

Kapitel 1
Lagrange-Mechanik

1

| | | |
|----------|---|----|
| 1 | Lagrange-Mechanik | |
| 1.1 | Zwangsbedingungen, generalisierte Koordinaten | 3 |
| 1.2 | Das d'Alembert'sche Prinzip | 12 |
| 1.2.1 | Lagrange-Gleichungen | 12 |
| 1.2.2 | Einfache Anwendungen | 21 |
| 1.2.3 | Verallgemeinerte Potentiale | 31 |
| 1.2.4 | Reibung | 34 |
| 1.2.5 | Nicht-holonome Systeme | 37 |
| 1.2.6 | Anwendungen der Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren | 40 |
| 1.2.7 | Aufgaben | 45 |
| 1.3 | Das Hamilton'sche Prinzip | 60 |
| 1.3.1 | Formulierung des Prinzips | 61 |
| 1.3.2 | Elemente der Variationsrechnung | 64 |
| 1.3.3 | Lagrange-Gleichungen | 71 |
| 1.3.4 | Erweiterung des Hamilton'schen Prinzips | 74 |
| 1.3.5 | Aufgaben | 77 |
| 1.4 | Erhaltungssätze | 79 |
| 1.4.1 | Homogenität der Zeit | 81 |
| 1.4.2 | Homogenität des Raumes | 84 |
| 1.4.3 | Isotropie des Raumes | 87 |
| 1.4.4 | Aufgaben | 90 |
| 1.5 | Kontrollfragen | 92 |

1 Lagrange-Mechanik

1.1 Zwangsbedingungen, generalisierte Koordinaten

1.1

Die Newton-Mechanik, die Gegenstand der Überlegungen des ersten Bandes der Reihe **Grundkurs: Theoretische Physik** war, befasst sich mit Systemen von Teilchen (*Massenpunkten*), von denen jedes durch eine Bewegungsgleichung der Form

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i^{(\text{ex})} + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij} \quad (1.1)$$

beschrieben wird. $\mathbf{F}_i^{(\text{ex})}$ ist die auf Teilchen i wirkende äußere Kraft, \mathbf{F}_{ij} die von Teilchen j auf Teilchen i ausgeübte (*innere*) Kraft. Bei N Teilchen ergibt sich aus (1.1) ein gekoppeltes System von $3N$ Differentialgleichungen 2. Ordnung, dessen Lösung die Kenntnis hinreichend vieler Anfangsbedingungen erfordert. Die typischen physikalischen Systeme unserer Umgebung sind jedoch häufig keine typischen Teilchensysteme. Betrachten wir einmal als Beispiel das Modell einer Kolbenmaschine. Die Maschine selbst besteht aus praktisch unendlich vielen Teilchen. Der Zustand der Maschine ist aber im Allgemeinen bereits durch Angabe des Winkels φ vollständig charakterisiert. Kräfte und Spannungen, zum Beispiel in der Pleuelstange, interessieren in der Regel nicht. Sie sorgen für gewisse *geometrische Bindungen* der Teilchen miteinander. Durch diese sind die Bewegungen der Teilchen eines makroskopischen mechanischen Systems im Allgemeinen nicht völlig frei. Man sagt, sie seien eingeschränkt durch gewisse

Zwangskräfte.

Diese über die Kräfte \mathbf{F}_{ij} in (1.1) zu berücksichtigen, stellt praktisch immer ein hoffnungsloses Unterfangen dar.

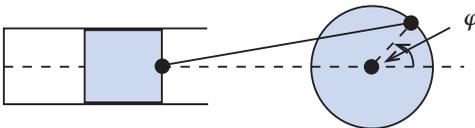


Abb. 1.1. Modell einer Pleuelstange

Wir führen zwei für das Folgende wichtige Begriffe ein:

Definition 1.1.1

1.1.1

1. **Zwangsbedingungen** sind Bedingungen, die die freie Bewegung der Systemteilchen einschränken (*geometrische Bindungen*).
2. **Zwangskräfte** sind Kräfte, die die Zwangsbedingungen bewirken, also die freie Teilchenbewegung behindern (z. B. Auflagekräfte, Fadenspannungen).

Bei der Beschreibung eines mechanischen Systems ergeben sich zwei schwerwiegende Probleme:

- a) Zwangskräfte sind im Allgemeinen unbekannt. Bekannt sind nur ihre Auswirkungen. Das System (1.1) der gekoppelten Bewegungsgleichungen lässt sich also erst gar nicht formulieren, geschweige denn lösen. Wir versuchen deshalb, die Mechanik so umzuformulieren, dass die Zwangskräfte herausfallen. Genau dies führt zur Lagrange-Formulierung der Klassischen Mechanik.
- b) Die Teilchenkoordinaten

$$\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

sind wegen der Zwangsbedingungen nicht unabhängig voneinander. Wir werden sie deshalb später durch linear unabhängige, verallgemeinerte Koordinaten zu ersetzen versuchen. Diese werden dann in der Regel unanschaulicher, dafür aber mathematisch einfacher zu handhaben sein.

Es leuchtet unmittelbar ein, dass Zwangsbedingungen für die konkrete Lösung eines mechanischen Problems eine wichtige Rolle spielen. Eine Klassifikation der mechanischen Systeme nach Art und Typ ihrer Zwangsbedingungen ist deshalb sicher sinnvoll.

➤ A) Holonome Zwangsbedingungen

Darunter versteht man Verknüpfungen der Teilchenkoordinaten und eventuell der Zeit in der folgenden Form:

$$f_\nu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0, \quad \nu = 1, 2, \dots, p. \quad (1.2)$$

➤ A,1) Holonom-skleronome Zwangsbedingungen

Das sind holonome Zwangsbedingungen, die **nicht** explizit zeitabhängig sind, also Bedingungen der Form (1.2), für die zusätzlich

$$\frac{\partial f_\nu}{\partial t} = 0, \quad \nu = 1, \dots, p \quad (1.3)$$

gilt.

Beispiele

1) Hantel

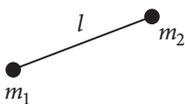


Abb. 1.2. Schematische Darstellung einer Hantel aus zwei durch eine masselose Stange auf konstantem Abstand gehaltene Massen m_1 und m_2

Die Zwangsbedingung betrifft den konstanten Abstand der beiden Massenpunkte m_1 und m_2 :

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = l^2 . \quad (1.4)$$

2) Starrer Körper

Dieser ist durch konstante Teilchenabstände ((4.1), Bd. 1) ausgezeichnet. Das entspricht den Zwangsbedingungen:

$$(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2 - c_{ij}^2 = 0 , \quad i, j = 1, 2, \dots, N , \quad c_{ij} = \text{const} . \quad (1.5)$$

3) Teilchen auf Kugeloberfläche

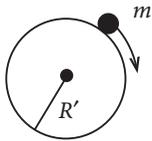


Abb. 1.3. Teilchen der Masse m auf einer Kugeloberfläche

Die Masse m ist an die Kugeloberfläche durch die Zwangsbedingung

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \quad (1.6)$$

gebunden.

⊙ A,2) Holonom-rheonome Zwangsbedingungen

Dies sind holonome Zwangsbedingungen mit expliziter Zeitabhängigkeit:

$$\frac{\partial f_v}{\partial t} \neq 0 . \quad (1.7)$$

Wir wollen auch diesen Begriff durch Beispiele erläutern:

Beispiele

1) Teilchen im Aufzug

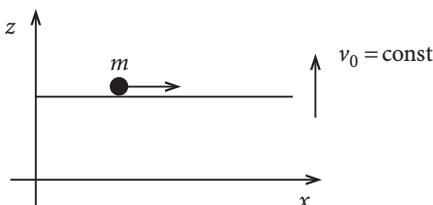


Abb. 1.4. Teilchen der Masse m auf einer mit der Geschwindigkeit v_0 sich in z -Richtung bewegenden Ebene

Das Teilchen kann sich nur in der xy -Ebene frei bewegen. Für die z -Koordinate gilt die Zwangsbedingung,

$$z(t) = v_0(t - t_0) + z_0, \quad (1.8)$$

hervorgerufen durch den mit konstanter Geschwindigkeit v_0 sich nach oben bewegendem Aufzug.

2) Masse auf schiefer Ebene mit veränderlicher Neigung

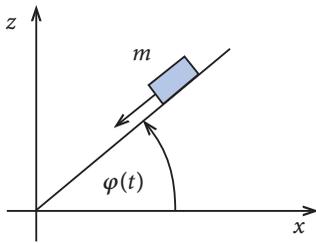


Abb. 1.5. Eine Masse m auf einer schiefer Ebene mit zeitlich veränderlichem Neigungswinkel

Die zeitlich veränderliche Neigung der Ebene sorgt für eine holonom-rheonome Zwangsbedingung

$$\frac{z}{x} - \tan \varphi(t) = 0. \quad (1.9)$$

Holonome Zwangsbedingungen reduzieren die Zahl der Freiheitsgrade. Ein N -Teilchensystem hat ohne Zwang $3N$ Freiheitsgrade, bei p holonomen Zwangsbedingungen dann nur noch

$$S = 3N - p. \quad (1.10)$$

Ein mögliches Lösungsverfahren kann nun darin bestehen, mit Hilfe der Zwangsbedingungen (1.2) p der $3N$ kartesischen Koordinaten zu eliminieren und für den Rest die Newton'schen Bewegungsgleichungen zu integrieren. Eleganter und wirkungsvoller ist jedoch die Einführung von

generalisierten Koordinaten q_1, q_2, \dots, q_S ,

die zwei Bedingungen erfüllen müssen:

1. Die momentane Konfiguration des physikalischen Systems ist **eindeutig** durch q_1, \dots, q_S festgelegt. Insbesondere gelten Transformationsformeln

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, \dots, q_S, t), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (1.11)$$

die die Zwangsbedingungen implizit enthalten.

