderen Vielfachen von $\sin 2x$ den Fehler erhöhen. Term für Term „projizieren wir die Funktion auf jede Achse $\sin kx$.“

Fourier-Kosinusreihen

Die Kosinusreihe lässt sich auf *gerade Funktionen* mit $C(-x) = C(x)$ anwenden:

$$\text{Kosinusreihe } C(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx. \quad (4.10)$$

Jede Kosinusfunktion hat die Periode 2π . Abbildung 4.3 auf der nächsten Seite zeigt zwei gerade Funktionen: die **periodische Rampe** $RR(x)$ und das **Auf/Ab-Training** $UD(x)$. Die Sägezahnrampe RR ist das Integral der Rechteckschwingung. Die Deltafunktionen in UD ergeben die Ableitung der Rechteckschwingung. (Bei Sinusfunktionen sind Ableitung und Integral Kosinusfunktionen.) RR und UD sind nützliche Beispiele, RR ist glatter als SW und UD ist weniger glatt.

Zunächst bestimmen wir Gleichungen für die Kosinuskoeffizienten a_0 und a_k . Der konstante Term a_0 ist das *Mittel* der Funktion $C(x)$:

$$\mathbf{a_0 = Mittel} \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi C(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi C(x) dx. \quad (4.11)$$

Ich habe einfach jeden Term in der Kosinusreihe (4.10) von 0 bis π integriert. Auf der rechten Seite ist das Integral über a_0 gleich $a_0\pi$ (wir dividieren beide Seiten durch π). Alle anderen Integrale sind null:

$$\int_0^\pi \cos nx dx = \left[\frac{\sin nx}{n} \right]_0^\pi = 0 - 0 = 0. \quad (4.12)$$

Mit anderen Worten: Die konstante Funktion 1 ist über dem Intervall $[0, \pi]$ orthogonal zu $\cos nx$.

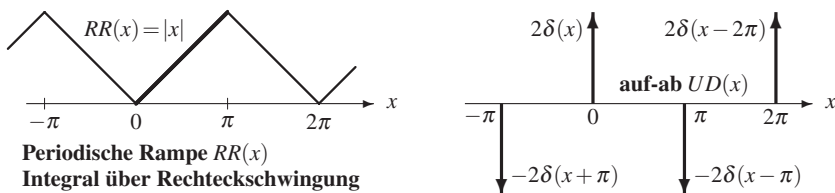


Abb. 4.3 Die periodische Rampe RR und das Auf/Ab-Training UD (periodische Impulse) sind gerade. Die Ableitung der periodischen Rampe RR ist die ungerade Rechteckschwingung SW . Die Ableitung von SW ist UD .

Die anderen Kosinuskoeffizienten a_k ergeben sich aus der *Orthogonalität der Kosinusfunktionen*. Wie bei den Sinusfunktionen multiplizieren wir beide Seiten der Gleichung (4.10) mit $\cos kx$ und integrieren von 0 bis π :

$$\int_0^\pi C(x) \cos kx dx = \int_0^\pi a_0 \cos kx dx + \int_0^\pi a_1 \cos x \cos kx dx + \dots + \int_0^\pi a_k (\cos kx)^2 dx + \dots$$

Sie wissen, wie es nun weitergeht. Auf der rechten Seite kann nur der hervorgehobene Term von null verschieden sein. In Aufgabe 4.1.1 auf Seite 382 soll das mithilfe einer Identität für $\cos nx \cos kx$ gezeigt werden – in der rechten Seite von Gleichung (4.4) steht nun „+“. Der fett gedruckte von null verschiedene Term ist $a_k \pi/2$, und wir multiplizieren beide Seiten mit $2/\pi$:

Kosinuskoeffizienten $C(-x) = C(x)$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi C(x) \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi C(x) \cos kx dx. \tag{4.13}$$

Wieder wird das Integral einfach verdoppelt, um eine volle Periode von $-\pi$ bis π (auch von 0 bis 2π) zu erhalten.

Beispiel 4.2 Bestimmen Sie die Kosinuskoeffizienten der periodischen Rampe $RR(x)$ und des Auf/Ab-Trainings $UD(x)$.

Lösung Der einfachste Weg ist, von der Sinusreihe der Rechteckschwingung auszugehen:

$$SW(x) = \frac{4}{\pi} \left[\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \dots \right].$$

Bilden Sie die Ableitung jedes einzelnen Terms. Das ergibt Kosinusfunktionen im Auf/Ab-Training der Deltafunktionen:

$$\text{Auf/Ab-Training} \quad UD(x) = \frac{4}{\pi} [\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x + \dots]. \quad (4.14)$$

Die enthaltenen Koeffizienten fallen gar nicht ab. Die einzelnen Terme der Reihe gehen nicht gegen null, sodass die Reihe offiziell nicht konvergieren kann. Dennoch ist sie in gewisser Weise zutreffend und wichtig. Inoffiziell sind die Glieder dieser Summe an der Stelle $x = 0$ alle 1 und an der Stelle $x = \pi$ alle -1 . Dann sind $+\infty$ und $-\infty$ konsistent mit $2\delta(x)$ und $-2\delta(x - \pi)$. Der richtige Weg, $\delta(x)$ zu identifizieren, ist der Test $\int \delta(x)f(x) dx = f(0)$. In Beispiel 4.3 machen wir genau das.

Bei der periodischen Rampe integrieren wir die Reihe der Rechteckschwingung $SW(x)$ und addieren die mittlere Rampenhöhe $a_0 = \pi/2$ genau zwischen 0 und π :

Rampenreihe

$$RR(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \frac{\cos 7x}{7^2} + \dots \right]. \quad (4.15)$$

Die Integrationskonstante ist a_0 . Die enthaltenen Koeffizienten a_k fallen wie $1/k^2$. Wir hätten die Koeffizienten auch direkt aus Gleichung (4.13) durch $\int x \cos kx dx$ berechnen können, was aber eine partielle Integration (oder eine Integraltafel oder Zugang zu *Mathematica* oder *Maple*) erfordert hätte. Es war wesentlich einfacher, jede Sinusfunktion in $SW(x)$ einzeln zu integrieren, was den wesentlichen Punkt verdeutlicht: Jeder „Glattheitsgrad“ in der Funktion spiegelt sich in einem schnelleren Abfall der Fourier-Koeffizienten a_k und b_k wider.

Kein Abfall	Deltafunktionen (mit Impulsen)
$1/k$-Abfall	Stufenfunktionen (mit Sprüngen)
$1/k^2$-Abfall	Rampenfunktionen (mit Ecken)
$1/k^4$-Abfall	Splinefunktionen (Sprünge in f''')
r^k-Abfall mit $r < 1$	Analytische Funktionen wie $1/(2 - \cos x)$

Bei jeder Integration wird der k -te Koeffizient durch k dividiert. Das bringt in der Abfallrate einen zusätzlichen Faktor $1/k$. Nach dem „Riemann-Lebesgue-Lemma“ konvergieren die Koeffizienten a_k und b_k jeder stetigen Funktion gegen null (eigentlich, wenn $\int |f(x)| dx$ endlich ist). Analytische Funktionen erreichen einen neuen Glattheitsgrad – sie können unendlich oft differenziert werden. Ihre Fourier-Reihen und Taylor-Reihen in Kapitel 5 konvergieren **exponentiell**.

