1

Kapitel 1

Mathematische Vorbereitungen

1

1 Mathematische Vorbereitungen

Die elementare Differential- und Integralrechnung sind eigentlich normaler Bestandteil der Schulmathematik. Die Erfahrung hat jedoch gelehrt, dass die mathematischen Vorkenntnisse der Studierenden des ersten Semesters in dieser Hinsicht stark differieren, sodass Dinge, die dem einen völlig selbstverständlich sind, dem anderen zunächst als *lähmende* Barriere erscheinen. Es sollen deshalb in diesem einführenden Kapitel die wichtigsten Elemente der Differential- und Integralrechnung zusammengestellt werden, die im Folgenden benötigt werden, um mit der *Theoretische Physik* beginnen zu können. Natürlich kann dies nicht die präzise Darstellung der Mathematik-Vorlesung ersetzen, ist also an dieser Stelle nur als *Notprogramm* zu verstehen. Der Leser, der mit der Differential- und Integralrechnung aus dem Schulunterricht bereits vertraut ist, kann die Abschn. 1.1 und 1.2 entweder als *testende* Wiederholung ansehen oder sie direkt überspringen.

1.1

1.1 Elemente der Differentialrechnung

1.1.1 Zahlenmengen

Man definiert die folgenden Zahlentypen:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$	**natürliche Zahlen**
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$	**ganze Zahlen**
$\mathbb{Q} = \left\{x;\ x = \frac{p}{q};\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\right\}$	**rationale Zahlen**
$\mathbb{R} = \{x;\ \text{kontinuierliche Zahlengerade}\}$	**reelle Zahlen** .

Es gilt also

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} .$$

Der Körper der *komplexen Zahlen* $\mathbb{C}$ wird erst später in Abschn. 2.3.5 eingeführt und besprochen. In den hier genannten Zahlenmengen sind die Verknüpfungen *Addition* und *Multiplikation* in bekannter Weise definiert. Wir erinnern deshalb nur kurz an den Prozess des **Potenzierens**. Für eine beliebige reelle Zahl a ist die n-te Potenz wie folgt erklärt:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}} \qquad n \in \mathbb{N} . \tag{1.1}$$

W. Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik 1*.
DOI 10.1007/978-3-642-12948-3

Es gelten die **Regeln:**

1.
$$\left(a\cdot b\right)^n = \underbrace{(a\cdot b)\cdot(a\cdot b)\cdot\ldots\cdot(a\cdot b)}_{n\text{-mal}} = a^n\cdot b^n \tag{1.2}$$

2.
$$a^k\cdot a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{k\text{-mal}}\cdot\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{-mal}} = a^{k+n} \tag{1.3}$$

3.
$$\left(a^n\right)^k = \underbrace{a^n\cdot a^n\cdot\ldots\cdot a^n}_{k\text{-mal}} = a^{n\cdot k}\ . \tag{1.4}$$

Auch **negative Exponenten** sind definiert, was man sich wie folgt klar machen kann:

$$a^n = a^{n+k-k} = a^n\cdot a^{-k}\cdot a^k \quad\curvearrowright\quad a^{-k}\cdot a^k = 1\ .$$

Damit gilt:

$$a^{-k} \equiv \frac{1}{a^k} \quad \forall a\in\mathbb{R}\ \ (a\neq 0)\ . \tag{1.5}$$

Außerdem erkennen wir den wichtigen Spezialfall:

$$a^{k-k} \equiv a^0 = 1 \quad \forall a\in\mathbb{R}\ . \tag{1.6}$$

Diese Beziehung gilt auch für $a = 0$.

Analog und in Erweiterung zu (1.4) werden **gebrochene Exponenten** eingeführt:

$$b^n = a = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n \quad\curvearrowright\quad b = a^{\frac{1}{n}}\ .$$

Man nennt

n*-te Wurzel von *a

$$a^{\frac{1}{n}} \equiv \sqrt[n]{a}\ . \tag{1.7}$$

Es handelt sich also um die Zahl, deren n-te Potenz gerade a ergibt.

Beispiele

$$\sqrt[2]{4} \equiv 4^{\frac{1}{2}} = 2 \quad \text{denn:}\ \ 2^2 = 2\cdot 2 = 4$$

$$\sqrt[3]{27} \equiv 27^{\frac{1}{3}} = 3 \quad \text{denn:}\ \ 3^3 = 3\cdot 3\cdot 3 = 27$$

$$\sqrt[4]{0{,}0001} \equiv 0{,}0001^{\frac{1}{4}} = 0{,}1 \quad \text{denn:}\ \ 0{,}1^4 = 0{,}1\cdot 0{,}1\cdot 0{,}1\cdot 0{,}1 = 0{,}0001\ .$$

Schließlich können wir auch **rationale Exponenten** zulassen:

$$a^{\frac{p}{q}} \equiv \sqrt[q]{a^p} \equiv \left(\sqrt[q]{a}\right)^p \quad . \tag{1.8}$$

Die letzte Verallgemeinerung auf beliebige reelle Zahlen wird später vollzogen.

1.1.2 Zahlenfolgen und Grenzwerte

Unter einer *Zahlenfolge* wollen wir eine Folge von (indizierten) reellen Zahlen verstehen:

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots \qquad a_n \in \mathbb{R} \, . \tag{1.9}$$

Es gibt endliche und unendliche Zahlenfolgen. Bei einer endlichen Folge ist n auf einen beschränkten Bereich aus $\mathbb{N}$ begrenzt. Die Folge wird abstrakt (kompakt) durch das Symbol

$$\{a_n\}$$

gekennzeichnet und stellt eine Abbildung der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ auf den Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ dar:

$$f : n \in \mathbb{N} \longrightarrow a_n \in \mathbb{R} \qquad (n \longrightarrow a_n) \, .$$

Beispiele

1. $$a_n = \frac{1}{n} \quad \longrightarrow a_1 = 1,\ a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = \frac{1}{3},\ a_4 = \frac{1}{4} \cdots \tag{1.10}$$

2. $$a_n = \frac{1}{n(n+1)} \quad \longrightarrow a_1 = \frac{1}{1 \cdot 2},\ a_2 = \frac{1}{2 \cdot 3},\ a_3 = \frac{1}{3 \cdot 4}, \cdots \tag{1.11}$$

3. $$a_n = 1 + \frac{1}{n} \quad \longrightarrow a_1 = 2,\ a_2 = \frac{3}{2},\ a_3 = \frac{4}{3},\ a_4 = \frac{5}{4}, \cdots \tag{1.12}$$

1.1.1 **Definition 1.1.1:** *Grenzwert einer Zahlenfolge* Strebt a_n für $n \to \infty$ gegen eine einzige endliche Zahl a, so heißt a Grenzwert (Limes) der Folge $\{a_n\}$:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a \ ; \ a_n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} a \, . \tag{1.13}$$

Die mathematische Definition lautet:

$$\{a_n\} \ \textbf{konvergiert gegen}\ a$$

$$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \text{ derart, dass } \ |a_n - a| < \varepsilon \qquad \forall n > n_\varepsilon \, . \tag{1.14}$$

Gibt es *kein* solches a, so heißt die Folge *divergent*. Konvergiert $\{a_n\}$ gegen a, so gibt es also zu jedem $\varepsilon > 0$ nur endlich viele Folgenelemente mit einem Abstand größer als ε von a.

Beispiele

1. $$\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\} \longrightarrow 0 \qquad (\textit{Nullfolge}) \tag{1.15}$$

2. $$\{a_n\} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\} \longrightarrow 1\,, \tag{1.16}$$

   denn:

   $$\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \longrightarrow \frac{1}{1+0} = 1\,.$$

   Hier haben wir im Vorgriff bereits Regel (1.22) benutzt.