2. Die q_j sind unabhängig voneinander, d. h., es gibt **keine** Beziehung der Form $F(q_1, \dots, q_S, t) = 0$.

Das Konzept der generalisierten Koordinaten wird im Folgenden noch eine wichtige Rolle spielen. Wir schließen an die obige Definition noch einige Bemerkungen an:

a) Unter dem

Konfigurationsraum

versteht man den S -dimensionalen Raum, der durch die generalisierten Koordinaten q_1, \dots, q_S aufgespannt wird. Jeder Punkt des Konfigurationsraums (*Konfigurationsvektor*)

$$\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_S) \quad (1.12)$$

entspricht einem möglichen Zustand des Systems.

b) Man nennt

$$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_S \quad \text{generalisierte Geschwindigkeiten .}$$

c) Bei bekannten Anfangsbedingungen

$$\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}(t_0) \equiv (q_1(t_0), \dots, q_S(t_0)) ,$$

$$\dot{\mathbf{q}}_0 = \dot{\mathbf{q}}(t_0) \equiv (\dot{q}_1(t_0), \dots, \dot{q}_S(t_0))$$

ist der Zustand des Systems im Konfigurationsraum für alle Zeiten über noch festzulegende Bewegungsgleichungen berechenbar.

d) Die Wahl der Größen q_1, \dots, q_S ist nicht eindeutig, wohl aber ihre Zahl S . Man legt sie nach Zweckmäßigkeit fest, die in der Regel durch die physikalische Problemstellung eindeutig vorgegeben ist.

e) Die Größen q_j sind beliebig. Es handelt sich dabei nicht notwendig um *Längen*. Sie charakterisieren in ihrer **Gesamtheit** das System und beschreiben nicht mehr unbedingt Einzelteilchen. Als Nachteil kann die Tatsache gewertet werden, dass das Problem dadurch unanschaulicher werden kann.

Beispiele

1) Teilchen auf Kugeloberfläche

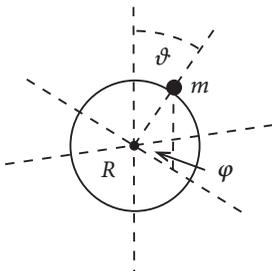


Abb. 1.6. Generalisierte Koordinaten für ein an eine Kugeloberfläche gebundenes Teilchen der Masse m

Es gibt eine holonom-skleronome Zwangsbedingung:

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 .$$

Dies bedeutet für die Zahl der Freiheitsgrade:

$$S = 3 - 1 = 2 .$$

Als generalisierte Koordinaten bieten sich zwei Winkel an:

$$q_1 = \vartheta ; \quad q_2 = \varphi .$$

Die Transformationsformeln

$$x = R \sin q_1 \cos q_2 ,$$

$$y = R \sin q_1 \sin q_2 ,$$

$$z = R \cos q_1$$

enthalten implizit die Zwangsbedingungen. q_1, q_2 legen den *Zustand* des Systems eindeutig fest.

2) Ebenes Doppelpendel

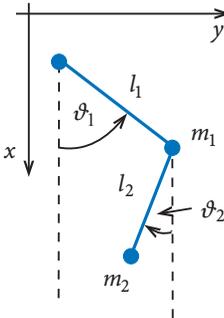


Abb. 1.7. Generalisierte Koordinaten für das ebene Doppelpendel

Es gibt insgesamt vier holonom-skleronome Zwangsbedingungen:

$$z_1 = z_2 = \text{const} ,$$

$$x_1^2 + y_1^2 - l_1^2 = 0 ,$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l_2^2 = 0 .$$

Die Zahl der Freiheitsgrade beträgt deshalb:

$$S = 6 - 4 = 2 .$$

„Günstige“ generalisierte Koordinaten sind in diesem Fall offenbar:

$$q_1 = \vartheta_1 ; \quad q_2 = \vartheta_2 .$$

Die Transformationsformeln

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \cos q_1 ; \quad y_1 = l_1 \sin q_1 ; \quad z_1 = 0 , \\ x_2 &= l_1 \cos q_1 + l_2 \cos q_2 ; \quad y_2 = l_1 \sin q_1 - l_2 \sin q_2 ; \quad z_2 = 0 \end{aligned}$$

enthalten wiederum implizit die Zwangsbedingungen.

3) Teilchen im Zentralfeld

In diesem Fall gibt es keine Zwangsbedingungen. Trotzdem ist die Einführung von generalisierten Koordinaten sinnvoll:

$$S = 3 - 0 = 3 .$$

„Günstige“ generalisierte Koordinaten sind in diesem Fall

$$q_1 = r ; \quad q_2 = \vartheta ; \quad q_3 = \varphi .$$

Die Transformationsformeln ((1.261), Bd. 1)

$$\begin{aligned} x &= q_1 \sin q_2 \cos q_3 , \\ y &= q_1 \sin q_2 \sin q_3 , \\ z &= q_1 \cos q_2 \end{aligned}$$

sind uns aus vielen Anwendungen (s. Bd. 1) bereits bekannt und dokumentieren, dass die Verwendung von generalisierten Koordinaten auch in Systemen **ohne** Zwang sinnvoll sein kann, nämlich dann, wenn infolge gewisser Symmetrien durch eine *Punkttransformation* auf krummlinige Koordinaten die Integration der Bewegungsgleichungen vereinfacht wird.

➤ B) Nicht-holonome Zwangsbedingungen

Darunter versteht man Verknüpfungen der Teilchenkoordinaten und eventuell der Zeit, die sich **nicht** wie in (1.2) darstellen lassen, sodass durch sie kein Eliminieren von überflüssigen Koordinaten möglich ist. Für Systeme mit nicht-holonomen Zwangsbedingungen gibt es kein allgemeines Lösungsverfahren. Spezielle Methoden werden später diskutiert.

➤ B,1) Zwangsbedingungen als Ungleichungen

Liegen die Zwangsbedingungen in Form von Ungleichungen vor, so kann man offenbar durch diese die Zahl der Variablen nicht reduzieren.

Beispiele

1) Perlen eines Rechenbretts

Die Perlen (Massenpunkte) können nur eindimensionale Bewegungen zwischen zwei festen Grenzen ausführen. Die Zwangsbedingungen sind dann zum Teil holonom,

$$z_i = \text{const}; \quad y_i = \text{const}, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

zum Teil aber auch nicht-holonom:

$$a \leq x_i \leq b, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

2) Teilchen auf Kugel im Schwerfeld

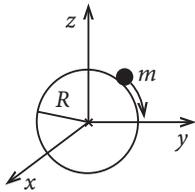


Abb. 1.8. Teilchen der Masse m auf einer Kugeloberfläche im Schwerfeld der Erde als Beispiel für nicht-holonome Zwangsbedingungen

Die Zwangsbedingung

$$(x^2 + y^2 + z^2) - R^2 \geq 0$$

schränkt die freie Bewegung der Masse m ein, kann aber nicht dazu benutzt werden, „überflüssige“ Koordinaten zu eliminieren.

⊙ B,2) Zwangsbedingungen in differentieller, nicht integrierbarer Form

Dies sind insbesondere Zwangsbedingungen, die Teilchengeschwindigkeiten enthalten. Sie haben die allgemeine Form:

$$\sum_{m=1}^{3N} f_{im} dx_m + f_{it} dt = 0, \quad i = 1, \dots, p, \quad (1.13)$$

wobei sich die linke Seite **nicht** integrieren lässt. Sie stellt kein totales Differential dar. Es gibt also keine Funktion F_i mit

$$f_{im} = \frac{\partial F_i}{\partial x_m} \quad \forall m; \quad \frac{\partial F_i}{\partial t} = f_{it}.$$

Gäbe es eine solche Funktion F_i , dann würde aus (1.13)

$$F_i(x_1, \dots, x_{3N}, t) = \text{const}$$

folgen und die entsprechende Zwangsbedingung wäre doch holonom.