Die Pole der Funktion $1/(2 - \cos x)$ sind komplexe Lösungen von $\cos x = 2$. Die dazugehörige Fourier-Reihe konvergiert schnell, weil r^k schneller als jede Potenz $1/k^p$ fällt. Analytische Funktionen sind für Berechnungen ideal – das Gibbs-Phänomen tritt überhaupt nicht auf.

Nun kommen wir auf das Beispiel $\delta(x)$ zurück, was möglicherweise das wichtigste Beispiel von allen ist.

Beispiel 4.3 Bestimmen Sie die (Kosinus-) Koeffizienten der 2π -periodischen Deltafunktion $\delta(x)$.

Lösung Der Impuls liegt am Rand des Intervalls $[0, \pi]$, sodass es sicherer ist, von $-\pi$ bis π zu integrieren. Wir bestimmen den Koeffizienten $a_0 = 1/2\pi$ und die anderen Koeffizienten $a_k = 1/\pi$ (Kosinus, weil $\delta(x)$ eine gerade Funktion ist):

Mittel $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(x) dx = \frac{1}{2\pi},$

Kosinusfunktionen $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(x) \cos kx dx = \frac{1}{\pi}.$

In dieser Reihe kommen also alle Kosinusfunktionen zu gleichen Anteilen vor:

Deltafunktion $\delta(x) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} [\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots]. \tag{4.16}$

Auch diese Reihe kann nicht wirklich konvergieren (die einzelnen Terme gehen nicht gegen null). Wir können aber die Summe nach dem Term $\cos 5x$ und nach dem Term $\cos 10x$ darstellen. Abbildung 4.4 auf der nächsten Seite zeigt, wie diese „Partialsommen“ $\delta(x)$ erreichen wollen. Von $x = 0$ ausgehend oszillieren die Partialsommen immer schneller.

In der Tat gibt es eine hübsche Gleichung für die Partialsomme $\delta_N(x)$, die bei $\cos Nx$ aufhört. Wir schreiben zunächst jeden Term $2 \cos \theta$ als $e^{i\theta} + e^{-i\theta}$:

$$\delta_N = \frac{1}{2\pi} [1 + 2 \cos x + \dots + 2 \cos Nx] = \frac{1}{2\pi} [1 + e^{ix} + e^{-ix} + \dots + e^{iNx} + e^{-iNx}].$$

Das ist eine geometrische Reihe, die von e^{-iNx} bis e^{iNx} läuft. In ihr kommen Potenzen des Faktors e^{ix} vor. Die Summe einer geometrischen Reihe kennen wir:

Partialsomme bis $\cos Nx$

$$\delta_N(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i(N+\frac{1}{2})x} - e^{-i(N+\frac{1}{2})x}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(N + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{1}{2}x}. \tag{4.17}$$

Das ist die in Abbildung 4.4 auf der nächsten Seite dargestellte Funktion. Wir behaupten, dass für alle N die Fläche unter $\delta_N(x)$ gleich 1 ist. (Jedes Integral über eine Kosinusfunktion von $-\pi$ bis π ist null. Das Integral über $1/2\pi$ ist 1.) Die zentrale „Spitze“ im Graphen endet dort, wo $\sin(N + \frac{1}{2})x$ null wird. Das ist bei $(N + \frac{1}{2})x = \pm\pi$ der Fall. Ich denke, dass die Fläche unter dieser Spitze (durch fette Punkte markiert) gegen dieselbe Zahl 1.18... konvergiert, die uns bereits im Zusammenhang mit dem Gibbs-Phänomen begegnet ist.

In wiefern konvergiert $\delta_N(x)$ gegen $\delta(x)$? Die Reihenterme $\cos nx$ oszillieren an jedem Punkt $x \neq 0$ und gehen nicht gegen null. An der Stelle $x = \pi$ haben wir $\frac{1}{2\pi} [1 - 2 + 2 - 2 + \dots]$, und die Summe ist $1/2\pi$ oder $-1/2\pi$. Die Höhe der Wellenberge in der Partialsomme wird nicht kleiner als $1/2\pi$. Ob wir tatsächlich die Deltafunktion $\delta(x)$ approximiert haben, können wir testen, indem wir die Partialsomme mit einer glatten Funktion $f(x) = \sum a_k \cos kx$ multiplizieren und anschließend integrieren. Wir kennen $\delta(x)$ nämlich nur durch ihr Integral $\int \delta(x)f(x) dx = f(0)$:

Schwache Konvergenz von $\delta_N(x)$ gegen $\delta(x)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \delta_N(x) f(x) dx = a_0 + \dots + a_N \rightarrow f(0). \tag{4.18}$$

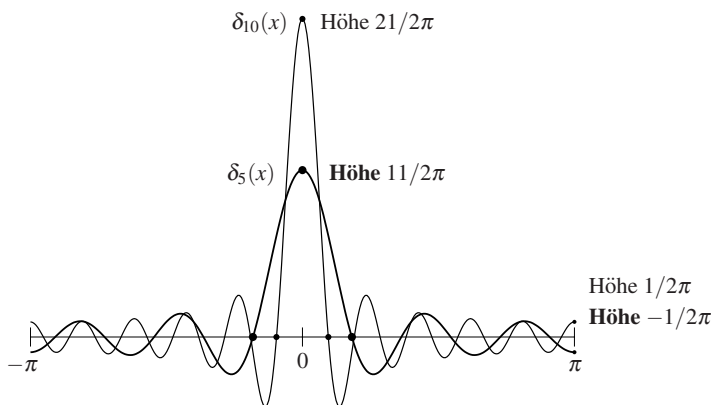


Abb. 4.4 Die Summen $\delta_N(x) = (1 + 2\cos x + \dots + 2\cos Nx)/2\pi$ versuchen, $\delta(x)$ zu erreichen.

In diesem Integral (im schwachen Sinn) konvergieren die Summen $\delta_N(x)$ gegen die Deltafunktion! Die Konvergenz von $a_0 + \dots + a_N$ sagt uns, dass die Fourier-Reihe einer glatten Funktion $f(x) = \sum a_k \cos kx$ an der Stelle $x = 0$ gegen die Zahl $f(0)$ konvergiert.