3. $$\{a_n\} = \{q^n\} \longrightarrow 0 \;\;, \quad \text{falls} \;\; |q| < 1\,. \tag{1.17}$$

   Der Beweis dieser Aussage gelingt mit Hilfe des *Logarithmus*, den wir aber erst mit (1.65) einführen. Der Beweis zu (1.17) wird deshalb im Anschluss an (1.70) durchgeführt.

4. $$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow \mathrm{e} = 2{,}71828\ldots \;\; \textit{Euler'sche Zahl}\,. \tag{1.18}$$

   Dieser Grenzwert einer für die Anwendung wichtigen Folge sei hier ohne Beweis angegeben.

Das gilt auch für die folgenden

Rechenregeln für Zahlenfolgen

deren explizite, recht einfache Begründung wir dem Leser überlassen, evtl. unter Zuhilfenahme der mathematischen Lehrbuchliteratur. Es gelte für zwei Folgen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \;\; ; \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b\,.$$

Dann folgt:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b \tag{1.19}$$

$$\lim_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot a \qquad \left(c \in \mathbb{R}\right) \tag{1.20}$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b \tag{1.21}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b} \qquad \left(b, b_n \neq 0 \;\forall n\right)\,. \tag{1.22}$$

1.1.3 Reihen und Grenzwerte

Addiert man die Glieder einer unendlichen Zahlenfolge, so entsteht eine **Reihe**:

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots \curvearrowright a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \,. \tag{1.23}$$

Die Reihe ist letztlich definiert als Grenzwert einer Folge von (endlichen) *Partialsummen*:

$$S_r = \sum_{m=1}^{r} a_m \,. \tag{1.24}$$

Die Reihe **konvergiert** gegen S, falls

$$\lim_{r \to \infty} S_r = S \tag{1.25}$$

existiert. Andernfalls ist sie **divergent**.

Eine *notwendige* Bedingung dafür, dass die Reihe $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ konvergent ist, stellt die Forderung

$$\lim_{m \to \infty} a_m = 0 \tag{1.26}$$

dar. Falls $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ in der Tat konvergent ist, dann muss nämlich gelten:

$$\lim_{m \to \infty} a_m = \lim_{m \to \infty} \left(S_m - S_{m-1}\right) = \lim_{m \to \infty} S_m - \lim_{m \to \infty} S_{m-1} = S - S = 0 \,.$$

Gleichung (1.26) ist allerdings nicht hinreichend. Ein prominentes Gegenbeispiel stellt die **harmonische Reihe** dar:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \,. \tag{1.27}$$

Sie ist divergent, obwohl $\lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} = 0$! Wir führen den Beweis als Aufgabe 1.1.3. Die Mathematik (Analysis) kennt verschiedene, notwendige und hinreichende Konvergenzkriterien für unendliche Reihen:

Vergleichskriterium,
Quotientenkriterium,
Wurzelkriterium

Wir werden diese im Folgenden nicht explizit benötigen, belassen es deshalb hier bei der Aufzählung (s. Mathematik-Vorlesung zur Analysis).

Einen wichtigen Spezialfall einer unendlichen Reihe stellt die **geometrische Reihe** dar, für die gilt:

$$q^0 + q^1 + q^2 + \cdots + q^m + \cdots = \sum_{m=1}^{\infty} q^{m-1} \,. \tag{1.28}$$

Die Partialsummen

$$S_r = q^0 + q^1 + \cdots + q^{r-1}$$

lassen sich leicht analytisch berechnen. Dazu multiplizieren wir die letzte Gleichung mit q,

$$q\,S_r = q^1 + q^2 + \cdots + q^r$$

und bilden die Differenz:

$$S_r - q\,S_r = S_r(1-q) = q^0 - q^r = 1 - q^r \,.$$

Damit folgt das wichtige Ergebnis:

$$S_r = \frac{1-q^r}{1-q} \,. \tag{1.29}$$

Interessant ist der Grenzwert:

$$\lim_{r\to\infty} S_r = \frac{1 - \lim_{r\to\infty} q^r}{1-q} \,.$$

Hierbei wurden (1.19) und (1.20) ausgenutzt. Es ist also wegen (1.17):

$$S = \lim_{r\to\infty} S_r = \begin{cases} \dfrac{1}{1-q} \,, \text{ falls } |q| < 1 \\ \text{nicht existent, falls } |q| \geq 1 \end{cases} \,. \tag{1.30}$$

1.1.4 Funktionen und Grenzwerte

Unter einer *Funktion* $f(x)$ versteht man die eindeutige Zuordnung einer *abhängigen* Variablen y aus dem **Wertebereich** W zu einer *unabhängigen* Variablen x aus dem **Definitionsbereich** D der Funktion $f(x)$:

$$y = f(x) \quad ; \quad D \subset \mathbb{R} \xrightarrow{f} W \subset \mathbb{R} \,. \tag{1.31}$$

Wir fragen uns, wie sich $f(x)$ mit x ändert. Die Folge

$$\{x_n\} = x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$$

sei aus dem Definitionsbereich der Funktion f. Dann gibt es zu jedem x_n ein

$$y_n = f(x_n)$$

und damit eine „neue“ Folge $\{f(x_n)\}$.

1.1.2 **Definition 1.1.2** $f(x)$ besitzt bei x_0 einen *Grenzwert* f_0, falls für *jede* Folge $\{x_n\} \to x_0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f_0 \; . \tag{1.32}$$

Man schreibt:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f_0 \; . \tag{1.33}$$

Beispiele

1.

$$f(x) = \frac{x^3}{x^3 + x - 1} \qquad ; \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = ? \tag{1.34}$$

Für alle $x \neq 0$ können wir umformen:

$$f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}} \; .$$

Für jede Folge $\{x_n\}$, die gegen ∞ strebt, bilden $\frac{1}{x^2}$ und $\frac{1}{x^3}$ Nullfolgen. Deshalb gilt:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^3 + x - 1} = 1 \; .$$

2.

$$f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}} \qquad ; \qquad \lim_{x\to 0} f(x) = ? \tag{1.35}$$

Für die spezielle Nullfolge $\{x_n\} = \{\frac{1}{n}\}$ kennen wir nach (1.18) den Grenzwert, was sich aber auch für beliebige andere Nullfolgen zeigen lässt:

$$\lim_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e \; . \tag{1.36}$$

Wenn die Zuordnung

$$x \overset{f}{\longleftrightarrow} y \tag{1.37}$$

eineindeutig ist, so lässt sich zu f die

Umkehrfunktion

f^{-1} definieren. Sie ergibt sich durch Auflösen von $y = f(x)$ nach x:

$$f^{-1}(f(x)) = x \; . \tag{1.38}$$

Beispiel

$$y = f(x) = ax + b \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

$$\curvearrowright \; x = f^{-1}(y) = \frac{1}{a} y - \frac{b}{a} \, .$$

Wir werden später noch einige weitere Beispiele kennen lernen. Man beachte, dass im Allgemeinen

$$f^{-1}(x) \not\equiv \frac{1}{f(x)} \, .$$

Wichtig ist die oben schon geforderte Eindeutigkeit von f^{-1}, nur dann ist f^{-1} als *Funktion* zu definieren. So ist die Umkehrung von $y = x^2$ nicht eindeutig: $x = \pm\sqrt{y}$. Beschränkt man jedoch den Definitionsbereich von f z. B. auf nicht-negative x, so existiert die Umkehrfunktion.