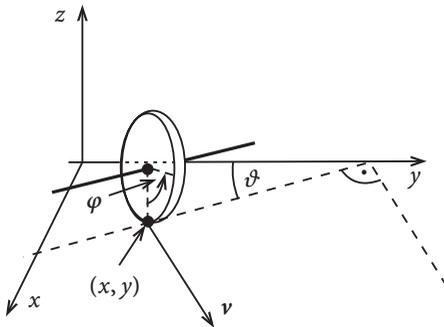
Beispiel: „Rollen“ eines Rades auf rauher Unterfläche

Abb. 1.9. Koordinaten zur Beschreibung eines rollenden Rades auf einer rauhen Unterfläche

Die Bewegung der Radscheibe erfolge so, dass die Scheibenebene stets vertikal steht. Die Bewegung ist vollständig beschrieben durch

1. den momentanen Auflagerpunkt (x, y) ,
2. die Winkel φ, ϑ .

Das Problem ist also gelöst, falls diese Größen als Funktionen der Zeit bekannt sind.

Die Zwangsbedingung „Rollen“ betrifft Richtung und Betrag der Geschwindigkeit des Auflagerpunktes:

$$\text{Betrag: } |\mathbf{v}| = R\dot{\varphi},$$

$$\text{Richtung: } \mathbf{v} \text{ senkrecht zur Radachse,}$$

$$\dot{x} = v_x = v \sin\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = v \cos \vartheta,$$

$$\dot{y} = v_y = v \cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = v \sin \vartheta.$$

Die Kombination der Zwangsbedingungen ergibt

$$\dot{x} - R\dot{\varphi} \cos \vartheta = 0; \quad \dot{y} - R\dot{\varphi} \sin \vartheta = 0$$

oder

$$dx - R \cos \vartheta d\varphi = 0; \quad dy - R \sin \vartheta d\varphi = 0. \quad (1.14)$$

Diese Bedingungen sind nicht integrierbar, da dazu die Kenntnis von $\vartheta = \vartheta(t)$ notwendig wäre, die aber erst nach vollständiger Lösung des Problems vorliegt. Die Zwangsbedingung „Rollen“ führt also nicht zu einer Verringerung der Koordinatenzahl. Sie schränkt gewissermaßen die Freiheitsgrade des Rades *mikroskopisch* ein, *makroskopisch* bleibt ihre Anzahl jedoch erhalten. Erfahrungsgemäß lässt sich ja durch geeignete Wendemanöver des Rades jeder Punkt der Ebene erreichen.

1.2 Das d'Alembert'sche Prinzip

1.2.1 Lagrange-Gleichungen

Nach den Überlegungen des letzten Abschnittes muss unsere vordringlichste Aufgabe darin bestehen, die im Allgemeinen nicht explizit bekannten Zwangskräfte aus den Bewegungsgleichungen zu eliminieren. Genau das ist der neue Aspekt der *Lagrange-Mechanik*. Wir beginnen mit der Einführung eines wichtigen Begriffes.

1.2.1 Definition 1.2.1

Virtuelle Verrückung δr_i .

Dies ist die willkürliche (virtuelle), infinitesimale Koordinatenänderung, die mit den Zwangsbedingungen verträglich ist und momentan durchgeführt wird. Letzteres bedeutet:

$$\delta t = 0. \quad (1.15)$$

Die Größen δr_i müssen nichts mit dem tatsächlichen Ablauf der Bewegung zu tun haben. Sie sind deshalb von den tatsächlichen Verschiebungen dr_i im Zeitraum dt , in dem sich Kräfte und Zwangsbedingungen ändern können, zu unterscheiden:

$$\delta \longleftrightarrow \text{virtuell}; \quad d \longleftrightarrow \text{tatsächlich}.$$

Mathematisch gehen wir mit dem Symbol δ wie mit dem Differential d um. Wir erläutern den Sachverhalt an einem **Beispiel**:

Beispiel: Teilchen im Aufzug

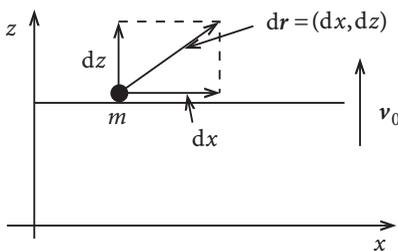


Abb. 1.10. Zur Unterscheidung von tatsächlichen und virtuellen Verrückungen am Beispiel eines Teilchens auf einer sich mit der Geschwindigkeit v_0 in z -Richtung bewegenden Fläche

Die Zwangsbedingung (holonom-rheonom) haben wir bereits in (1.8) formuliert. Eine passende generalisierte Koordinate ist $q = x$. Dann gilt aber wegen $\delta t = 0$:

$$\text{tatsächliche Verrückung: } d\mathbf{r} = (dx, dz) = (dq, v_0 dt),$$

$$\text{virtuelle Verrückung: } \delta\mathbf{r} = (\delta x, \delta z) = (\delta q, 0).$$

Definition 1.2.2

1.2.2

Virtuelle Arbeit

$$\delta W_i = -F_i \cdot \delta r_i . \quad (1.16)$$

F_i ist die auf Teilchen i wirkende Kraft:

$$F_i = K_i + Z_i = m_i \ddot{r}_i . \quad (1.17)$$

K_i ist die auf den in seiner Bewegungsfreiheit durch Zwangsbedingungen eingeschränkten Massenpunkt wirkende *treibende Kraft*. Z_i ist die Zwangskraft.

Offensichtlich gilt:

$$\sum_i (K_i - m_i \ddot{r}_i) \cdot \delta r_i + \sum_i Z_i \cdot \delta r_i = 0 . \quad (1.18)$$

Das fundamentale

Prinzip der virtuellen Arbeit

$$\sum_i Z_i \cdot \delta r_i = 0 \quad (1.19)$$

wird nicht mathematisch abgeleitet, sondern durch Übereinstimmung mit der Erfahrung als *bewiesen* angesehen. Es besagt, dass bei jeder gedachten Bewegung, die mit den Zwangsbedingungen verträglich ist, die Zwangskräfte keine Arbeit leisten. Man beachte, dass in (1.19) nur die Summe, nicht notwendig jeder Summand, gleich Null sein muss.

Beispiele

1) Teilchen auf „glatter“ Kurve

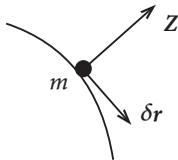


Abb. 1.11. Zwangskraft für ein Teilchen auf einer glatten Kurve

„Glatt“ bedeutet, dass es keine Komponente der Zwangskraft Z längs der Bahn gibt. Ohne Z explizit zu kennen, wissen wir damit, dass Z senkrecht zur Bahn gerichtet sein wird und damit auch senkrecht zur virtuellen Verrückung δr :

$$Z \cdot \delta r = 0 .$$

2) Hantel

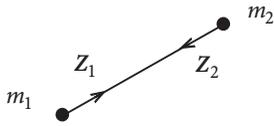


Abb. 1.12. Zwangskräfte einer aus zwei Massen m_1 und m_2 bestehenden Hantel

Es gilt:

$$Z_1 = -Z_2 .$$

Die virtuellen Verrückungen der beiden Massen lassen sich als Translation δs der Masse m_1 plus zusätzliche Rotation δx_R der Masse m_2 um die bereits verschobene Masse m_1 formulieren:

$$\delta r_1 = \delta s ; \quad \delta r_2 = \delta s + \delta x_R .$$

Eingesetzt in (1.19) ergibt sich:

$$\delta W = -Z_1 \cdot \delta r_1 - Z_2 \cdot \delta r_2 = -(Z_1 + Z_2) \cdot \delta s - Z_2 \cdot \delta x_R = 0 ,$$

da δx_R senkrecht zu Z_2 gerichtet und $(Z_1 + Z_2)$ gleich Null sind. Wir erkennen an diesem Beispiel, das sich unmittelbar auf den gesamten starren Körper übertragen lässt, dass nur die Summe der Beiträge in (1.19) Null sein muss, nicht schon jeder einzelne Summand.

3) Atwood'sche Fallmaschine

Für die Fadenspannungen Z_1, Z_2 wird

$$Z_1 = Z_2$$

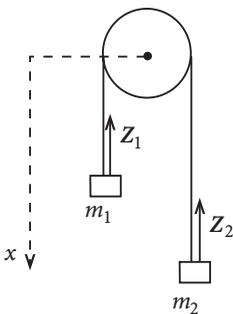


Abb. 1.13. Zwangskräfte bei der Atwood'schen Fallmaschine

gelten. Für die virtuelle Arbeit δW folgt dann:

$$\begin{aligned}\delta W &= -Z_1 \cdot \delta x_1 - Z_2 \cdot \delta x_2 = \\ &= Z_1(\delta x_1 + \delta x_2) = \\ &= Z_1 \underbrace{\delta(x_1 + x_2)}_{\text{const}} = 0 .\end{aligned}$$

4) Reibungskräfte

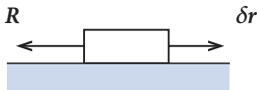


Abb. 1.14. Zur Demonstration der virtuellen Arbeit gegen die Reibungskraft

Diese zählen **nicht** zu den Zwangskräften, da sie das *Prinzip der virtuellen Arbeit* verletzen:

$$\delta W = -\mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{r} = R \delta r \neq 0 .$$

Reibungskräfte werden deshalb später eine Sonderbehandlung erfahren müssen.