Komplette Reihen: Sinus- und Kosinusfunktionen

Über der Halbperiode $[0, \pi]$ sind die Sinusfunktionen nicht zu allen Kosinusfunktionen orthogonal. Und zwar ist das Integral über $\sin x$ mal 1 nicht null. Daher gehen wir bei Funktionen $F(x)$, die weder gerade noch ungerade sind, zu kompletten Reihen auf dem ganzen Intervall über (Sinus und Kosinus). Weil unsere Funktionen periodisch sind, kann dieses „ganze Intervall“ $[-\pi, \pi]$ oder $[0, 2\pi]$ sein:

Komplette Fourier-Reihe

$$F(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx. \quad (4.19)$$

Über jedem „ 2π -Intervall“ sind alle Sinus- und Kosinusfunktionen wechselseitig orthogonal. Wir bestimmen die Fourier-Koeffizienten in der üblichen Weise: **Wir multiplizieren Gleichung (4.19) mit 1 , $\cos kx$ und $\sin kx$ und integrieren beide Seiten von $-\pi$ bis π :**

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) dx \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos kx dx \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin kx dx. \quad (4.20)$$

Die Orthogonalität lässt unendlich viele Integrale verschwinden, sodass nur das gewünschte Integral übrig bleibt.

Eine andere Herangehensweise ist, die Funktion $F(x) = C(x) + S(x)$ in einen geraden und einen ungeraden Anteil zu zerlegen. Dann können wir die Gleichungen von vorhin für die Kosinus- und die Sinusreihe benutzen. Die beiden Teil sind:

$$\begin{aligned}
 C(x) &= F_{\text{gerade}}(x) = \frac{F(x) + F(-x)}{2} \\
 S(x) &= F_{\text{ungerade}}(x) = \frac{F(x) - F(-x)}{2}.
 \end{aligned}
 \tag{4.21}$$

Der gerade Teil liefert die Koeffizienten a , und der ungerade Teil liefert die Koeffizienten b . Wir prüfen das anhand eines Quadratimpulses von $x = 0$ bis $x = h$ – diese einseitige Funktion ist weder gerade noch ungerade.

Beispiel 4.4 Bestimmen Sie die Koeffizienten a und b im Fall

$$F(x) = \text{Quadratimpuls} = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 < x < h \\ 0 & \text{für } h < x < 2\pi \end{cases}.$$

Lösung Die Integrale für a_0, a_k und b_k gehen nur bis $x = h$, denn dort fällt $F(x)$ auf null. Die Koeffizienten fallen wie $1/k$, weil es an der Stelle $x = 0$ einen Sprung und an der Stelle $x = h$ einen Abfall gibt:

$$\begin{aligned}
 \text{Koeffizienten eines Quadratimpulses} \quad a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^h 1 \, dx = \frac{h}{2\pi} = \text{Mittel} \\
 a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^h \cos kx \, dx = \frac{\sin kh}{\pi k} \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^h \sin kx \, dx = \frac{1 - \cos kh}{\pi k}.
 \end{aligned}
 \tag{4.22}$$

Wenn wir $F(x)$ durch h dividieren, erhalten wir ein schmales hohes Rechteck: Höhe $\frac{1}{h}$, Basis h und Flächeninhalt 1.

Im Limes h gegen null wird $F(x)/h$ in ein sehr schmales Intervall gequetscht. Das hohe Rechteck geht (schwach) gegen die Deltafunktion $\delta(x)$. Die mittlere Höhe ist Flächeninhalt/ $2\pi = 1/2\pi$. Die anderen Koeffizienten a_k/h und b_k/h gehen gegen $1/\pi$ und null, was uns von $\delta(x)$ bereits bekannt ist:

$$\frac{F(x)}{h} \rightarrow \delta(x) \quad \frac{a_k}{h} = \frac{1}{\pi} \frac{\sin kh}{kh} \rightarrow \frac{1}{\pi} \quad \text{und} \quad \frac{b_k}{h} = \frac{1 - \cos kh}{\pi kh} \rightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow 0.
 \tag{4.23}$$

Wenn die Funktion eine Sprungstelle hat, trifft die zugehörige Fourier-Reihe den Punkt auf halber Höhe. In diesem Beispiel sind die Grenzwerte demnach $F(0) = \frac{1}{2}$ und $F(h) = \frac{1}{2}$.

Dort, wo die Funktion glatt ist, konvergiert die Fourier-Reihe an jedem Punkt gegen $F(x)$. Das ist eine sehr hochentwickelte Theorie. Carleson wurde im Jahr 2006 mit dem Abel-Preis ausgezeichnet, weil er Konvergenz für alle x bis auf eine Menge vom Maß null bewies. Er konnte zeigen, dass die Fourier-Reihe „fast überall“ konvergiert, wenn die Energie $\int |F(x)|^2 \, dx$ der Funktion endlich ist.

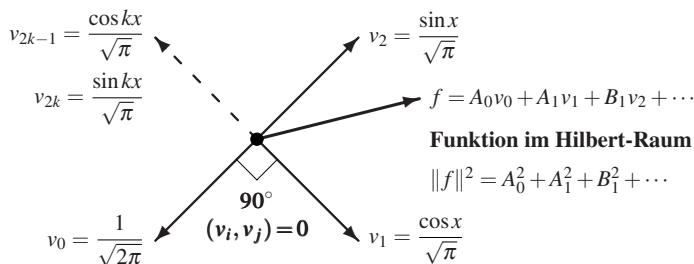


Abb. 4.5 Die Fourier-Reihe ist eine Kombination orthonormaler Funktionen v (Sinus- und Kosinusfunktionen).

Energie in der Funktion = Energie in den Koeffizienten

Es gibt eine äußerst wichtige Gleichung (*die Energieidentität*), die sich aus der Integration von $(F(x))^2$ ergibt. Wenn wir die Fourier-Reihe von $F(x)$ quadrieren und von $-\pi$ bis π integrieren, fallen alle „Kreuzterme“ heraus. Von null verschiedene Integrale ergeben sich nur aus den Termen 1^2 , $\cos^2 kx$ und $\sin^2 kx$, die mit a_0^2 , a_k^2 und b_k^2 multipliziert sind:

$$\begin{aligned} \text{Energie in } F(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} (a_0 + \sum a_k \cos kx + \sum b_k \sin kx)^2 dx \\ \int_{-\pi}^{\pi} (F(x))^2 dx &= 2\pi a_0^2 + \pi(a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + \dots). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Die Energie in $F(x)$ ist gleich der Energie in den Koeffizienten. Das Integral auf der linken Seite ist wie das Quadrat der Länge eines Vektors, bis auf die Tatsache, dass hier *der Vektor eine Funktion ist*. Die rechte Seite ist wie die quadrierte Länge eines unendlich langen Vektors, dessen Komponenten die Koeffizienten a und b sind. Beide Längen sind gleich, die Fourier-Transformation einer Funktion in einen Vektor verhält sich also wie eine orthogonale Matrix. Wenn wir mit den Konstanten $\sqrt{2\pi}$ und $\sqrt{\pi}$ normieren, erhalten wir eine *orthonormale Basis im Funktionenraum*.