1.1.5 Stetigkeit

Wir kommen nun zu dem wichtigen Begriff der

Stetigkeit

$y = f(x)$ heißt **stetig** in x_0 aus dem Definitionsbereich von f, wenn es zu *jedem* $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass für *jedes* x mit

$$|x - x_0| < \delta$$

folgt:

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \, .$$

Alternative Formulierung:

$y = f(x)$ heißt **stetig** in x_0 aus dem Definitionsbereich von f, wenn für *jede* Folge $\{x_n\} \to x_0$ folgt:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = f_0 \, .$$

Der Grenzwert f_0 ist also gleich dem Funktionswert $f(x_0)$. Wir erläutern den Begriff der Stetigkeit an zwei Beispielen:

$$f(x) = \begin{cases} x & : x \geq 1 \\ 1 & : x < 1 \end{cases} \, . \tag{1.39}$$

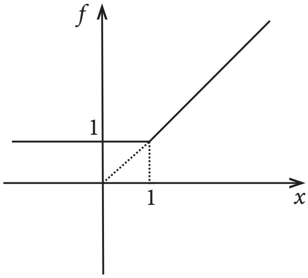

Abb. 1.1. Beispiel einer stetigen Funktion

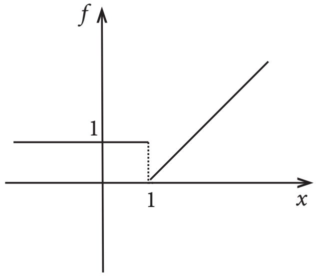

Abb. 1.2. Beispiel einer unstetigen Funktion

Die Funktion (1.39), dargestellt in Abb. 1.1, ist offensichtlich stetig, im Gegensatz zu der Funktion aus Abb. 1.2:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & : x \geq 1 \\ 1 & : x < 1 \end{cases} . \tag{1.40}$$

Diese Funktion ist offensichtlich unstetig in $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = +1 \neq \lim_{x \to 1^+} f(x) = 0 .$$

1.1.6 Trigonometrische Funktionen

Es ist davon auszugehen, dass die trigonometrischen Funktionen aus der Schulmathematik bekannt sind. Es sollen deshalb hier nur die wichtigsten Beziehungen zusammengestellt werden.

- **Bogenmaß**

  Abbildung 1.3 veranschaulicht, dass man den Winkel φ nicht nur in Winkelgraden °, sondern ebenso eindeutig auch über den Kreisbogen s ausdrücken kann:

  $$s = s(\varphi) \quad : \quad s(360°) = 2\pi r \; ; \quad s(180°) = \pi r \; ; \quad s(90°) = \frac{\pi}{2} r \; ; \ldots$$

  Man führt die dimensionslose Größe

Radiant

$$\varphi = \frac{s}{r} \tag{1.41}$$

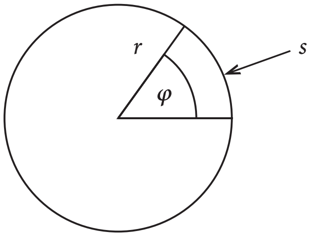

Abb. 1.3. Zur Definition des Bogenmasses

ein:

$$\varphi(^\circ) = 360(180, 90, 45, 1) \longrightarrow 2\pi \left(\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{180}\right) \text{ rad} . \tag{1.42}$$

- **Trigonometrische Funktionen**
  In dem rechtwinkligen Dreieck in Abb. 1.4 sind a die An-Kathete, b die Gegen-Kathete und c die Hypothenuse. Damit definiert man:

$$\sin\alpha = \frac{b}{c} \tag{1.43}$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{c} \tag{1.44}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{b}{a} \tag{1.45}$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{a}{b} . \tag{1.46}$$

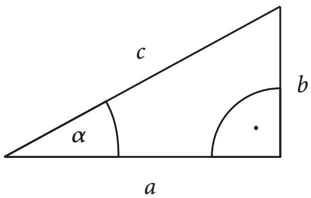

Abb. 1.4. Zur Definition der trigonometrischen Funktionen

Nach dem *Satz von Pythagoras* gilt:

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \curvearrowright \quad \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1 .$$

Das ergibt die wichtige und häufig benutzte Formel:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 . \tag{1.47}$$

- **Sinus-Funktion**
  Die **Sinus**-Funktion lässt sich wie in Abb. 1.5 graphisch darstellen. Dabei beachte man, dass der Winkel α im mathematisch positiven Sinn, also gegen den Uhr-

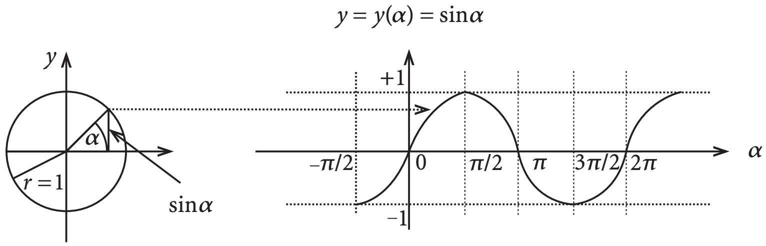

Abb. 1.5. Graphische Darstellung der Sinus-Funktion

zeigersinn, gezählt wird. Der Sinus ist periodisch mit der Periode 2π. Es handelt sich um eine ungerade Funktion des Winkels α:

$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)\ . \tag{1.48}$$

Wir untersuchen als Einschub im Zusammenhang mit dem Sinus einen speziellen Grenzwert:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \qquad ; \qquad \lim_{x\to 0} f(x) = ? \tag{1.49}$$

Der Grenzwert ist zunächst noch unbestimmt („0/0“). Wir versuchen eine graphische Lösung mit Hilfe von Abb. 1.6. x sei ein Stück eines Kreises (von B nach C) mit dem Radius $R = 1$ um den Mittelpunkt $\mathcal{O}$ (Bogenmaß). Dann gilt für das von den Punkten $\mathcal{O}$, B und C festgelegte Kreissegment:

$$F(\mathcal{O}BC) = \pi R^2 \cdot \frac{x}{2\pi R} = \frac{x\,R}{2} = \frac{x}{2}\ .$$

Ferner liest man an der Skizze ab:

$$\overline{\mathcal{O}B} = \overline{\mathcal{O}C} = 1 \ \ ; \ \overline{\mathcal{O}A} = \cos x \ \ ; \ \overline{BA} = \sin x\ .$$

Der Strahlensatz liefert zudem:

$$\frac{\overline{DC}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{\mathcal{O}C}}{\overline{\mathcal{O}A}} \quad \curvearrowright \quad \overline{DC} = \sin x \cdot \frac{1}{\cos x} = \tan x\ .$$

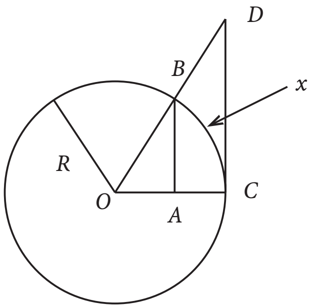

Abb. 1.6. Berechnung von $\lim_{x\to 0} \sin x/x$

Nun gilt offensichtlich folgende Abschätzung für Flächeninhalte:

$$F(\mathcal{O}BA) < F(\mathcal{O}BC) < F(\mathcal{O}DC)\ .$$

Dies bedeutet:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\cos x \sin x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2}\tan x \\ \curvearrowright\quad &\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \qquad\qquad (\sin x > 0) \\ \curvearrowright\quad &\frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x\ . \end{aligned}$$

Nun gilt für $x \to 0$ $\cos x \to 1$ und $\frac{1}{\cos x} \to 1$, sodass gelten muss:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\ . \tag{1.50}$$

In (1.94) werden wir eine Reihenentwicklung für den Sinus ableiten:

$$\sin\alpha = \alpha - \frac{1}{3!}\alpha^3 + \frac{1}{5!}\alpha^5 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!}\ . \tag{1.51}$$

Hier haben wir benutzt:

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n\ \ ;\ 0! = 1! = 1 \qquad\qquad (n\text{-Fakultät})\ . \tag{1.52}$$

Aus der Reihenentwicklung geht insbesondere hervor, dass für kleine Winkel α (im Bogenmaß!) näherungsweise

$$\sin\alpha \approx \alpha \tag{1.53}$$

gilt. Daran erkennt man unmittelbar den Grenzwert (1.50).
Beschränkt man den Winkel α auf das Intervall $[-\pi/2, +\pi/2]$, so besitzt der Sinus eine eindeutige Umkehrfunktion, die man als **Arcus Sinus** bezeichnet:

$$\alpha = \sin^{-1}(y) = \arcsin(y)\ . \tag{1.54}$$

Diese Funktion bildet das Intervall $[-1, +1]$ für y auf das Intervall $[-\pi/2, +\pi/2]$ für α ab. Diese Umkehrfunktion gibt den Wert des Winkels α im Bogenmaß an, dessen Sinus-Wert gerade y beträgt.