Das Prinzip der virtuellen Arbeit (1.19) lässt sich mit (1.18) umschreiben und heißt dann:

d'Alembert'sches Prinzip

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{K}_i - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 . \quad (1.20)$$

Die virtuelle Arbeit der *verlorenen Kräfte* ist also Null. Damit ist ein erstes, vorläufiges Ziel erreicht. Die Zwangskräfte tauchen nicht mehr auf. In der Tat lassen sich mit (1.20) bereits einfache mechanische Probleme lösen. Es bleibt jedoch noch ein Nachteil. Die virtuellen Verrückungen $\delta \mathbf{r}_i$ sind wegen der Zwangsbedingungen nicht unabhängig voneinander. Gleichung (1.20) ist deshalb so noch nicht geeignet, um daraus verwertbare Bewegungsgleichungen abzuleiten. Wir werden deshalb die Größen $\delta \mathbf{r}_i$ auf generalisierte Koordinaten transformieren. Aus

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_S, t) , \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.21)$$

folgt:

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^S \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} = \dot{\mathbf{r}}_i(q_1, \dots, q_S, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_S, t) . \quad (1.22)$$

Dies bedeutet insbesondere:

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} . \quad (1.23)$$

Für die virtuellen Verrückungen lesen wir wegen $\delta t = 0$ an (1.22) ab:

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^S \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j . \quad (1.24)$$

Damit ergibt sich für den ersten Summanden in (1.20):

$$-\delta W_K = \sum_i \mathbf{K}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^S \mathbf{K}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \equiv \sum_{j=1}^S Q_j \delta q_j . \quad (1.25)$$

1.2.3

Definition 1.2.3

Generalisierte Kraftkomponenten

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \mathbf{K}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} . \quad (1.26)$$

Da die Größen q_j nicht notwendig *Längen* sind, müssen auch die Größen Q_j nicht unbedingt die Dimension *Kraft* besitzen. Es gilt aber stets:

$$[Q_j q_j] = \text{Energie} .$$

Einen wichtigen Spezialfall stellen **konservative Systeme** dar, für die ein Potential existiert ((2.234), Bd. 1),

$$V = V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) , \quad (1.27)$$

das insbesondere nicht von den Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{r}}_i$ abhängt und über

$$\mathbf{K}_i = -\nabla_i V \quad (1.28)$$

die Kräfte festlegt. In einem solchen Fall gilt für die generalisierten Kraftkomponenten:

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} , \quad j = 1, 2, \dots, S . \quad (1.29)$$

Wir werten nun den zweiten Summanden in (1.20) aus. Dabei benutzen wir:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} &= \sum_{l=1}^S \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_l \partial q_j} \dot{q}_l + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial t \partial q_j} = \\ &= \frac{\partial}{\partial q_j} \left\{ \sum_{l=1}^S \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right\} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Vorausgesetzt wurde hier, dass die Transformationsformeln (1.21) stetige partielle Ableitungen bis mindestens zur zweiten Ordnung besitzen ((1.129), Bd. 1):

$$\begin{aligned} \sum_i \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i &= \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^S m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^S m_i \left\{ \frac{d}{dt} \left(\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) - \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right\} \delta q_j = \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^S m_i \left\{ \frac{d}{dt} \left(\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} \right\} \delta q_j = \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^S m_i \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}_i^2 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}_i^2 \right) \right\} \delta q_j = \\ &= \sum_{j=1}^S \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right\} \delta q_j. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Wir setzen (1.31) und (1.25) in (1.20) ein:

d'Alembert'sches Prinzip

$$\sum_{j=1}^S \left\{ \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] - Q_j \right\} \delta q_j = 0. \quad (1.32)$$

Dies gilt in dieser Form noch ganz allgemein. Wichtig sind die folgenden Spezialisierungen:

➤ 1) Holonome Zwangsbedingungen

In diesem Fall sind die Koordinaten q_j unabhängig voneinander, die Größen δq_j also frei wählbar. Wir können z.B. alle δq_j bis auf eine gleich Null setzen. Dies

bedeutet aber, dass in (1.32) nicht nur die Summe, sondern bereits jeder Summand verschwindet:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, 2, \dots, S. \quad (1.33)$$

2) Konservatives System

In diesem Fall ist (1.29) gültig. Da außerdem V nicht von den generalisierten Geschwindigkeiten \dot{q}_j abhängt, können wir anstelle von (1.32) schreiben:

$$\sum_{j=1}^S \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (T - V) - \frac{\partial}{\partial q_j} (T - V) \right] \delta q_j = 0.$$

Mit der für die weiteren Überlegungen wichtigen **Definition**:

Lagrange-Funktion

$$L(q_1, \dots, q_S, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_S, t) = T(q_1, \dots, q_S, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_S, t) - V(q_1, \dots, q_S) \quad (1.34)$$

folgt dann:

$$\sum_{j=1}^S \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0. \quad (1.35)$$

3) Konservatives System mit holonomen Zwangsbedingungen

Das ist der Fall, den wir später in der Regel diskutieren werden:

Lagrange-Gleichungen (2. Art)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, S. \quad (1.36)$$

In der Newton-Mechanik sind *Impuls* und *Kraft*, also Vektoren, die dominierenden Größen. In der Lagrange-Mechanik sind es *Energie* und *Arbeit*, also Skalare. Darin mag man einen gewissen Vorteil erkennen. Die Lagrange-Gleichungen (1.36) ersetzen die Newton'schen Bewegungsgleichungen (1.1). Es handelt sich um S Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren vollständige Lösung die Kenntnis von

2S Anfangsbedingungen

erfordert. Die Zwangskräfte sind eliminiert, sie tauchen in den Bewegungsgleichungen nicht mehr auf.

Wir untersuchen die Lagrange-Funktion in beliebigen Koordinaten. Mit (1.22) schreibt sich die kinetische Energie,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^S \mu_{jl} \dot{q}_j \dot{q}_l + \sum_{j=1}^S \alpha_j \dot{q}_j + \alpha, \quad (1.37)$$

mit den folgenden Abkürzungen:

$$\alpha = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2, \quad (1.38)$$

$$\alpha_j = \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right), \quad (1.39)$$

$$\mu_{jl} = \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_l} \right) \quad (1.40)$$

verallgemeinerte Massen .

Die Lagrange-Funktion hat also die folgende allgemeine Gestalt:

$$L = T - V = L_2 + L_1 + L_0, \quad (1.41)$$

$$L_2 = \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^S \mu_{jl} \dot{q}_j \dot{q}_l, \quad (1.42)$$

$$L_1 = \sum_{j=1}^S \alpha_j \dot{q}_j, \quad (1.43)$$

$$L_0 = \alpha - V(q_1, \dots, q_S, t). \quad (1.44)$$

Die Größen L_n sind *homogene Funktionen* der generalisierten Geschwindigkeiten vom Grad $n = 2, 1, 0$. Homogene Funktionen sind allgemein wie folgt definiert:

Definition 1.2.4 $f(x_1, \dots, x_m)$ homogen vom Grad n , falls

1.2.4

$$f(ax_1, \dots, ax_m) = a^n f(x_1, \dots, x_m) \quad \forall a \in \mathbb{R}. \quad (1.45)$$

Wir hatten früher behauptet, dass die Wahl der generalisierten Koordinaten willkürlich ist, dass nur ihre Gesamtzahl S festliegt. Wir zeigen nun, dass die

Lagrange-Gleichungen forminvariant
gegenüber Punkttransformationen

$$(q_1, \dots, q_S) \xleftarrow{\text{differenzierbar}} (\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_S)$$

sind. Es gelte:

$$\left. \begin{aligned} \bar{q}_j &= \bar{q}_j(q_1, \dots, q_S, t) \\ q_l &= q_l(\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_S, t) \end{aligned} \right\} \quad j, l = 1, \dots, S.$$

Unter der Voraussetzung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad \text{für } j = 1, 2, \dots, S$$

folgt dann für

$$\tilde{L}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) = L(q(\bar{q}, t), \dot{q}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t), t)$$

die Behauptung:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\bar{q}}_l} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \bar{q}_l} = 0, \quad l = 1, 2, \dots, S. \quad (1.46)$$

Beweis

$$\begin{aligned} \dot{q}_j &= \sum_l \frac{\partial q_j}{\partial \bar{q}_l} \dot{\bar{q}}_l + \frac{\partial q_j}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{\bar{q}}_l} = \frac{\partial q_j}{\partial \bar{q}_l}, \\ \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\bar{q}}_l} &= \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{\bar{q}}_l} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \bar{q}_l} \right), \\ \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\bar{q}}_l} &= \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{\bar{q}}_l} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial q_j}{\partial \bar{q}_l} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\bar{q}}_l} &= \sum_j \left\{ \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \frac{\partial q_j}{\partial \bar{q}_l} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial q_j}{\partial \bar{q}_l} \right) \right\} = \\ &= \sum_j \left\{ \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \frac{\partial q_j}{\partial \bar{q}_l} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \bar{q}_l} \right\} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\bar{q}}_l} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \bar{q}_l} &= \sum_j \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right\} \frac{\partial q_j}{\partial \bar{q}_l} = 0. \end{aligned}$$

Für den Begriff der Forminvarianz ist eigentlich nicht entscheidend, dass \tilde{L} aus L schlicht durch Einsetzen der Transformationsformeln hervorgeht. Wichtig ist nur, dass es überhaupt zu $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ ein eindeutiges $\tilde{L}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, t)$ gibt, sodass die Gleichungen erhalten bleiben.