Was ist dieser Funktionenraum? Er ist wie der gewöhnliche dreidimensionale Raum, bis auf die Tatsache, dass die „Vektoren“ Funktionen sind. Ihre Länge $\|f\|$ ergibt sich, wenn wir integrieren anstatt zu addieren: $\|f\|^2 = \int |f(x)|^2 dx$. Diese Funktionen bilden einen **Hilbert-Raum**. Es gelten die geometrischen Regeln:

Länge $\|f\|^2 = (f, f)$ ergibt sich aus dem Skalarprodukt $(f, g) = \int f(x)g(x) dx$.

Orthogonale Funktionen $(f, g) = 0$ bilden ein rechtwinkliges Dreieck:

$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2.$$

In Abbildung 4.5 habe ich versucht, den Hilbert-Raum zu zeichnen. Er besitzt unendlich viele Achsen. *Die Energieidentität (4.24) ist genau der Satz des Pythagoras im unendlich dimensionalen Raum.*

Komplexe Exponentialfunktionen $c_k e^{ikx}$

Das hier ist kein großer Schritt, wir müssen ihn aber machen. An die Stelle der einzelnen Gleichungen für a_0 , a_k und b_k tritt nun *eine Gleichung* für die komplexen Koeffizienten c_k . Auch die Funktion $F(x)$ kann komplex sein (wie in der Quantenmechanik). Die diskrete Fourier-Transformation ist wesentlich einfacher, wenn wir N komplexe Exponentialfunktionen als Vektor benutzen. Das tun wir vorab mit der komplexen unendlichen Reihe für eine 2π -periodische Funktion:

Komplexe Fourier-Reihe

$$F(x) = c_0 + c_1 e^{ix} + c_{-1} e^{-ix} + \dots = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}. \tag{4.25}$$

Wenn für alle Koeffizienten $c_n = c_{-n}$ gilt, können wir e^{inx} mit e^{-inx} zu $2 \cos nx$ kombinieren. Dann ist Gleichung (4.25) die Kosinusreihe einer geraden Funktion. Wenn für alle Koeffizienten $c_n = -c_{-n}$ gilt, benutzen wir die Beziehung $e^{inx} - e^{-inx} = 2i \sin nx$. Dann ist Gleichung (4.25) die Sinusreihe einer ungeraden Funktion, und die Koeffizienten c sind rein imaginär.

Um die Koeffizienten c_k zu bestimmen, multiplizieren wir Gleichung (4.25) mit e^{-ikx} (nicht mit e^{ikx}) und integrieren von $-\pi$ bis π :

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x) e^{-ikx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} c_0 e^{-ikx} dx + \int_{-\pi}^{\pi} c_1 e^{ix} e^{-ikx} dx + \dots + \int_{-\pi}^{\pi} c_k e^{ikx} e^{-ikx} dx + \dots$$

Die komplexen Exponentialfunktionen sind orthogonal. Bis auf den hervorgehobenen Term (im Fall $n = k$ mit $e^{ikx} e^{-ikx} = 1$) ist jedes Integral auf der rechten Seite null. Das Integral von 1 ist 2π . Aus diesem verbleibenden Term ergibt sich die Gleichung für die Koeffizienten c_k :

$$\text{Fourier-Koeffizienten} \quad \int_{-\pi}^{\pi} F(x) e^{-ikx} dx = 2\pi c_k \quad \text{für } k = 0, \pm 1, \dots \tag{4.26}$$

Bedenken Sie, dass $c_0 = a_0$ das Mittel von $F(x)$ bleibt, weil $e^0 = 1$ gilt. Die Orthogonalität von e^{inx} und e^{ikx} können wir wie üblich prüfen, indem wir integrieren. Im komplexen Skalarprodukt (F, G) kommt allerdings die *konjugiert komplexe Funktion \overline{G} von G vor*. Bevor wir integrieren, ersetzen wir e^{ikx} durch e^{-ikx} :

Komplexes Skalarprodukt

$$(F, G) = \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \overline{G(x)} dx$$

Orthogonalität von e^{inx} und e^{ikx}

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)x} dx = \left[\frac{e^{i(n-k)x}}{i(n-k)} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0. \tag{4.27}$$

Beispiel 4.5 Addieren Sie die komplexen Reihen von $1/(2 - e^{ix})$ und $1/(2 - e^{-ix})$.

Diese geometrischen Reihen haben einen exponentiell schnellen Abfall von $1/2^k$. Die Funktionen sind analytisch.

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{e^{ix}}{4} + \frac{e^{2ix}}{8} + \dots\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{e^{-ix}}{4} + \frac{e^{-2ix}}{8} + \dots\right) = 1 + \frac{\cos x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + \frac{\cos 3x}{8} + \dots$$

Wenn wir diese Funktionen addieren, erhalten wir eine reelle analytische Funktion:

$$\frac{1}{2 - e^{ix}} + \frac{1}{2 - e^{-ix}} = \frac{(2 - e^{-ix}) + (2 - e^{ix})}{(2 - e^{ix})(2 - e^{-ix})} = \frac{4 - 2\cos x}{5 - 4\cos x}. \quad (4.28)$$

Das Verhältnis ist die unendlich glatte Funktion mit den Kosinuskoeffizienten $1/2^k$.

Beispiel 4.6 Bestimmen Sie die Koeffizienten c_k des 2π -periodischen Impulses

$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } s \leq x \leq s+h \\ 0 & \text{sonst in } [-\pi, \pi]. \end{cases}$$

Lösung Die Integrale von $-\pi$ bis π aus Gleichung (4.26) werden zu Integralen von s bis $s+h$:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_s^{s+h} 1 \cdot e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{-ikx}}{-ik} \right]_s^{s+h} = e^{-iks} \left(\frac{1 - e^{-ikh}}{2\pi ik} \right). \quad (4.29)$$

Beachten Sie vor allem den einfachen Effekt der Verschiebung um s . Sie „moduliert“ jeden Koeffizienten c_k mit e^{-iks} . Die Energie bleibt unverändert, das Integral über $|F|^2$ verschiebt sich einfach, und für alle Funktionen e^{-iks} ist $|e^{-iks}| = 1$:

$$\text{Verschiebe } F(x) \text{ nach } F(x-s). \longleftrightarrow \text{Multipliziere } c_k \text{ mit } e^{-iks}. \quad (4.30)$$

Beispiel 4.7 Zentrierter Impuls mit der Verschiebung $s = -h/2$. Der Quadrantimpuls ist nun um $x = 0$ zentriert. Diese gerade Funktion ist über dem Intervall von $-h/2$ bis $h/2$ gleich 1:

$$\text{Zentriert durch } s = -\frac{h}{2} \quad c_k = e^{ikh/2} \frac{1 - e^{-ikh}}{2\pi ik} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(kh/2)}{k/2}.$$

Wenn wir durch h dividieren, erhalten wir einen hohen Impuls. Der Quotient aus $\sin(kh/2)$ und $kh/2$ ist die **sinc-Funktion**:

Hoher Impuls

$$\frac{F_{\text{zentriert}}}{h} = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{kh}{2}\right) e^{ikx} = \begin{cases} 1/h & \text{für } -h/2 \leq x \leq h/2 \\ 0 & \text{sonst in } [-\pi, \pi]. \end{cases}$$

Die Division durch h bringt uns Flächeninhalt = 1. **Jeder Koeffizient geht für $h \rightarrow 0$ gegen $\frac{1}{2\pi}$** . Die Fourier-Reihe für den hohen, schmalen Impuls konvergiert wieder gegen die Fourier-Reihe für $\delta(x)$.