– **Kosinus-Funktion**

Während der Sinus nach Abb. 1.5 über die Gegen-Kathete des rechtwinkligen Dreiecks festgelegt wird, bestimmt sich die **Kosinus**-Funktion ganz analog über

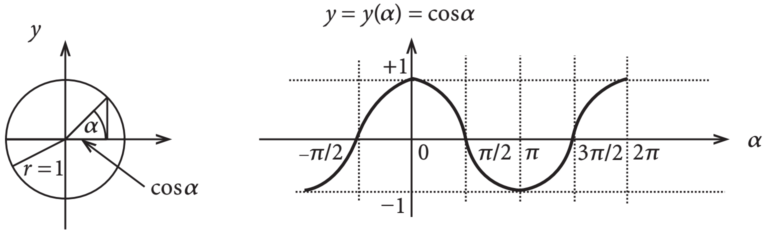

Abb. 1.7. Graphische Darstellung der Kosinus-Funktion

die An-Kathete (Abb. 1.7). Man erkennt an den rechtwinkligen Dreiecken in den Abb. 1.5 und 1.7, dass es sich um den um $\pi/2$ verschobenen Sinus handelt:

$$\cos(\alpha) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) . \tag{1.55}$$

Beschränkt man den Winkel α auf das Intervall $0 \leq \alpha \leq \pi$ so existiert eine eindeutige Umkehrfunktion, die **Arcus Kosinus** genannt wird:

$$\alpha = \cos^{-1}(y) = \arccos(y) . \tag{1.56}$$

Es handelt sich beim Kosinus um eine gerade Funktion von α:

$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha) . \tag{1.57}$$

In Aufgabe 1.1.12 leiten wir die Reihenentwicklung des Kosinus ab:

$$\cos(\alpha) = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha^{2n}}{(2n)!} . \tag{1.58}$$

Aus dieser Reihenentwicklung entnimmt man, dass für kleine Winkel α (im Bogenmaß!) näherungsweise

$$\cos\alpha \approx 1 \tag{1.59}$$

gilt.

Außerordentlich nützlich sind die **Additionstheoreme** der trigonometrischen Funktionen, die wir später mit Hilfe der Euler'schen Formel für komplexe Zahlen in Aufgabe 2.3.9 relativ einfach werden beweisen können:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\, \cos\beta \pm \sin\beta\, \cos\alpha \tag{1.60}$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\, \cos\beta \mp \sin\alpha\, \sin\beta \tag{1.61}$$

1.1.7 Exponentialfunktion, Logarithmus

- **Exponentialfunktion**
  Darunter versteht man die Funktion

$$y = a^x \,. \tag{1.62}$$

a nennt man die *Basis* und x den *Exponenten*. Dabei kann a irgendeine beliebige reelle Zahl sein. Häufig benutzt man die *Euler'sche Zahl* e (1.18) und schreibt:

$$y = y_0 \, \mathrm{e}^{\alpha x} \equiv y_0 \, \exp(\alpha x) \,. \tag{1.63}$$

Diese Funktion besitzt in der theoretischen Physik eine große Bedeutung und

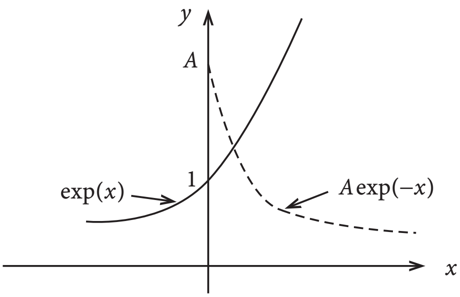

Abb. 1.8. Schematischer Verlauf der Exponentialfunktion

wird entsprechend häufig eingesetzt (Wachstumsfunktion, Zunahme einer Population, Strahlungszerfall einer radioaktiven Substanz, Auf- und Entladung eines Kondensators, . . .).
Wir werden in Abschn. 1.1.10 mit Hilfe einer Taylor-Entwicklung die folgende wichtige Reihenentwicklung der Exponentialfunktion beweisen können:

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \,. \tag{1.64}$$

- **Logarithmus**
  Es handelt sich um die Umkehrfunktion zu $y = a^x$, die nur für $y > 0$ definiert ist:

Logarithmus zur Basis *a*

$$x = \log_a y \,. \tag{1.65}$$

$\log_a y$ ist also die Zahl, mit der man a potenzieren muss, um y zu erhalten. Oft wählt man $a = 10$ und spricht dann vom *dekadischen Logarithmus*:

$$\log_{10} 100 = 2 \,; \quad \log_{10} 1000 = 3 \,; \ldots$$

In der Physik wird jedoch am häufigsten der **natürliche Logarithmus** mit $a = \mathrm{e}$ verwendet. Man benutzt dann das Symbol $\log_{\mathrm{e}} \equiv \ln$, verzichtet also auf die explizite Basisangabe:

$$\ln(\mathrm{e}^x) = x \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{e}^{\ln x} = x\,. \tag{1.66}$$

Mit $y = \mathrm{e}^x$ und $y' = \mathrm{e}^{x'}$ sowie $a, c \in \mathbb{R}$ können wir einige wichtige Rechenregeln des Logarithmus ableiten:

$$\begin{aligned} \ln\left(y \cdot y'\right) &= \ln\left(\mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^{x'}\right) = \ln\left(\mathrm{e}^{x+x'}\right) = x + x' \\ &= \ln y + \ln y' \end{aligned} \tag{1.67}$$

$$\begin{aligned} \ln(c \cdot y) &= \ln(c \cdot \mathrm{e}^x) = \ln\left(\mathrm{e}^{\ln c} \cdot \mathrm{e}^x\right) = \ln\left(\mathrm{e}^{\ln c + x}\right) = \ln c + x \\ &= \ln c + \ln y \end{aligned} \tag{1.68}$$

$$\begin{aligned} \ln(y^a) &= \ln\left((\mathrm{e}^x)^a\right) = \ln\left(\mathrm{e}^{ax}\right) = a\,x \\ &= a\,\ln y\,. \end{aligned} \tag{1.69}$$

Man erkennt schließlich noch die Spezialfälle:

$$\ln(1) = \ln(\mathrm{e}^0) = 0 \qquad ; \qquad \ln x < 0 \quad \text{falls} \quad 0 < x < 1\,. \tag{1.70}$$

Wir wollen schließlich noch den Beweis zu (1.17) nachtragen, den wir zurückgestellt hatten, da er Eigenschaften des Logarithmus benutzt. Es ging um die Aussage

$$\{a_n\} = \{q^n\} \longrightarrow 0 \quad , \quad \text{falls} \quad |q| < 1\,.$$

Es sei

$$|a_n - 0| < \varepsilon < 1\,.$$

Dies bedeutet (Abb. 1.9):

$$\begin{aligned} &|q^n| = |q|^n < \varepsilon < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \ln|q|^n < \ln\varepsilon < 0 \\ &\Leftrightarrow \quad n\underbrace{\ln|q|}_{<0} < \ln\varepsilon < 0 \quad \Rightarrow \quad n > \frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|} > 0\,. \end{aligned}$$

Sei nun n_ε die kleinste ganze (natürliche) Zahl mit

$$n_\varepsilon \geq \frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\,,$$