➤ 1.2.2 Einfache Anwendungen

Wir wollen in diesem Abschnitt ausführlich den Algorithmus demonstrieren und üben, den man üblicherweise zur Lösung von Problemen mit Hilfe der Lagrange-Gleichungen benutzt. Wir setzen durchweg

holonome Zwangsbedingungen, konservative Kräfte

voraus. Die Lösungsmethode setzt sich dann aus fünf Teilschritten zusammen:

1. Zwangsbedingungen formulieren.
2. Generalisierte Koordinaten \mathbf{q} festlegen.
3. Transformationsformeln bilden.
4. Lagrange-Funktion $L = T - V = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ aufstellen.
5. Lagrange-Gleichungen (1.36) ableiten und lösen.
6. Rücktransformation auf „anschauliche“ Koordinaten.

Wir wollen dieses Verfahren an einigen Anwendungsbeispielen üben.

➤ 1) Atwood'sche Fallmaschine

Es handelt sich um ein konservatives System mit fünf holonom-skleronomen Zwangsbedingungen:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= l = \text{const} , \\ y_1 &= y_2 = z_1 = z_2 = 0 .\end{aligned}$$

Es bleiben also

$$S = 6 - 5 = 1$$

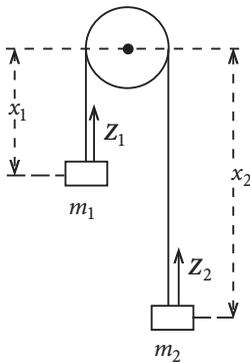


Abb. 1.15. Atwood'sche Fallmaschine

Freiheitsgrade. Eine passende generalisierte Koordinate wäre dann:

$$q = x_1 \quad (\Rightarrow x_2 = l - q) .$$

Damit sind die Transformationsformeln bekannt.

Mit der kinetischen Energie

$$T = \frac{1}{2} (m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2) = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{q}^2$$

und der potentiellen Energie

$$V = -m_1 g x_1 - m_2 g x_2 = -m_1 g q - m_2 g (l - q)$$

folgt die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{q}^2 + (m_1 - m_2) g q + m_2 g l . \quad (1.47)$$

Mit

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = (m_1 + m_2) \ddot{q} ; \quad \frac{\partial L}{\partial q} = (m_1 - m_2) g$$

ergibt sich über (1.36) die einfache Bewegungsgleichung:

$$\ddot{q} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g . \quad (1.48)$$

Das ist der „verzögerte“ freie Fall. Gleichung (1.48) lässt sich bei Vorgabe von zwei Anfangsbedingungen einfach integrieren. Damit ist das Problem gelöst.

Wir haben nun die Möglichkeit, über die Newton'schen Bewegungsgleichungen

$$m_1 \ddot{x}_1 = m_1 g + Z_1 ; \quad m_2 \ddot{x}_2 = m_2 g + Z_2$$

die Zwangskräfte (*Fadenspannungen*) explizit zu bestimmen. Wegen

$$\ddot{x}_1 = -\ddot{x}_2 = \ddot{q}$$

gilt:

$$m_1 \ddot{x}_1 - m_2 \ddot{x}_2 = (m_1 - m_2) g + (Z_1 - Z_2) = (m_1 + m_2) \ddot{q} = (m_1 - m_2) g .$$

Dies bedeutet:

$$Z_1 = Z_2 = Z .$$

Damit folgt weiter:

$$m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 = (m_1 + m_2) g + 2Z = (m_1 - m_2) \ddot{q} .$$

Die Fadenspannung Z lautet damit:

$$Z = -2g \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} . \quad (1.49)$$

2) Gleitende Perle auf gleichförmig rotierendem Draht

Das konservative System besitzt zwei holonome Zwangsbedingungen; davon ist eine skleronom, die andere rheonom:

$$\begin{aligned} z &= 0 , \\ y &= x \tan \omega t . \end{aligned}$$

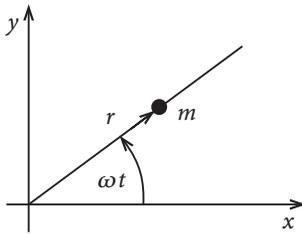


Abb. 1.16. Gleitende Perle auf einem mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden Draht

Als generalisierte Koordinate bietet sich der Abstand

$$q = r$$

der Perle vom Drehpunkt an. Mit den Transformationsformeln

$$x = q \cos \omega t ; \quad y = q \sin \omega t ; \quad z = 0$$

berechnen wir die kinetische Energie

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2} (\dot{q}^2 + q^2 \omega^2) ,$$

die wegen $V \equiv 0$ mit der Lagrange-Funktion identisch ist:

$$L = T - V = \frac{m}{2} (\dot{q}^2 + q^2 \omega^2) = L_2 + L_0 . \quad (1.50)$$

Die Funktion L_1 taucht trotz rheonomer Zwangsbedingung nicht auf. Dies ist jedoch rein zufällig. Normalerweise erscheint die Funktion L_1 (1.43) in einem solchen Fall explizit. Die Funktion L_0 ist hier jedoch eine Folge der rheomonen Zwangsbedingung.

Mit der Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m \ddot{q} = \frac{\partial L}{\partial q} = m q \omega^2$$

folgt:

$$\ddot{q} = \omega^2 q .$$

Die allgemeine Lösung lautet:

$$q(t) = A e^{\omega t} + B e^{-\omega t} .$$

Mit den Anfangsbedingungen

$$q(t=0) = r_0 > 0 ; \quad \dot{q}(t=0) = 0$$

folgt z. B. $A = B = r_0/2$ und damit

$$q(t) = \frac{1}{2} r_0 (e^{\omega t} + e^{-\omega t}) .$$

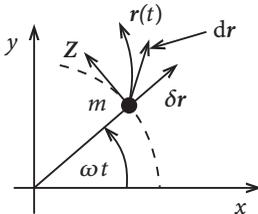


Abb. 1.17. Zur Demonstration des Unterschieds von tatsächlicher und virtueller Arbeit der Zwangskräfte am Beispiel der gleitenden Perle auf einem rotierenden Draht

Die Perle bewegt sich also mit wachsender Beschleunigung für $t \rightarrow \infty$ nach außen. Dabei nimmt die Energie der Perle zu, da die Zwangskraft an der Perle Arbeit leistet. Das sieht nach einem Widerspruch zum Prinzip der virtuellen Arbeit (1.19) aus. Ist es aber nicht. Die tatsächliche Verschiebung der Masse m im Zeitraum dt ist nicht mit der virtuellen Verrückung δr identisch, die ja bei festgehaltener Zeit durchgeführt wird. Es ist deshalb die von der Zwangskraft tatsächlich geleistete Arbeit

$$dW_Z = Z \cdot dr \neq 0$$

von der virtuellen Arbeit

$$\delta W_Z = Z \cdot \delta r = 0 , \quad \text{da } Z \perp \delta r ,$$

zu unterscheiden.

3) Schwingende Hantel

Die Masse m_1 einer Hantel der Länge l kann sich reibungslos entlang einer horizontalen Geraden bewegen. Wir fragen uns, welche Kurven die Massen m_1 und m_2 unter dem Einfluss der Schwerkraft beschreiben.

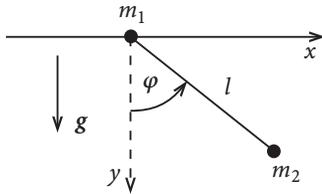


Abb. 1.18. Im Schwerfeld der Erde schwingende Hantel mit einer Masse m_1 , die sich in x -Richtung reibungslos bewegen kann

Es liegen vier holonom-skleronome Zwangsbedingungen vor:

$$z_1 = z_2 = 0; \quad y_1 = 0; \quad (x_1 - x_2)^2 + y_2^2 - l^2 = 0.$$

Es bleiben damit

$$S = 6 - 4 = 2$$

Freiheitsgrade. Günstige generalisierte Koordinaten dürften

$$q_1 = x_1; \quad q_2 = \varphi$$

sein. Dies ergibt die Transformationsformeln:

$$\begin{aligned} x_1 &= q_1; & y_1 &= z_1 = 0, \\ x_2 &= q_1 + l \sin q_2; & y_2 &= l \cos q_2; \quad z_2 = 0. \end{aligned}$$

Damit berechnen wir die kinetische Energie:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \\ &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (l^2 \dot{q}_2^2 + 2l \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos q_2). \end{aligned}$$

Für die potentielle Energie finden wir:

$$V_1 \equiv 0; \quad V_2 = -m_2 g l \cos \varphi; \quad V = -m_2 g l \cos q_2.$$

Dies ergibt die folgende Lagrange-Funktion:

$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (l^2 \dot{q}_2^2 + 2l \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos q_2) + m_2 g l \cos q_2. \quad (1.51)$$

Bevor wir den konkreten Lösungsweg weiter diskutieren, wollen wir zwei für das Folgende eminent wichtige Begriffe einführen.