Der Hilbert-Raum kann Vektoren $c = (c_0, c_1, c_{-1}, c_2, c_{-2}, \dots)$ anstatt Funktionen $F(x)$ enthalten. Die Länge von c ist $2\pi \sum |c_k|^2 = \int |F|^2 dx$. Der Funktionenraum wird oft als L^2 und der Vektorraum als ℓ^2 bezeichnet. Die Energieidentität ist trivial (aber tiefgreifend). Wenn wir über das Produkt aus $F(x)$ und $\overline{F(x)}$ integrieren, beseitigt die Orthogonalität alle $c_n \overline{c_k}$ für $n \neq k$. Es bleibt $c_k \overline{c_k} = |c_k|^2$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F(x)|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} (\sum c_n e^{inx}) (\sum \overline{c_k} e^{-ikx}) dx = 2\pi (|c_0|^2 + |c_1|^2 + |c_{-1}|^2 + \dots). \tag{4.31}$$

Das ist die Identität von Plancherel: Die Energie im x -Raum ist gleich der Energie im k -Raum.

Zum Schluss möchte ich die drei wichtigen Regeln für das Rechnen mit $F(x) = \sum c_k e^{ikx}$ herausstellen:

1. **Die Ableitung $\frac{dF}{dx}$ hat die Fourier-Koeffizienten ikc_k**
(Energie wandert in große k).
2. **Das Integral von $F(x)$ hat die Fourier-Koeffizienten $\frac{c_k}{ik}, k \neq 0$**
(schnellerer Abfall).
3. **Die Verschiebung nach $F(x - s)$ hat die Fourier-Koeffizienten $e^{-iks} c_k$**
(keine Änderung der Energie).

Anwendung: Laplace-Gleichung auf einem Kreis

Unsere erste Anwendung ist die Laplace-Gleichung. Die Idee besteht darin, $u(x, y)$ als unendliche Reihe zu konstruieren, wobei die Koeffizienten so gewählt sind, dass $u(x, y)$ die Randbedingung $u_0(x, y)$ erfüllt. Es hängt alles von der Form des Randes ab, und wir wählen einen Kreis vom Radius 1.

Wir beginnen mit den einfachen Lösungen der Laplace-Gleichung 1, $r \cos \theta, r \sin \theta, r^2 \cos 2\theta, r^2 \sin 2\theta, \dots$ Kombinationen dieser speziellen Lösungen liefern alle Lösungen auf dem Kreis:

$$u(r, \theta) = a_0 + a_1 r \cos \theta + b_1 r \sin \theta + a_2 r^2 \cos 2\theta + b_2 r^2 \sin 2\theta + \dots \tag{4.32}$$

Wir müssen die Konstanten a_k und b_k nur noch so wählen, dass auf dem Kreis $u = u_0$ gilt. Bei einem Kreis ist $u_0(\theta)$ periodisch, weil θ und $\theta + 2\pi$ denselben Punkt beschreiben:

Setze $r = 1$

$$u_0(\theta) = a_0 + a_1 \cos \theta + b_1 \sin \theta + a_2 \cos 2\theta + b_2 \sin 2\theta + \dots \tag{4.33}$$

Das ist genau die Fourier-Reihe für u_0 . **Die Konstanten a_k und b_k müssen die Fourier-Koeffizienten von $u_0(\theta)$ sein.** Also ist die Aufgabe vollständig gelöst, wenn eine unendliche Reihe (4.32) als Lösung akzeptabel ist.

Beispiel 4.8 **Punktquelle** $u_0 = \delta(\theta)$ an der Stelle $\theta = 0$. Bis auf die Stelle $x = 1$, $y = 0$, an der sich die Punktquelle befindet, wird der ganze Rand auf $u_0 = 0$ gehalten. Bestimmen Sie die Temperatur $u(r, \theta)$ innerhalb des Gebietes.

Fourier-Reihe für δ

$$u_0(\theta) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}(\cos \theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta + \dots) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{in\theta}.$$

Innerhalb des Kreises wird jedes $\cos n\theta$ mit r^n multipliziert:

Unendliche Reihe für u

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}(r \cos \theta + r^2 \cos 2\theta + r^3 \cos 3\theta + \dots). \quad (4.34)$$

Poisson hat es geschafft, diese unendliche Reihe aufzusummieren! Die Summe enthält eine Reihe von Potenzen von $re^{i\theta}$. Damit kennen wir die Antwort an jeder Stelle (r, θ) auf die Punktquelle an der Stelle $r = 1$, $\theta = 0$:

$$\text{Temperatur im Kreis} \quad u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos \theta}. \quad (4.35)$$

Das ergibt im Mittelpunkt $r = 0$ das Mittel von $u_0 = \delta(\theta)$, was $a_0 = 1/2\pi$ ist. An allen Randpunkten mit $r = 1$ ergibt das $u = 0$ bis auf die Stelle, an der sich die Punktquelle befindet. Dort ist $\cos 0 = 1$:

$$\text{Auf dem Strahl } \theta = 0 \text{ ist} \quad u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r} = \frac{1}{2\pi} \frac{1 + r}{1 - r}. \quad (4.36)$$

Für r gegen 1 wird diese Lösung unendlich, wie es die Punktquelle fordert.

Beispiel 4.9 Lösen Sie die Laplace-Gleichung für beliebige Randwerte $u_0(\theta)$ durch Integration über Punktquellen.

Wenn sich die Punktquelle nun auf dem Rand um einen Winkel φ verschiebt, steht in der Lösung (4.35) $\theta - \varphi$ anstatt θ . Wir integrieren diese Green-Funktion, um die Lösung im Kreis zu bestimmen:

$$\text{Poisson-Formel} \quad u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_0(\varphi) \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - \varphi)} d\varphi. \quad (4.37)$$

An der Stelle $r = 0$ ist der Bruch 1, und die Lösung u ist das Mittel $u_0(\varphi)d\varphi/2\pi$. Die stationäre Temperatur im Mittelpunkt ist die mittlere Temperatur auf dem Kreis.

Die Poisson-Formel illustriert eine Schlüsselidee. Stellen Sie sich eine beliebige Bedingung $u_0(\theta)$ als einen Kreis aus lauter Punktquellen auf dem Rand vor. Die Quelle im Winkel $\varphi = \theta$ liefert die Lösung unter dem Integral (4.37). Wenn wir

über den ganzen Kreis integrieren, summieren wir demnach über die Lösungen für alle einzelnen Quellen, was die Lösung zur Bedingung $u_0(\theta)$ liefert.