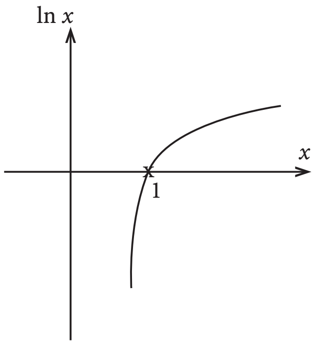

Abb. 1.9. Schematischer Verlauf des natürlichen Logarithmus

dann ist die Ausgangsungleichung für alle $n \geq n_\varepsilon$ erfüllt. Man erkennt zusätzlich:

$$|q| > 1 \;\Rightarrow\; n < \frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|} < 0 \;\Rightarrow\; \textit{Folge divergent}$$

$$q = 1 \;\Rightarrow\; \lim_{n \to \infty} a_n = 1 \;\Rightarrow\; \textit{Folge konvergent}$$

$$q = -1 \;\Rightarrow\; -1, +1, -1, +1, \cdots \;\Rightarrow\; \textit{Folge divergent (aber beschränkt)} \,.$$

1.1.8 Differentialquotient

Als *Steigung* einer Geraden bezeichnet man den Quotienten aus *Höhendifferenz* Δy und *Basislinie* Δx (s. Abb. 1.10). Für den Steigungswinkel α gilt dann:

$$\tan \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} \,. \tag{1.71}$$

Ganz analog definiert man die Steigung einer beliebigen Funktion $f(x)$ in einem Punkt P (s. Abb. 1.11). Die Sekante $\overline{PQ}$ hat den Anstieg

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \alpha' \,.$$

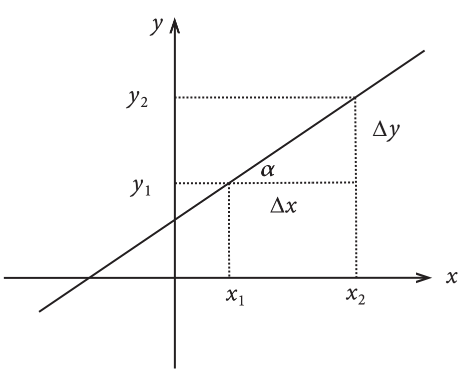

Abb. 1.10. Steigung einer Geraden

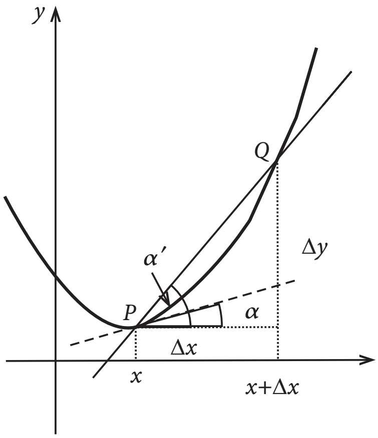

Abb. 1.11. Zur Definition der Ableitung einer Funktion $y = f(x)$

Man bezeichnet

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{1.72}$$

als **Differenzenquotienten.** Lässt man nun den Punkt Q längs der Kurve gegen den Punkt P rutschen, dann wird aus dem Anstieg der Sekante der Anstieg der *Tangente* an der Kurve $f(x)$ im Punkt P (gestrichelte Linie in Abb. 1.11),

$$\tan\alpha = \lim_{\alpha' \to \alpha} \tan\alpha' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

und man erhält den **Differentialquotienten**

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \equiv \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} . \tag{1.73}$$

den man die**Erste Ableitung der Funktion** $f(x)$ **nach** x **an der Stelle** x nennt:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) \equiv f'(x) . \tag{1.74}$$

Beispiel

$$f(x) = x^2$$

Differenzenquotient:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x .$$

Damit ergibt sich als erste Ableitung:

$$f'(x) = 2x .$$

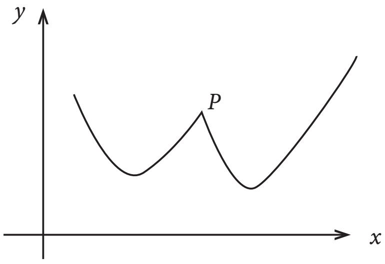

Abb. 1.12. Beispiel einer im Punkt P nicht differenzierbaren Funktion $y = f(x)$

Nicht jeder Differenzenquotient besitzt überall einen eindeutigen Grenzwert! Die Kurve in Abb. 1.12 ist im Punkt P stetig, besitzt dort aber keine eindeutige Steigung. Man sagt, $f(x)$ sei im Punkt P **nicht differenzierbar**.

Definition 1.1.3

1.1.3

- $y = f(x)$ ist in x_0 genau dann **differenzierbar**, wenn $f(x_0)$ definiert ist und ein eindeutiger Grenzwert

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

existiert!
- Die Funktion $y = f(x)$ heißt differenzierbar im Intervall $[a, b]$, wenn sie für alle $x \in [a, b]$ differenzierbar ist!

Man bezeichnet anschaulich $f'(x)$ als die **Steigung** der Kurve $f(x)$ im Punkt x.

Betrachten wir die Änderung des Funktionswertes zwischen den beiden Punkten P und Q (Abb. 1.11),

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \Delta x ,$$

so wird für $\Delta x \to 0$ der Vorfaktor zur Tangente in x. Das ergibt das

Differential der Funktion $y = f(x)$

$$dy = f'(x)\, dx . \tag{1.75}$$

Im Allgemeinen ist $dy \neq \Delta y$.

Beispiele

1. $$y = f(x) = c \cdot x^n \;\; ; \; n \in \mathbb{N} \;\; ; \; c \in \mathbb{R} . \tag{1.76}$$

Diese Funktion ist für alle x differenzierbar mit:

$$f'(x) = n\, c \cdot x^{n-1} , \tag{1.77}$$

denn:

$$(x+\Delta x)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}\Delta x + \ldots + \binom{n}{n} \Delta x^n$$

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$\curvearrowright \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = c\,\frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \qquad (n \geq 2)$$

$$= \frac{c}{\Delta x}\left(\binom{n}{1} x^{n-1}\Delta x + \binom{n}{2} x^{n-2}\Delta x^2 + \ldots + \binom{n}{n}\Delta x^n\right)$$

$$= c\left(n\,x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2}\Delta x + \ldots + \Delta x^{n-1}\right)$$

$$\curvearrowright \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = c\,n\,x^{n-1} \,.$$

Für $n = 0$ ($n = 1$) ist der Differenzenquotient bereits identisch null ($\equiv c$), d. h. unabhängig von Δx, sodass die Behauptung unmittelbar erfüllt ist.

2. $$y = f(x) = c \;\; ; \;\; c \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad f'(x) \equiv 0 \,, \tag{1.78}$$

denn:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{c-c}{\Delta x} = 0 \,.$$

Es handelt sich hier natürlich um den $n = 0$-Spezialfall des ersten Beispiels.

3. $$y = f(x) = \mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \mathrm{e}^x \,. \tag{1.79}$$

Die Exponentialfunktion ist für alle x differenzierbar! Das sieht man wie folgt:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\mathrm{e}^{x+\Delta x} - \mathrm{e}^x}{\Delta x} = \mathrm{e}^x\,\frac{\mathrm{e}^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

$$= \mathrm{e}^x\,\frac{1 + \Delta x + \frac{1}{2}\Delta x^2 + \ldots - 1}{\Delta x}$$

$$= \mathrm{e}^x\left(1 + \frac{1}{2}\Delta x + \frac{1}{6}\Delta x^2 + \ldots\right)$$

$$\curvearrowright \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \mathrm{e}^x \,.$$

Hier haben wir die vorweggenommene Reihenentwicklung (1.64) der Exponentialfunktion benutzt.

4. $$y = f(x) = \sin x \;\; ; \;\Rightarrow\;\; f'(x) = \cos x\,. \tag{1.80}$$

$\sin x$ ist für alle reellen x differenzierbar, denn:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} \\ &= \frac{\sin x\,\cos\Delta x + \cos x\,\sin\Delta x - \sin x}{\Delta x} \\ &= \frac{\sin x(\cos\Delta x - 1)}{\Delta x} + \cos x\,\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\,.\end{aligned}$$

Im zweiten Schritt haben wir das Additionstheorem (1.60) angewendet. Benutzt man dann noch (Aufgabe 1.1.5),

$$1 - \cos\Delta x = 2\sin^2\frac{\Delta x}{2}\,,$$

so bleibt zu berechnen:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\left(-\sin x\,\sin\frac{\Delta x}{2}\,\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} + \cos x\,\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\right) = \cos x\,.$$

Im letzten Schritt haben wir für beide Summanden (1.50) ausgenutzt.