1.2.5 Definition 1.2.5

Verallgemeinerter Impuls

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} . \quad (1.52)$$

1.2.6 Definition 1.2.6

Zyklische Koordinate

$$q_j \text{ zyklisch} \iff \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \iff p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \text{const} . \quad (1.53)$$

Jede zyklische Koordinate führt automatisch auf einen Erhaltungssatz. Deswegen sollte man generalisierte Koordinaten stets so wählen, dass möglichst viele zyklisch sind.

In unserem Beispiel ist q_1 zyklisch. Dies bedeutet:

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = (m_1 + m_2) \dot{q}_1 + m_2 l \dot{q}_2 \cos q_2 = \text{const} .$$

Wir lösen nach \dot{q}_1 auf:

$$\dot{q}_1 = c - \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \dot{q}_2 \cos q_2$$

und integrieren:

$$q_1(t) = c t - \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \sin q_2(t) + a .$$

Wir benötigen vier Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} q_1(t=0) &= 0 ; & q_2(t=0) &= 0 ; \\ \dot{q}_1(t=0) &= -\frac{m_2}{m_1 + m_2} l \omega_0 ; & \dot{q}_2(t=0) &= \omega_0 . \end{aligned} \quad (1.54)$$

Daraus folgt zunächst:

$$a = 0 , \quad c = 0 .$$

Wir haben damit die Zwischenlösung:

$$q_1(t) = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} l \sin q_2(t) .$$

Für die Bewegung der Masse m_1 gilt also:

$$x_1(t) = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} l \sin \varphi(t) ; \quad y_1(t) = z_1(t) = 0 . \quad (1.55)$$

Mit den Transformationsformeln folgt für die Masse m_2 :

$$x_2(t) = \frac{m_1}{m_1 + m_2} l \sin \varphi(t) ; \quad y_2(t) = l \cos \varphi(t) ; \quad z_2(t) = 0 . \quad (1.56)$$

Zusammengefasst ergibt dies die Mittelpunktsgleichung einer Ellipse:

$$\frac{x_2^2}{\left(\frac{m_1 l}{m_1 + m_2}\right)^2} + \frac{y_2^2}{l^2} = 1 . \quad (1.57)$$

Die Masse m_2 durchläuft also einen Teil einer Ellipse mit der horizontalen Halbachse $m_1 l / (m_1 + m_2)$ und der vertikalen Halbachse l . In der Grenze $m_1 \rightarrow \infty$ ergibt sich das gewöhnliche mathematische Pendel (Abschn. 2.3.4, Bd. 1).

Mit (1.55) und (1.56) ist das Problem noch nicht vollständig gelöst, da $\varphi(t)$ noch unbekannt ist. Wir haben aber noch eine weitere Lagrange-Gleichung zur Verfügung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} &= m_2 (l^2 \dot{q}_2 + l \dot{q}_1 \cos q_2) , \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} &= m_2 (l^2 \ddot{q}_2 + l \ddot{q}_1 \cos q_2 - l \dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin q_2) , \\ \frac{\partial L}{\partial q_2} &= m_2 (-l \dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin q_2 - g l \sin q_2) . \end{aligned}$$

Dies ergibt in (1.36) eingesetzt die folgende Bewegungsgleichung:

$$l^2 \ddot{q}_2 + l \ddot{q}_1 \cos q_2 + g l \sin q_2 = 0 . \quad (1.58)$$

Für „kleine“ Werte von $q_2 = \varphi$ können wir

$$\cos q_2 \approx 1 ; \quad \sin q_2 \approx q_2$$

annehmen, wodurch sich (1.58) zu

$$l \ddot{q}_2 + \ddot{q}_1 + g q_2 \approx 0$$

vereinfacht. An (1.55) lesen wir ab:

$$q_1 \approx -\frac{m_2}{m_1 + m_2} l q_2 \Rightarrow \ddot{q}_1 \approx -\frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \ddot{q}_2 .$$

Dies ergibt für q_2 die folgende Bewegungsgleichung:

$$\ddot{q}_2 + \frac{g}{l} \frac{m_1 + m_2}{m_1} q_2 \approx 0 .$$

Es empfiehlt sich der Lösungsansatz:

$$q_2 = A \cos \omega t + B \sin \omega t .$$

Die gewählten Anfangsbedingungen (1.54) führen zu $A = 0$ und $B\omega = \omega_0$. Damit folgt schließlich:

$$\varphi(t) = \frac{\omega_0}{\omega} \sin \omega t ; \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l} \frac{m_1 + m_2}{m_1}} . \quad (1.59)$$

4) Zykloidenpendel

Ein Teilchen der Masse m bewege sich im Schwerfeld auf einer *Zykloide*. Diese wird durch Abrollen eines Rades (Radius R) auf einer ebenen Fläche realisiert. Sie besitzt die folgende Parameterdarstellung:

$$\begin{aligned} x &= R\varphi + R \sin \varphi = R(\varphi + \sin \varphi) , \\ y &= 2R - R(1 - \cos \varphi) = R(1 + \cos \varphi) . \end{aligned} \quad (1.60)$$

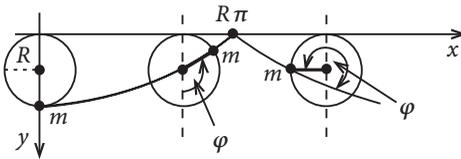


Abb. 1.19. Realisierung einer Zykloide durch Abrollen eines Rades auf einer Ebene

Der erste Term für x ist die Abrollbedingung, der zweite resultiert aus der Raddrehung. Wir können die Gleichung für y nach φ auflösen und in die Gleichung für x einsetzen. Gleichung (1.60) liefert damit **eine** Zwangsbedingung. Eine weitere ist $z \equiv 0$. Es bleiben für den Massenpunkt m somit $S = 3 - 2 = 1$ Freiheitsgrade. Als generalisierte Koordinate q empfiehlt sich der Winkel φ . Mit

$$\dot{x} = R\dot{q}(1 + \cos q) ; \quad \dot{y} = -R\dot{q} \sin q$$

berechnen wir die kinetische Energie:

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = m R^2 \dot{q}^2 (1 + \cos q) .$$

Für die potentielle Energie gilt:

$$V = -m g y = -m g R(1 + \cos q) .$$

Dies ergibt für die Lagrange-Funktion:

$$L = T - V = m R (1 + \cos q) (R \dot{q}^2 + g) . \quad (1.61)$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} &= 2 m R^2 (1 + \cos q) \dot{q} , \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} &= 2 m R^2 [\ddot{q} (1 + \cos q) - \dot{q}^2 \sin q] , \\ \frac{\partial L}{\partial q} &= -m R \sin q (R \dot{q}^2 + g) . \end{aligned}$$

Mit $(1 + \cos q) = 2 \cos^2(q/2)$ und $\sin q = 2 \sin(q/2) \cos(q/2)$ finden wir die zu lösende Bewegungsgleichung:

$$2 \ddot{q} \cos \frac{q}{2} - \dot{q}^2 \sin \frac{q}{2} + \frac{g}{R} \sin \frac{q}{2} = 0 .$$

Dies kann weiter zusammengefasst werden:

$$\frac{d^2}{dt^2} \sin \frac{q}{2} + \frac{g}{4R} \sin \frac{q}{2} = 0 . \quad (1.62)$$

Das Zykloidenpendel befolgt also für $\sin(q/2) = \sin(\varphi/2)$ eine Schwingungsgleichung mit der Frequenz

$$\omega = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{R}} . \quad (1.63)$$

Die allgemeine Lösung lautet:

$$\varphi(t) = 2 \arcsin [A e^{i\omega t} + B e^{-i\omega t}] , \quad (1.64)$$

wobei A, B durch die Anfangsbedingungen festgelegt sind.

Beim Fadenpendel ist die Schwingungsfrequenz von der Amplitude der Schwingung abhängig. Die übliche Annahme $\sin \varphi \approx \varphi$, die zur Schwingungsgleichung führt, ist ja nur für kleine Ausschläge erlaubt. Hier haben wir eine geometrische Führung des Massenpunktes kennen gelernt, bei welcher die Schwingungsdauer unabhängig von der Amplitude wird.