Beispiel 4.10 Die Randbedingungen sind: $u_0(\theta) = 1$ auf der oberen Hälfte und $u_0 = -1$ auf der unteren Hälfte des Kreises. Lösen Sie die Laplace-Gleichung.

Lösung Die Randwerte gehören zur Rechteckschwingung $SW(\theta)$. Die Sinusreihe dieser Funktion kennen wir aus Gleichung (4.8) auf Seite 367:

Rechteckschwingung für $u_0(\theta)$

$$SW(\theta) = \frac{4}{\pi} \left[\frac{\sin \theta}{1} + \frac{\sin 3\theta}{3} + \frac{\sin 5\theta}{5} + \dots \right]. \tag{4.38}$$

Im Kreis liefern die Faktoren r, r^2, r^3, \dots den schnellen Abfall für hohe Frequenzen:

Schneller Abfall der Frequenzen im Kreis

$$u(r, \theta) = \frac{4}{\pi} \left[\frac{r \sin \theta}{1} + \frac{r^3 \sin 3\theta}{3} + \frac{r^5 \sin 5\theta}{5} + \dots \right]. \tag{4.39}$$

Die Laplace-Gleichung hat auch glatte Lösungen, wenn $u_0(\theta)$ nicht glatt ist.

Anschauungsbeispiel

Ein heißer Metallstab wird in einen Kühltank (Temperatur null)¹ gelegt. Die Seiten des Stabes sind ummantelt, sodass Wärme nur an den Enden austreten kann. *Wie groß ist die Temperatur $u(x, t)$ entlang des Stabes zur Zeit t ?* Die Lösung geht gegen $u = 0$, weil der Stab die gesamte Wärme abgibt.

Lösung Die Wärmeleitungsgleichung lautet $u_t = u_{xx}$. Zur Zeit $t = 0$ ist der gesamte Stab auf konstanter Temperatur, sagen wir $u = 1$. Die Enden des Stabes sind zu allen Zeiten $t > 0$ auf Temperatur null. Das ist ein **Anfangsrandwertproblem**:

Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = u_{xx} \text{ mit } u(x, 0) = 1 \text{ und } u(0, t) = u(\pi, t) = 0. \tag{4.40}$$

Diese Art von Randbedingung lässt als Lösung eine Sinusreihe vermuten. Die darin enthaltenen Koeffizienten hängen von t ab:

Lösung der Wärmeleitungsgleichung als Sinusreihe

$$u(x, t) = \sum_1^{\infty} b_n(t) \sin nx. \tag{4.41}$$

Die Form der Lösung zeigt **Trennung der Variablen**. In einer nachfolgenden Anmerkung suchen wir nach Produkten $A(x)B(t)$, die die Wärmeleitungsgleichung

¹ Der Autor betrachtet nur dimensionslose Größen. (Anm. d. Übers.)

erfüllen und den Randbedingungen genügen. Was wir erhalten, ist gerade $A(x) = \sin nx$ und die Sinusreihe (4.41).

Es bleiben zwei Schritte. Zuerst wählen wir alle $b_n(t) \sin nx$ so, dass die Wärmeleitungsgleichung erfüllt ist:

Einsetzen in $u_t = u_{xx}$ liefert

$$b_n'(t) \sin nx = -n^2 b_n(t) \sin nx \quad b_n(t) = e^{-n^2 t} b_n(0).$$

Beachten Sie die Gleichung $b_n' = -n^2 b_n$. Nun bestimmen wir alle $b_n(0)$ aus der Anfangsbedingung $u(x, 0) = 1$ auf dem Intervall $(0, \pi)$. Diese Zahlen sind die Fourier-Sinuskoeffizienten der Rechteckschwingung $SW(x)$ aus Gleichung (4.38) auf der vorherigen Seite:

Kastenfunktion/Rechteckschwingung

$$\sum_1^{\infty} b_n(0) \sin nx = 1 \quad b_n(0) = \frac{4}{\pi n} \text{ für ungerade } n.$$

Damit ist die Reihenlösung des Anfangsrandwertproblems vollständig:

$$\text{Stabtemperatur} \quad u(x, t) = \sum_{\text{ungerade } n} \frac{4}{\pi n} e^{-n^2 t} \sin nx. \quad (4.42)$$

Für große n (hohe Frequenzen) fällt $e^{-n^2 t}$ sehr schnell. Für große Zeiten ist der dominante Term $(4/\pi)e^{-t} \sin x$ mit $n = 1$. Dass die Lösung (das Temperaturprofil) mit wachsendem t sehr glatt wird, ist typisch für die Wärmeleitungsgleichung und alle Diffusionsgleichungen.

Numerisches Problem: Ich bedaure, dass es zu einer so schönen Lösung schlechte Neuigkeiten gibt. Um $u(x, t)$ numerisch zu berechnen, würden wir die Reihe (4.42) vermutlich nach N Termen abbrechen. Wenn Sie sich die graphische Darstellung dieser endlichen Reihe auf der Website ansehen, werden Ihnen die gravierenden Wellen in $u_N(x, t)$ auffallen. Sie fragen sich, ob es dafür einen physikalischen Grund gibt. Dem ist nicht so. Die Lösung sollte die maximale Temperatur im Mittelpunkt $x = \pi/2$ erreichen und von dort glatt auf die Temperatur null an den Enden abfallen.

Diese unphysikalischen Wellen lassen sich gerade wieder auf das **Gibbs-Phänomen** zurückführen. Auf dem Intervall $(0, \pi)$ ist die Anfangsbedingung $u(x, 0) = 1$, die ungerade Spiegelung auf dem Intervall $(-\pi, 0)$ ist aber $u(x, 0) = -1$. Dieser Sprung in $u(x, 0)$ hatte den langsamen $4/\pi n$ -Abfall der Koeffizienten mit Gibbs-Schwingungen um $x = 0$ und $x = \pi$ bewirkt. Die Lösung $u(x, t)$ als Sinusreihe darzustellen, ist aus numerischer Sicht also kein Erfolg. Könnten uns finite Differenzen weiterhelfen?

Trennung der Variablen Wir haben $b_n(t)$ als Koeffizient einer Eigenfunktion $\sin nx$ bestimmt. Eine andere gute Herangehensweise ist, das Produkt $u = A(x)B(t)$ direkt in die Differentialgleichung $u_t = u_{xx}$ einzusetzen:

Trennung der Variablen

$$A(x)B'(t) = A''(x)B(t) \text{ fordert } \frac{A''(x)}{A(x)} = \frac{B'(t)}{B(t)} = \mathbf{\text{konstant}}. \tag{4.43}$$

A''/A ist konstant im Raum, B'/B ist konstant in der Zeit, und beide Konstanten sind gleich:

$$\frac{A''}{A} = -\lambda \text{ liefert } A = \sin \sqrt{\lambda} x \text{ und } \cos \sqrt{\lambda} x, \quad \frac{B'}{B} = -\lambda \text{ ergibt } B = e^{-\lambda t}.$$

Die Produkte $AB = e^{-\lambda t} \sin \sqrt{\lambda} x$ und $e^{-\lambda t} \cos \sqrt{\lambda} x$ lösen die Wärmeleitungsgleichung für alle λ . Die Randbedingung $u(0, t) = 0$ schließt aber die Kosinusfunktion aus. Dann ergibt sich aus der Bedingung $u(\pi, t) = 0$, dass für $\lambda = n^2 = 1, 4, 9, \dots$ die Beziehung $\sin \sqrt{\lambda} \pi = 0$ gelten muss. Die Trennung der Variablen hat die Funktionen aufgedeckt, die sich hinter der Reihenlösung (4.42) verbergen.