5. $$y = f(x) = \cos x \quad\Rightarrow\;\; f'(x) = -\sin x\,. \tag{1.81}$$

Auch der Kosinus ist für alle x differenzierbar. Die Berechnung der ersten Ableitung erfolgt ganz analog zu der des Sinus im vorigen Beispiel (Aufgabe 1.1.6).

Die Ableitung einer Funktion $f(x)$ ist in der Regel wieder eine Funktion von x und lässt sich evtl. ebenso differenzieren. Das führt zum Begriff der

„Höheren“ Ableitung

Falls die jeweiligen Grenzwerte existieren, schreibt man

$$\begin{aligned}y &= f(x) = f^{(0)}(x) \\ y' &= f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) \\ y'' &= f''(x) = \frac{d^2}{dx^2}f(x) \\ &\cdots \qquad \cdots \\ y^{(n+1)} &= f^{(n+1)}(x) = \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}f(x) = \frac{d}{dx}\left(f^{(n)}(x)\right) \equiv \left(y^{(n)}\right)'\end{aligned}$$

Beispiel

$$f(x) = x^3 \curvearrowright f'(x) = 3x^2 \curvearrowright f''(x) = 6x$$

$$\curvearrowright f^{(3)}(x) = 6 \curvearrowright f^{(4)} = 0 \curvearrowright f^{(n)}(x) \equiv 0 \;\; \forall\, n \geq 4$$

Beliebig oft differenzierbare Funktionen heißen **glatt**.

1.1.9 Differentiationsregeln

Wir listen einige Regeln für das Differenzieren von Funktionen einer unabhängigen Variablen auf:

1.

Konstanter Faktor

$$y = c \cdot f(x) \quad \Rightarrow \quad y' = c \cdot f'(x)\,, \tag{1.82}$$

denn:

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c \cdot f(x + \Delta x) - c \cdot f(x)}{\Delta x} \\ &= c \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = c \cdot f'(x)\,. \end{aligned}$$

2.

Summe

$$y = f(x) + g(x) \quad \Rightarrow \quad y' = f'(x) + g'(x)\,. \tag{1.83}$$

Dies ist direkt an der Definition ablesbar.

3.

Produkt

$$y = f(x) \cdot g(x) \quad \Rightarrow \quad y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)\,, \tag{1.84}$$

denn:

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \big(f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x) \big) \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \Big(\big(f(x + \Delta x) - f(x)\big) \cdot g(x + \Delta x) \\ &\qquad + g(x + \Delta x) \cdot f(x) - f(x) \cdot g(x) \Big) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot g(x+\Delta x) \\
&\quad + \lim_{\Delta x \to 0} f(x) \cdot \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\
&= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \;.
\end{aligned}
$$

Im letzten Schritt haben wir ausgenutzt, dass die Funktionen g und f natürlich stetig sein müssen, da sonst die Ableitung nicht existieren würde.

Beispiel Es sei $n \in \mathbb{N}$:

$$
\begin{aligned}
x^n \cdot \frac{1}{x^n} = 1 \quad &\curvearrowright \quad \left(x^n\right)' \cdot \frac{1}{x^n} + x^n \cdot \left(\frac{1}{x^n}\right)' = 0 \\
&\curvearrowright \quad n x^{n-1} \cdot \frac{1}{x^n} = -x^n \cdot \left(x^{-n}\right)' \;.
\end{aligned}
$$

Damit haben wir als Ergänzung zu (1.77) eine Vorschrift, wie man Potenzen mit negativen Exponenten differenziert:

$$
\left(x^{-n}\right)' = -n\, x^{-(n+1)} \;. \tag{1.85}
$$

4.

Quotient

$$
y = \frac{f(x)}{g(x)} \;;\; g(x) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} \;, \tag{1.86}
$$

denn:
Wir untersuchen zunächst die Ableitung von

$$
h(x) = \frac{1}{g(x)} \;,
$$

wobei wir wieder die Stetigkeit von $g(x)$ voraussetzen können:

$$
\begin{aligned}
h'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{1}{g(x+\Delta x)} - \frac{1}{g(x)} \right) \\
&= - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \cdot \frac{1}{g(x+\Delta x) \cdot g(x)} \\
&= -g'(x) \cdot \frac{1}{g^2(x)} \;.
\end{aligned}
$$

Mit der Produktregel (1.84) folgt dann die Behauptung.

5.

Kettenregel

$$y = f\left(g(x)\right) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g} \cdot g'(x)\,, \tag{1.87}$$

denn:

Es seien $u = g(x)$ differenzierbar in x und $y = f(u)$ differenzierbar in $u = g(x)$, dann lässt sich mit $g(x + \Delta x) = u + \Delta u$ (Stetigkeit!) schreiben:

$$\frac{f\left(g(x+\Delta x)\right) - f\left(g(x)\right)}{\Delta x} = \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\,.$$

Nutzt man noch einmal die Stetigkeit von $u = g(x)$ aus ($\Delta x \to 0 \;\curvearrowright\; \Delta u \to 0$), so bleibt:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(g(x+\Delta x)\right) - f\left(g(x)\right)}{\Delta x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} f(u) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g(x)\,.$$

Formal erhält man also ein Ergebnis, das der „normalen Bruchrechnung" entnommen zu sein scheint:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,.$$

Beispiel Wir demonstrieren die Kettenregel an einem wichtigen Beispiel. Dazu berechnen wir die für alle x existierende erste Ableitung von

$$y = f(x) = \ln x\,.$$

Wir leiten mit der Kettenregel und mit Hilfe von (1.79) den Ausdruck $x = \mathrm{e}^{\ln x}$ nach x ab:

$$1 = \mathrm{e}^{\ln x} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln x\,.$$

Das ergibt offensichtlich:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln x = \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln x}} = \frac{1}{x}\,, \tag{1.88}$$

Damit können wir die Differentiationsregeln (1.76) und (1.85) noch einmal verallgemeinern. Sei nun α eine beliebige reelle Zahl. Dann gilt:

$$x^\alpha = \mathrm{e}^{\ln x^\alpha} = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}$$

$$\curvearrowright \quad \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}x} = \left.\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^u}{\mathrm{d}u}\right|_{u=\alpha \ln x} \cdot \frac{\mathrm{d}(\alpha \ln x)}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \frac{1}{x} = x^\alpha \alpha \frac{1}{x}\,.$$

Damit haben wir die Verallgemeinerung zu (1.76) und (1.85),

$$\frac{dx^\alpha}{dx} = \alpha\, x^{\alpha-1} \,, \tag{1.89}$$

die also nun für beliebige reelle Zahlen α bewiesen ist.