5) N Teilchen ohne Zwangsbedingungen

Wir erwarten, dass in diesem speziellen Fall die Lagrange'schen mit den Newton'schen Bewegungsgleichungen identisch sind. Wegen fehlender Zwangsbedingungen gibt es

$S = 3N$ Freiheitsgrade, und als generalisierte Koordinaten kommen zum Beispiel die kartesischen Koordinaten in Frage. Aus der Lagrange-Funktion

$$L = T - V = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - V(x_1, \dots, z_N, t) \quad (1.65)$$

folgt:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m_i \ddot{x}_i; \quad \frac{\partial L}{\partial x_i} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} = F_{x_i}.$$

Die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i} \iff m_i \ddot{x}_i = F_{x_i},$$

föhren damit in der Tat direkt auf die Newton'schen Bewegungsgleichungen. Nehmen wir die in (1.46) bewiesene Forminvarianz gegenüber Punkttransformationen hinzu, so gilt die Äquivalenz auch in beliebigen krummlinigen Koordinaten.

6) Kepler-Problem

Wir betrachten die Bewegung eines Teilchens der Masse m im Zentralfeld (s. Beispiel 3 in Abschn. 1.1) mit der potentiellen Energie (s. (2.262), Bd. 1):

$$V(x, y, z) = \frac{-\alpha}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (\text{z. B. } \alpha = \gamma m M).$$

In kartesischen Koordinaten ergeben sich recht komplizierte Bewegungsgleichungen. Wir haben im Beispiel 3 des Abschn. 1.1 bereits die Verwendung von Kugelkoordinaten als generalisierte Koordinaten als zweckmäßig erkannt. In diesen lautet die Lagrange-Funktion:

$$L(r, \vartheta, \varphi, \dot{r}, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) + \frac{\alpha}{r}. \quad (1.66)$$

Allein aus der unmittelbaren Beobachtung, dass die Koordinate φ zyklisch ist, ergeben sich wichtige physikalische Folgerungen:

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi} = L_z = \text{const}. \quad (1.67)$$

Die z -Komponente des Bahndrehimpulses $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ ist eine Konstante der Bewegung. Da die z -Richtung durch nichts ausgezeichnet ist, muss sogar der volle Drehimpuls konstant sein:

$$\mathbf{L} = m \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \text{const}. \quad (1.68)$$

(Man unterscheide den Vektor \mathbf{L} (Drehimpuls) vom Skalar L (Lagrange-Funktion).) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir die z -Achse unseres Koordinaten-

systems parallel zum Drehimpuls L legen, womit automatisch $L_x = L_y \equiv 0$ folgt. Die durch $[\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}]$ aufgespannte Bahnebene ist dann die xy -Ebene. Dies bedeutet $\vartheta \equiv \pi/2$ und damit $\dot{\vartheta} \equiv 0$, sodass sich die Lagrange-Funktion zu

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + \frac{\alpha}{r} \quad (1.69)$$

vereinfacht. Es bleibt dann noch die Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \ddot{r} \stackrel{!}{=} \frac{\partial L}{\partial r} = m r \dot{\varphi}^2 - \frac{\alpha}{r^2} \quad (1.70)$$

zu diskutieren.

► 1.2.3 Verallgemeinerte Potentiale

Die einfachen Anwendungsbeispiele des letzten Abschnitts setzen die Gültigkeit der Lagrange-Gleichungen in der Form (1.36) voraus. Sie gelten für konservative Systeme mit holonomen Zwangsbedingungen. Bei einem nicht-konservativen System, aber holonomen Zwangsbedingungen gilt stattdessen (1.33):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, 2, \dots, S.$$

Wir kommen jedoch zu formal unveränderten Lagrange-Gleichungen für so genannte

verallgemeinerte Potentiale

$$U = U(q_1, \dots, q_S, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_S, t),$$

falls sich aus diesen die generalisierten Kräfte Q_j wie folgt ableiten lassen:

$$Q_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial U}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, S. \quad (1.71)$$

Der erste Summand ist hier gegenüber dem Fall des konservativen Systems neu. Für die

verallgemeinerte Lagrange-Funktion

$$L = T - U \quad (1.72)$$

gelten dann mit (1.71) offenbar die Bewegungsgleichungen formal in der unveränderten Form (1.36). Nun sieht allerdings die Forderung (1.71) auch sehr speziell aus. Es gibt jedoch ein sehr wichtiges Anwendungsbeispiel:

Geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld!

Im Band 3 werden wir erfahren, dass auf ein Teilchen mit der Ladung \bar{q} , das sich mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} in einem elektromagnetischen Feld (elektrisches Feld \mathbf{E} , magnetische Induktion \mathbf{B}) bewegt, die so genannte „Lorentz-Kraft“

$$\mathbf{F} = \bar{q} [\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})] \quad (1.73)$$

wirkt. Diese ist nicht konservativ. Sie besitzt allerdings ein verallgemeinertes Potential U im Sinne von (1.71). Um dies zu zeigen, schreiben wir \mathbf{F} zunächst auf die *elektromagnetischen Potentiale*,

$$\varphi(\mathbf{r}, t) : \text{skalares Potential ; } \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \text{Vektorpotential ,}$$

um. Diese sind so gewählt, dass in den *Maxwell-Gleichungen*, die in der Elektrodynamik die Rolle übernehmen, die die Newton'schen Axiome in der Mechanik spielen,

$$\text{rot } \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = 0 ; \quad \text{div } \mathbf{B} = 0 ; \quad (1.74)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} = \mathbf{j} ; \quad \text{div } \mathbf{D} = \varrho , \quad (1.75)$$

die beiden *homogenen* Gleichungen (1.74) automatisch erfüllt sind:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} ; \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} . \quad (1.76)$$

In den *inhomogenen* Gleichungen (1.75), die wir im Folgenden nicht weiter benötigen, bezeichnen \mathbf{H} das magnetische Feld, \mathbf{D} die dielektrische Verschiebung, \mathbf{j} die Stromdichte und ϱ die Ladungsdichte. Weitere Einzelheiten werden in Band 3 diskutiert.

Mit (1.76) schreibt sich die Lorentz-Kraft

$$\mathbf{F} = \bar{q} \left[-\nabla\varphi - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} + (\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{A}) \right] . \quad (1.77)$$

Wir versuchen, dazu ein verallgemeinertes Potential

$$U = U(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$$

abzuleiten, nehmen als generalisierte also die kartesischen Koordinaten des geladenen Teilchens:

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{A})_x &= \\ &= \dot{y}(\text{rot } \mathbf{A})_z - \dot{z}(\text{rot } \mathbf{A})_y = \\ &= \dot{y} \left(\frac{\partial}{\partial x} A_y - \frac{\partial}{\partial y} A_x \right) - \dot{z} \left(\frac{\partial}{\partial z} A_x - \frac{\partial}{\partial x} A_z \right) = \\ &= \dot{y} \frac{\partial}{\partial x} A_y + \dot{z} \frac{\partial}{\partial x} A_z + \dot{x} \frac{\partial}{\partial x} A_x - \dot{x} \frac{\partial}{\partial x} A_x - \dot{y} \frac{\partial}{\partial y} A_x - \dot{z} \frac{\partial}{\partial z} A_x = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - \left(\frac{d}{dt} A_x - \frac{\partial}{\partial t} A_x \right) . \end{aligned}$$

Damit lautet die x -Komponente der Lorentz-Kraft:

$$F_x = \bar{q} \left[-\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{d}{dt} A_x + \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \right].$$

Wir benutzen noch

$$\frac{d}{dt} A_x = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{x}} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) \right]; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \varphi = 0$$

und können dann schreiben:

$$F_x = \bar{q} \left[-\frac{\partial}{\partial x} (\varphi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) + \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} (\varphi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \right].$$

Wir definieren ein

verallgemeinertes Potential der Lorentz-Kraft

$$U = \bar{q}(\varphi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}), \quad (1.78)$$

das für die x -Komponente die gewünschte Beziehung (1.71) erfüllt:

$$F_x = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial U}{\partial x}.$$

Dies lässt sich natürlich ganz analog für die beiden anderen Komponenten F_y , F_z ebenso zeigen. Damit haben wir als wichtiges Ergebnis die Lagrange-Funktion eines Teilchens der Masse m und der Ladung \bar{q} im elektromagnetischen Feld abgeleitet:

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 + \bar{q}(\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}) - \bar{q}\varphi. \quad (1.79)$$

Obwohl wir als generalisierte Koordinaten die kartesischen Ortskoordinaten des Teilchens gewählt haben, sind die generalisierten Impulse \mathbf{p} nicht mit den mechanischen Impulsen $m\mathbf{v}$ identisch. Nach (1.52) gilt vielmehr:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + \bar{q}A_x; \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + \bar{q}A_y; \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} + \bar{q}A_z. \quad (1.80)$$

Die eigentlichen experimentellen Messgrößen sind die elektromagnetischen Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} . Die Potentiale φ , \mathbf{A} sind dagegen nur Hilfsgrößen. **Eichtransformationen** der Form

$$\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A} + \nabla\chi; \quad \varphi \longrightarrow \varphi - \frac{\partial}{\partial t}\chi, \quad (1.81)$$

wobei χ eine beliebige skalare Funktion sein darf, sind deshalb erlaubt, da nach (1.76) dadurch die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} nicht geändert werden. Da die Lagrange-Funktion (1.79)

aber direkt von den Potentialen φ , \mathbf{A} abhängt, ist sie **nicht** eichinvariant. Die Lagrange'sche Bewegungsgleichung

$$m \ddot{\mathbf{r}} = \bar{q} [\mathbf{E} + (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B})] \quad (1.82)$$

ist dagegen eichinvariant, da in diese nur die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} eingehen. Die Lagrange-Funktion ändert sich gemäß

$$L \longrightarrow L + \bar{q} \left(\dot{\mathbf{r}} \nabla \chi + \frac{\partial}{\partial t} \chi \right) = L + \bar{q} \frac{d}{dt} \chi(\mathbf{r}, t). \quad (1.83)$$