Schließlich bestimmt die Bedingung $u(x, 0) = 1$ die Werte $4/\pi n$ für ungerade n . Für gerade n erhalten wir null, weil dann $\sin nx$ genau $n/2$ positive Umläufe und $n/2$ negative Umläufe hat. Für ungerade n ist der zusätzliche positive Umlauf ein Bruchteil $1/n$ aller Umläufe, was den langsamen Abfall der Koeffizienten liefert.

Wärmebad (das umgekehrte Problem). Die auf der cse-Webpräsenz angegebene Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist $1 - u(x, t)$, weil dort eine andere Aufgabe gestellt ist. **Der Stab ist am Anfang auf $U(x, 0) = 0$ eingefroren.** Er wird in ein Wärmebad mit der festen Temperatur $U = 1$ (oder $U = T_0$) gebracht. Die neue Unbekannte ist U , und die zugehörige Randbedingung ist nicht mehr null.

Die Wärmeleitungsgleichung und die zugehörigen Randbedingungen werden zunächst durch $U_B(x, t)$ erfüllt. In diesem Beispiel ist $U_B \equiv 1$ konstant. Dann ist die Randbedingung für die Differenz $V = U - U_B$ null, und die zugehörigen Anfangswerte sind $V = -1$. Nun lösen wir die Gleichung mit der Methode der Eigenfunktionen (oder durch Trennung der Variablen) für V . (Die Reihe aus Gleichung (4.42) wird mit -1 multipliziert, damit $V(x, 0) = -1$ erfüllt ist.) Wenn wir dazu wieder U_B addieren, haben wir die Lösung zum Wärmebadproblem: $U = U_B + V = 1 - u(x, t)$.

Dabei ist $U_B \equiv 1$ die *stationäre* Lösung für $t = \infty$, und V ist die *transiente* Lösung. Die transiente Lösung startet bei $V = -1$ und fällt schnell auf $V = 0$ ab.

Einseitiges Wärmebad: Das auf der cse-Seite dargestellte Problem unterscheidet sich auch noch in einer anderen Weise von unserem Problem. Die Dirichlet-Bedingung $u(\pi, t) = 1$ ist durch die Neumann-Bedingung $u'(1, t) = 0$ ersetzt. Nur das linke Stabende ist im Wärmebad. Die Wärme wird durch den Metallstab hindurch und aus dem anderen Ende heraus geleitet, das sich nun an der Stelle $x = 1$ befindet. Wie ändert sich die Lösung für fest-freie Randbedingungen?

Die stationäre Lösung ist wie vorhin $U_B = 1$. Die Randbedingungen werden an $V = 1 - U_B$ gestellt:

Eigenfunktionen zu fest-freien Randbedingungen

$$V(0) = 0 \text{ und } V'(1) = 0 \text{ führen auf } A(x) = \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi x. \quad (4.44)$$

Diese Eigenfunktionen liefern eine neue Form der Summe von $B_n(t)A_n(x)$:

Lösung zu fest-freien Randbedingungen

$$V(x, t) = \sum_{\text{ungerade } n} B_n(0) e^{-(n+\frac{1}{2})^2\pi^2 t} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi x. \quad (4.45)$$

Alle Frequenzen werden um $\frac{1}{2}$ verschoben und mit π multipliziert, weil $A'' = -\lambda A$ an der Stelle $x = 1$ ein freies Ende hat. Die wesentliche Frage ist: **Sind diese neuen Eigenfunktionen $\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi x$ auf $[0, 1]$ noch orthogonal?** Die Antwort lautet *ja*, weil dieses fest-freie „Sturm-Liouville-Problem“ $A'' = -\lambda A$ immer noch symmetrisch ist.

Zusammenfassung Die Reihenlösungen sind überall erfolgreich, die abgeschnittenen Reihen versagen hingegen überall. Zwar können wir das allgemeine Verhalten von $u(x, t)$ und $V(x, t)$ ablesen, die Werte in der Nähe der Sprungstellen werden aber nicht korrekt berechnet, solange wir das Gibbs-Phänomen nicht in den Griff kriegen.

Wir hätten das fest-freie Problem auf dem Intervall $[0, 1]$ mit der fest-festen Lösung auf dem Intervall $[0, 2]$ lösen können. Diese Lösung wäre symmetrisch um $x = 1$, sodass der Anstieg der Lösung dort null ist. Dann macht die Reskalierung von x mit 2π aus $\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi x$ die Lösung $\sin(2n + 1)x$. Sie können dazu einen Blick auf die cse-Webpräsenz werfen. Ich hoffe, die von Aslan Kasimov erzeugten Grafiken werden Ihnen gefallen.

Aufgaben zu Abschnitt 4.1

4.1.1 Bestimmen Sie die Fourier-Reihe auf dem Intervall $-\pi \leq x \leq \pi$ für

- (a) $f(x) = \sin^3 x$ (ungerade Funktion),
- (b) $f(x) = |\sin x|$ (gerade Funktion),
- (c) $f(x) = x$,
- (d) $f(x) = e^x$ (mithilfe der komplexen Form der Reihe).

Was sind die geraden und ungeraden Anteile von $f(x) = e^x$ und $f(x) = e^{ix}$?

4.1.2 Aus der Parseval-Gleichung ergibt sich, dass die Sinuskoeffizienten für die Rechteckschwingung die Gleichung

$$\pi(b_1^2 + b_2^2 + \dots) = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = 2\pi$$

erfüllen. Leiten Sie daraus die bemerkenswerte Summe $\pi^2 = 8\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots\right)$ ab.

4.1.3 Ein Quadratimpuls sei um die Stelle $x = 0$ zentriert:

$$f(x) = 1 \quad \text{für } |x| < \frac{\pi}{2}, \quad f(x) = 0 \quad \text{für } \frac{\pi}{2} < |x| < \pi.$$

Skizzieren Sie die Funktion, und bestimmen Sie die zugehörigen Fourier-Koeffizienten a_k und b_k .

4.1.4 Eine Funktion f habe die Periode T anstatt $2x$, sodass $f(x) = f(x+T)$ gilt. Ihr Graph von $-T/2$ bis $T/2$ wiederholt sich über aufeinanderfolgenden Intervallen. Ihre reellen und komplexen Fourier-Reihen sind:

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi x}{T} + b_1 \sin \frac{2\pi x}{T} + \dots = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ik2\pi x/T}.$$

Bestimmen Sie die Koeffizienten a_k , b_k und c_k , indem Sie mit den geeigneten Funktionen multiplizieren und von $-T/2$ bis $T/2$ integrieren.