6. Wir betrachten zum Schluss noch die Umkehrfunktion (1.38):

$$f^{-1}\big(f(x)\big) = x \,.$$

Mit der Kettenregel folgt:

$$\frac{d}{df}\left(f^{-1}\right)(f) \cdot f'(x) = 1 \,.$$

Das bedeutet:

$$\frac{d}{df}\left(f^{-1}\right)(f) = \frac{1}{f'(x)} \,. \tag{1.90}$$

Mit

$$y = f(x) \quad \curvearrowright \quad x = f^{-1}(y) \quad \curvearrowright \quad \frac{d}{dy}\big(f^{-1}(y)\big) = \frac{dx}{dy}$$

ergibt sich ein Ausdruck, der wiederum der elementaren Bruchrechnung zu entstammen scheint:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \,. \tag{1.91}$$

Zur Demonstration der abgeleiteten Rechenregeln mögen schließlich noch die folgenden **Beispiele** dienen:

Beispiele

- zu 1.: $f(x) = a\,\sin x \;;\; a \in \mathbb{R} \;\Rightarrow f'(x) = a\,\cos x$
- zu 2.: $f(x) = x^5 - 3\ln x \;\Rightarrow f'(x) = 5x^4 - \dfrac{3}{x}$
- zu 3.: $f(x) = x^3\,\cos x \;\Rightarrow f'(x) = 3x^2\cos x - x^3\sin x$
- zu 4.: $f(x) = \dfrac{x^2}{\sin x} \;\Rightarrow f'(x) = \dfrac{2x\,\sin x - x^2\cos x}{\sin^2 x}$
- zu 5.: $f(x) = 3\sin(x^3) \;\Rightarrow f'(x) = 3\cos(x^3)\cdot 3x^2 = 9x^2\,\cos(x^3)$

1.1.10 Taylor-Entwicklung

Bisweilen ist es für den Physiker nicht zu vermeiden, den Weg der strengen mathematischen Exaktheit zu verlassen, um überhaupt erst durch *sinnvolle* mathematische Vereinfachungen zu konkreten physikalischen Resultaten zu gelangen. Ein wichtiges Hilfsmittel stellt dabei die so genannte *Taylor-Entwicklung* einer mathematischen Funktion $y = f(x)$ dar, von der wir voraussetzen wollen, dass sie beliebig viele stetige Ableitungen bei $x = x_0$ besitzen möge. Dann gilt die folgende Potenzreihen-Entwicklung, die wir als Aufgabe 1.1.9 beweisen wollen:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}\left(x-x_0\right)^2 + \ldots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\left(x-x_0\right)^n \qquad (1.92) \\ f^{(n)}(x_0) &= f^{(n)}(x)\Big|_{x=x_0} . \end{aligned}$$

Die Annahme $|x-x_0| < 1$ sichert die Konvergenz der Reihe. Dann darf man aber davon ausgehen, dass die Reihenglieder mit wachsendem Index n immer kleiner werden, sodass man im Sinne einer kontrollierten Näherung die Reihe nach endlichen vielen Termen abbrechen kann. Der Fehler lässt sich abschätzen, worauf wir in Abschn. 1.6 in Band 3 noch einmal zurückkommen werden.

Die Taylor-Entwicklung kann aber auch zur Ableitung exakter Reihen benutzt werden, wie die folgenden Beispiele zeigen:

1.
$$f(x) = \frac{1}{1+x} \quad ; \; x_0 = 0 \;\; ; \; |x| < 1 \, .$$

Wir benutzen

$$f(0) = 1 \;\; ; \; f'(0) = -1(1+0)^{-2} = -1 \;\; ; \; f''(0) = 2(1+0)^{-3} = 2 \ldots$$

$$\curvearrowright \; f^{(n)}(0) = (-1)^n \, n! \;\; ; \; x - x_0 = x \, .$$

Dies bedeutet

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n \, . \qquad (1.93)$$

Man vergleiche dieses Resultat mit (1.30)!

2.
$$f(x) = \sin x \;\; ; \; x_0 = 0 \, .$$

Wir verwenden in der Taylor-Reihe (1.92) nun:

$$f(0) = 0 \;\; ; \; f'(0) = \cos(0) = 1 \;\; ; \; f''(0) = -\sin(0) = 0 \;\; ;$$

$$f'''(0) = -\cos(0) = -1 \;\; ; \; \ldots$$

$$\curvearrowright \; f^{(2n)}(0) = 0 \;\; ; \; f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n \, .$$

Das bedeutet in diesem Fall

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} . \tag{1.94}$$

Diese Entwicklung wurde bereits in (1.51) vorweggenommen.

3. $$f(x) = \mathrm{e}^x \;\; ; \;\; x_0 = 0 .$$

Mit (1.79) ergibt sich:

$$\mathrm{e}^0 = 1 \;\; ; \;\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x \;\; \curvearrowright \;\; \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x \;\; \curvearrowright \;\; \left.\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{e}^x\right|_{x=0} = 1 .$$

Damit bleibt:

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} . \tag{1.95}$$

Wir haben dieses Ergebnis bereits in (1.64) verwendet.

1.1.11 Grenzwerte unbestimmter Ausdrücke

Gemeint sind Grenzwert-Ausdrücke vom Typ 0/0 beziehungsweise $\pm\infty/\infty$, die so natürlich nicht definiert sind, wie die folgenden konkreten Beispiele:

- $$\frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow{x\to 0} \frac{0}{0}$$
- $$\frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x\to 0} \frac{0}{0}$$
- $$\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \xrightarrow{x\to 0} \frac{-\infty}{\infty}$$

Für Terme dieser Art gilt die nützliche **Regel von l'Hospital**, die wir hier ohne Beweis angeben: Die Funktion

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

liefere für $x \to a$ einen unbestimmten Ausdruck der obigen Art. Dann gilt

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} . \tag{1.96}$$

Ist die rechte Seite erneut so nicht definiert, so ersetzt man auf der rechten Seite die ersten durch die zweiten Ableitungen. Wenn der Quotient auch dann unbestimmt bleibt, so nimmt man die dritten Ableitungen, und so weiter. Die obigen Beispiele berechnen sich damit wie folgt:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1 \tag{1.97}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1 \tag{1.98}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0} (-x) = 0 \tag{1.99}$$

1.1.12 Extremwerte

Für eine Kurvendiskussion ist es nützlich und wichtig, die (lokalen) Minima und Maxima der betreffenden Funktion $f(x)$ zu kennen. Wir stellen fest:

> $f(x)$ hat bei x_0 ein lokales Maximum (Minimum),
> falls ein $\delta > 0$ existiert, sodass für alle $x \in U_\delta(x_0)$ gilt:
> $f(x) \leq f(x_0) \;\Rightarrow\;$ Maximum
> $f(x) \geq f(x_0) \;\Rightarrow\;$ Minimum

Dabei verstehen wir unter $U_\delta(x_0)$ die *δ-Umgebung von x_0*:

$$U_\delta(x_0) = \{x;\ |x - x_0| < \delta\} \ . \tag{1.100}$$

Behauptung *$f(x)$ sei in x_0 differenzierbar und besitze dort ein (lokales) Extremum. Dann gilt:*

$$f'(x_0) = 0$$

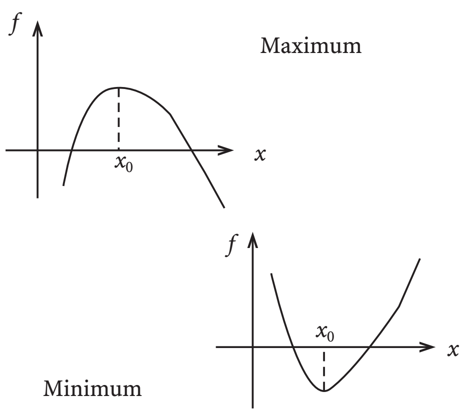

Abb. 1.13. Beispiel einer Funktion $y = f(x)$ mit einem (lokalen) Maximum bzw. Minimum bei x_0

Beweis Wir führen den **Beweis** am Beispiel des Minimum (s. o.). Für dieses gilt, wenn nur $|x - x_0|$ *hinreichend klein* ist:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{cases} \geq 0 & \text{für} \quad x > x_0 \\ \leq 0 & \text{für} \quad x < x_0 \end{cases} .$$

Dann muss aber notwendig geschlussfolgert werden:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = 0 \, .$$

Man beachte aber, dass $f'(x_0) = 0$ eine notwendige, jedoch **keine hinreichende** Bedingung für ein Extremum darstellt. Es könnte sich auch um einen **Wendepunkt** handeln! Für das Beispiel in Abb. 1.14 ist für $x < x_0$ die *Steigung* $f'(x)$ monoton fallend

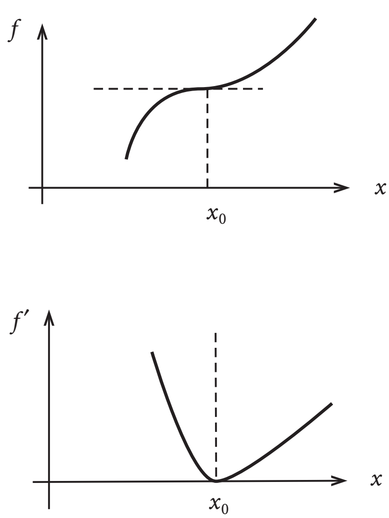

Abb. 1.14. Wendepunkt einer Funktion $f(x)$ bei $x = x_0$

und für $x > x_0$ monoton wachsend. Das bedeutet:

$$f''(x) \begin{cases} \leq 0 & \text{für} \quad x < x_0 \\ \geq 0 & \text{für} \quad x > x_0 \end{cases}$$

und damit:

$$f''(x_0) = 0 \qquad \text{(Wendepunkt)} \tag{1.101}$$

Ein **hinreichendes Kriterium** für ein Extremum im Punke $x = x_0$ kann man sich leicht an den Abb. 1.15 und 1.16 klar machen:

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f''(x_0) \begin{cases} > 0 & : \ \text{Minimum} \\ < 0 & : \ \text{Maximum} \end{cases} . \tag{1.102}$$

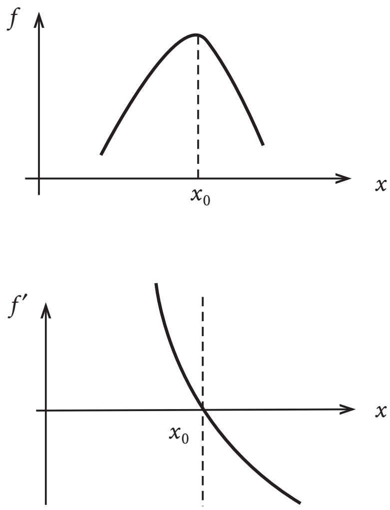

Abb. 1.15. Funktion $f(x)$ mit einem Maximum bei $x = x_0$ und ihre Ableitung $f'(x)$

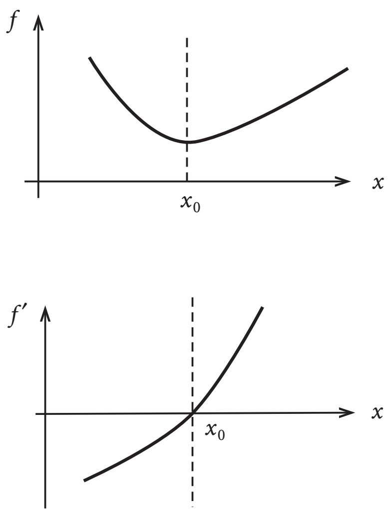

Abb. 1.16. Funktion $f(x)$ mit einem Minimum bei $x = x_0$ und ihre Ableitung $f'(x)$

Auch zu (1.101) ist zu sagen, dass es sich nur um eine **notwendige** Bedingung für einen Wendepunkt handelt, **hinreichend** wäre:

$$f'(x_0) = f''(x_0) = 0 \qquad \text{und} \qquad f'''(x_0) \neq 0\,. \tag{1.103}$$

Den allgemeinen Sachverhalt müssen wir allerdings hier wieder ohne Beweis übernehmen: Es gelte für eine hinreichend oft differenzierbare Funktion $f(x)$:

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n)}(x_0) = 0 \;\; \text{mit} \;\; f^{(n+1)}(x_0) \neq 0 \quad (n \geq 3)\,, \tag{1.104}$$

dann besitzt die Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = x_0$

- ein Maximum für n ungerade und $f^{(n+1)}(x_0) < 0$,
- ein Minimum für n ungerade und $f^{(n+1)}(x_0) > 0$,
- einen Wendepunkt (mit horizontaler Tangente) für n gerade.

Hierin sind die oben besprochenen Spezialfälle offensichtlich enthalten.

Wir betrachten dazu zwei Beispiele (s. Abb. 1.17):

1. $$f_1(x) = x^3 \qquad \text{an der Stelle} \qquad x = 0$$

   Man findet schnell:

   $$f_1'(0) = f_1''(0) = 0 \quad ; \quad f_1'''(0) = 6 > 0 \,.$$

   Die Funktion hat also bei $x = 0$ einen Wendepunkt.

2. $$f_2(x) = x^4 \qquad \text{an der Stelle} \qquad x = 0$$

   In diesem Fall gilt:

   $$f_2'(0) = f_2''(0) = f_2'''(0) = 0 \quad ; \quad f_2^{(4)}(0) = 24 > 0 \,.$$

   Diese Funktion besitzt bei $x = 0$ ein Minimum.

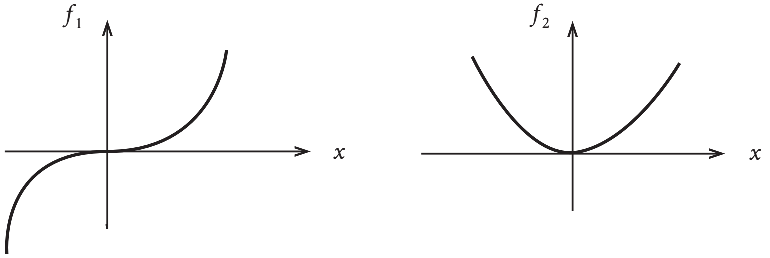

Abb. 1.17. Schematischer Verlauf der Funktionen $f_1(x) = x^3$ und $f_2(x) = x^4$ in der Nähe von $x = 0$

1.1.13 Aufgaben

Aufgabe 1.1.1 Bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen $\{a_n\}$ für $n \to \infty$ $(n \in \mathbb{N})$ 1.1.1

1. $$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n}$$
2. $$a_n = \frac{n^3 + 1}{2n^3 + n^2 + n}$$
3. $$a_n = \frac{n^2 - 1}{(n+1)^2} + 5$$

1.1.2

Aufgabe 1.1.2

1. Bestimmen Sie die folgenden Summen:

$$S_3 = \sum_{m=1}^{3} 3 \left(\frac{1}{2}\right)^m \qquad ; \qquad S = \sum_{m=1}^{\infty} 3 \left(\frac{1}{2}\right)^m .$$

2. Ist $1{,}111\ldots$ eine rationale Zahl? Wenn ja, welche?

1.1.3

Aufgabe 1.1.3 Zeigen Sie, dass die harmonische Reihe (1.27) trotz $\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} = 0$ nicht konvergiert!

1.1.4

Aufgabe 1.1.4 Versuchen Sie die folgenden Ausdrücke für trigonometrische Funktionen zu vereinfachen:

- $$\cos^2\varphi \cdot \tan^2\varphi + \cos^2\varphi$$
- $$\frac{1-\cos^2\varphi}{\sin\varphi \cdot \cos\varphi}$$
- $$1 - \frac{1}{\cos^2\varphi}$$
- $$\frac{1}{1-\sin\varphi} + \frac{1}{1+\sin\varphi}$$
- $$\frac{\sin(\varphi_1+\varphi_2)+\sin(\varphi_1-\varphi_2)}{\cos(\varphi_1+\varphi_2)+\cos(\varphi_1-\varphi_2)}$$
- $$\frac{\cos^2\varphi}{\sin 2\varphi} .$$

1.1.5

Aufgabe 1.1.5 Beweisen Sie die zur Ableitung von (1.80) benutzte Formel:

$$1-\cos\varphi = 2\,\sin^2\frac{\varphi}{2} .$$

1.1.6

Aufgabe 1.1.6 Verifizieren Sie für die ersten Ableitungen der trigonometrischen Funktionen die folgenden Relationen

1. $$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$
2. $$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$$
3. $$\frac{d}{dx}\cot x = -\frac{1}{\sin^2 x} .$$