4.1.5 Stellen Sie die ersten drei Partialsummen und die eigentliche Funktion grafisch dar:

$$x(\pi - x) = \frac{8}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{27} + \frac{\sin 5x}{125} + \dots \right), \quad 0 < x < \pi.$$

Warum ist die Abfallrate dieser Funktion $1/k^3$? Was ist ihre zweite Ableitung?

4.1.6 Welche konstante Funktion ist der Funktion $f = \cos^2 x$ im Sinne kleinster Quadrate am nächsten? Welches Vielfache von $\cos x$ ist $f = \cos^3 x$ am nächsten?

4.1.7 Skizzieren Sie die 2π -periodische Halbwelle mit $f(x) = \sin x$ für $0 < x < \pi$ und $f(x) = 0$ für $-\pi < x < 0$. Bestimmen Sie die Fourier-Reihe der Funktion.

4.1.8 (a) Bestimmen Sie die Länge der Vektoren $u = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots)$ und $v = (1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots)$ im Hilbert-Raum. Prüfen Sie die Gültigkeit der Schwarz-Ungleichung $|u^T v|^2 \leq (u^T u)(v^T v)$.

(b) Verwenden Sie das Ergebnis aus Teil (a), um für die Funktionen $f = 1 + \frac{1}{2}e^{ix} + \frac{1}{4}e^{2ix} + \dots$ und $g = 1 + \frac{1}{3}e^{ix} + \frac{1}{9}e^{2ix} + \dots$ die numerischen Werte jedes Terms in folgender Ungleichung zu bestimmen:

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(x) g(x) dx \right|^2 \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2 dx.$$

Setzen Sie f und g ein und benutzen Sie die Orthogonalität (oder Parseval).

4.1.9 Bestimmen Sie die Lösung der Laplace-Gleichung mit der Randbedingung $u_0 = \theta$. Warum ist das der Imaginärteil von $2(z - z^2/2 + z^3/3 \dots) = 2 \log(1+z)$? Überzeugen Sie sich davon, dass der Imaginärteil von $2 \log(1+z)$ auf dem Kreis $z = e^{i\theta}$ mit θ übereinstimmt.

4.1.10 Die Randbedingung zur Laplace-Gleichung sei $u_0 = 1$ für $0 < \theta < \pi$ und $u_0 = 0$ für $-\pi < \theta < 0$. Bestimmen Sie die Lösung $u(r, \theta)$ innerhalb des Einheitskreises als Fourier-Reihe. Wie groß ist u im Ursprung?

4.1.11 Die Randbedingung sei $u_0(\theta) = 1 + \frac{1}{2}e^{i\theta} + \frac{1}{4}e^{2i\theta} + \dots$. Was ist die Fourier-Lösung der Laplace-Gleichung innerhalb des Kreises? Summieren Sie die Reihe.

4.1.12 (a) Überzeugen Sie sich davon, dass der Bruch in der Poisson-Formel die Laplace-Gleichung erfüllt.

(b) Was ist die Antwort $u(r, \theta)$ auf einen Impuls im Punkt $(0, 1)$ ($\varphi = \pi/2$)?

(c) Sei $u_0(\varphi) = 1$ im Viertelkreis $0 < \varphi < \pi/2$ und $u_0 = 0$ sonst. Zeigen Sie, dass dann für alle Punkte auf der horizontalen Achse (und insbesondere im Ursprung) folgendes gilt:

$$u(r, 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \tan^{-1} \left(\frac{1-r^2}{-2r} \right) \quad \text{mithilfe von}$$

$$\int \frac{d\varphi}{b+c \cos \varphi} = \frac{1}{\sqrt{b^2-c^2}} \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{b^2-c^2} \sin \varphi}{c+b \cos \varphi} \right).$$

4.1.13 Der zentrierte Quadratimpuls aus Beispiel 4.7 auf Seite 376 habe die Breite $h = \pi$. Bestimmen Sie

(a) seine Energie $\int |F(x)|^2 dx$ durch direkte Integration,

(b) seine Fourier-Koeffizienten c_k als konkrete Zahlen,

(c) die Summe in der Energieidentität (4.31) oder (4.24).

4.1.14 In Beispiel 4.5 auf Seite 375 ist $F(x) = 1 + (\cos x)/2 + \dots + (\cos nx)/2^n + \dots$ unendlich glatt:

(a) Was ist die Fourier-Reihe von $d^{10}F/dx^{10}$ (bilden Sie zehn Ableitungen)?

(b) Konvergiert diese Reihe weiter schnell? Vergleichen Sie n^{10} mit 2^n für n^{1024} .

4.1.15 (*Eine Spur komplexe Analysis.*) Die analytische Funktion aus Beispiel 4.5 auf Seite 375 explodiert, wenn $4 \cos x = 5$ ist. Bei reellem x kann das nicht passieren, für $e^{ix} = 2$ oder $\frac{1}{2}$ können wir das Explodieren aber beobachten. In diesem Fall haben wir es mit *Polstellen* bei $x = \pm i \log 2$ zu tun. Warum hat die Funktion auch bei allen komplexen Zahlen $x = \pm i \log 2 + 2\pi n$ Pole?

4.1.16 (*Eine zweite Spur.*) Ersetzen Sie in Gleichung (4.28) die Ziffer 2 durch 3, sodass auf der linken Seite der Gleichung nun $1/(3 - e^{ix}) + 1/(3 - e^{-ix})$ steht. Ergänzen Sie diese Gleichung, um die Funktion zu bestimmen, die die schnelle Abfallsrate $1/3^k$ liefert.

4.1.17 (*Nur für komplexe Profis.*) Ersetzen Sie die Ziffern 2 bzw. 3 durch 1:

$$\frac{1}{1 - e^{ix}} + \frac{1}{1 - e^{-ix}} = \frac{(1 - e^{-ix}) + (1 - e^{ix})}{(1 - e^{ix})(1 - e^{-ix})} = \frac{2 - e^{ix} - e^{-ix}}{2 - e^{ix} - e^{-ix}} = 1.$$

Das ist eine Konstante! Was passiert mit dem Pol bei $e^{ix} = 1$? Wo ist die gefährliche Reihe $(1 + e^{ix} + \dots) + (1 + e^{-ix} + \dots) = 2 + 2 \cos x + \dots$, die $\delta(x)$ mit sich bringt?

4.1.18 Lösen Sie entsprechend dem Anschauungsbeispiel die Wärmeleitungsgleichung $u_t = u_{xx}$ für eine Punktquelle $u(x, 0) = \delta(x)$ mit freien Randbedingungen $u'(\pi, t) = u'(-\pi, t) = 0$. Verwenden Sie die unendliche Kosinusreihe für $\delta(x)$ mit den zeitabhängigen Koeffizienten $b_n(t)$.