Nun kann man ganz allgemein zeigen, dass sich bei einer

mechanischen Eichtransformation

$$L \longrightarrow L + L_0; \quad L_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{d}{dt} f(\mathbf{q}, t) \quad (1.84)$$

die Bewegungsgleichungen nicht ändern, wenn f eine praktisch beliebige, hinreichend oft differenzierbare, nur von \mathbf{q} und t abhängende Funktion ist. Es gilt nämlich:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_0}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{df}{dt} = \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial t} + \sum_l \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_l} \dot{q}_l, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \frac{df}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_l \frac{\partial f}{\partial q_l} \dot{q}_l \right) \right] = \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q_j} + \sum_l \frac{\partial^2 f}{\partial q_l \partial q_j} \dot{q}_l. \end{aligned}$$

Daraus folgt mit

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L_0}{\partial q_j} = 0 \quad \forall j \quad (1.85)$$

die Behauptung. Umeichungen der Lagrange-Funktion gemäß (1.84) lassen die Bewegungsgleichung und damit die Bahnen $\mathbf{q}(t)$ im Konfigurationsraum invariant. Nur diese sind aber empirisch beobachtbare Phänomene. Auch die elektromagnetische Eichtransformation (1.81) ist in diesem Sinne irrelevant.

► 1.2.4 Reibung

Reibungskräfte lassen sich nicht wie in (1.71) aus einem verallgemeinerten Potential U ableiten. Sie müssen daher in besonderer Weise in den Bewegungsgleichungen berücksichtigt werden. Es sind auch keine Zwangskräfte im eigentlichen Sinn. Sie erfüllen nicht das d'Alembert'sche Prinzip.

Nach (1.33) gilt bei holonomen Zwangsbedingungen:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \equiv \sum_{i=1}^N \mathbf{K}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = Q_j^{(V)} + Q_j^{(R)}. \quad (1.86)$$

Der Anteil $Q_j^{(V)}$ sei dabei aus einem Potential ableitbar ($\mathbf{K}_i^{(V)} \equiv -\nabla_i V$), während $Q_j^{(R)}$ den Einfluss der Reibungskraft angibt.

Die Lagrange-Funktion

$$L = T - V \quad (V \text{ aus } Q_j^{(V)})$$

befolgt dann die Bewegungsgleichungen:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^{(R)}, \quad j = 1, 2, \dots, S. \quad (1.87)$$

Einen brauchbaren phänomenologischen Ansatz für die Reibungskräfte stellt der Ausdruck

$$Q_j^{(R)} = - \sum_{l=1}^S \beta_{jl} \dot{q}_l \quad (\beta_{jl} = \beta_{lj}) \quad (1.88)$$

dar (vgl. (2.59), Bd. 1). Kräfte dieser Art werden durch die

Rayleigh'sche Dissipationsfunktion

$$D = \frac{1}{2} \sum_{l,m=1}^S \beta_{lm} \dot{q}_l \dot{q}_m \quad (1.89)$$

beschrieben. Dies ergibt **modifizierte** Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, S. \quad (1.90)$$

Zur Festlegung der Bewegungsgleichungen müssen nun also zwei skalare Funktionen L und D bekannt sein.

Wir wollen uns noch die physikalische Bedeutung der Dissipationsfunktion klar machen. In Systemen mit Reibung ist die Summe aus kinetischer und potentieller Energie keine Erhaltungsgröße, da das System gegen die Reibung Arbeit leisten muss:

$$dW^{(R)} = - \sum_j Q_j^{(R)} dq_j = \sum_{j,l} \beta_{jl} \dot{q}_l dq_j.$$

Es ist also:

$$\frac{dW^{(R)}}{dt} = 2D \quad (\text{Energiedissipation}). \quad (1.91)$$

Die Energiedissipation entspricht der zeitlichen Änderung der Gesamtenergie ($T + V$):

$$\frac{d}{dt}(T + V) = \sum_{j=1}^S \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right) + \frac{dV}{dt},$$

$$\sum_{j=1}^S \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j = \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^S \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) - \sum_{j=1}^S \dot{q}_j \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}.$$

Wir setzen skleronome Zwangsbedingungen voraus. Dann ist nach (1.37) die kinetische Energie T eine homogene Funktion der generalisierten Geschwindigkeiten vom Grad 2. Ferner sei das System, abgesehen von den Reibungskräften, konservativ:

$$\sum_{j=1}^S \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j = \frac{d}{dt}(2T) - \sum_{j=1}^S \dot{q}_j \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}.$$

Daraus folgt mit (1.90):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(T + V) &= \sum_{j=1}^S \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j + \frac{d}{dt}(2T) + \frac{dV}{dt} - \sum_{j=1}^S \dot{q}_j \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} \right) = \\ &= \sum_{j=1}^S \frac{\partial V}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{d}{dt}(2T + V) + 2D. \end{aligned}$$

Dies bedeutet:

$$\frac{d}{dt}(T + V) = -2D. \quad (1.92)$$

Beispiel Ein Teilchen der Masse m falle vertikal unter dem Einfluss der Schwere, wobei Reibungskräfte gemäß einer Dissipationsfunktion

$$D = \frac{1}{2} \alpha v^2$$

auftreten mögen (*Stokes'sche Reibung*; s. (2.60), Bd. 1). Mit $v = -\dot{z}$ (eindimensionale Bewegung!) folgt die Lagrange-Funktion:

$$L = T - V = \frac{m}{2} \dot{z}^2 - m g z.$$

Dies gibt nach (1.90) die folgende modifizierte Lagrange-Gleichung:

$$m \ddot{z} + m g + \alpha \dot{z} = 0.$$

Es ist also:

$$\frac{d}{dt}v = g - \frac{\alpha}{m}v \Rightarrow dt = \frac{dv}{g - \frac{\alpha}{m}v}.$$

Dies lässt sich leicht integrieren:

$$t - t_0 = -\frac{m}{\alpha} \ln \frac{\alpha v - mg}{\alpha v_0 - mg}.$$

Wir wählen als Anfangsbedingungen

$$t_0 = 0; \quad v_0 = 0$$

und haben dann das bekannte Resultat ((2.120), Bd. 1):

$$v = \frac{mg}{\alpha} \left[1 - \exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right) \right].$$

Wegen der Reibung bleibt v auch für $t \rightarrow \infty$ endlich!

► 1.2.5 Nicht-holonome Systeme

Holonome Zwangsbedingungen lassen sich in der Form (1.2) angeben. Durch Einführung von $S = 3N - p$ (p = Zahl der holonomen Zwangsbedingungen) voneinander unabhängigen generalisierten Koordinaten q_1, \dots, q_S , die die Konfiguration des Systems eindeutig festlegen, wird u. a. der Tatsache Rechnung getragen, dass sich durch die holonomen Zwangsbedingungen die Zahl der Freiheitsgrade von $3N$ auf $S = 3N - p$ verringert hat.

Bei nicht-holonomen Zwangsbedingungen lässt sich nicht mehr eine der Zahl der Freiheitsgrade entsprechenden Menge von **unabhängigen** generalisierten Koordinaten angeben. Insbesondere sind die Lagrange-Gleichungen nicht mehr in der Form (1.36) verwendbar. Nach den Überlegungen in Abschn. 1.1 können nicht-holonome Zwangsbedingungen als Ungleichungen oder in differentieller, nicht-integrabler Form vorliegen. Für den zweiten Fall gibt es ein Lösungsverfahren, nämlich die

Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren,

die wir nun einführen wollen. Dazu betrachten wir ein System, dem \bar{p} Zwangsbedingungen auferlegt seien. Von diesen mögen $p \leq \bar{p}$ in der folgenden, nicht-holonomen Form vorliegen:

$$\sum_{m=1}^{3N} f_{im}(x_1, \dots, x_{3N}, t) dx_m + f_{it}(x_1, \dots, x_{3N}, t) dt = 0, \quad i = 1, \dots, p. \quad (1.93)$$

Wir wollen das Lösungsrezept schrittweise entwickeln:

1. Im Allgemeinen wird das System sowohl holonome als auch nicht-holonome Zwangsbedingungen aufweisen. Die holonomen Zwangsbedingungen verwenden wir zur partiellen Verringerung der Koordinatenzahl von $3N$ auf

$$j = 3N - (\bar{p} - p) .$$

Wir drücken also die Teilchenorte \mathbf{r}_i durch j *generalisierte* Koordinaten q_1, \dots, q_j aus:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, \dots, q_j, t) . \quad (1.94)$$

Die Koordinaten q_j können natürlich nicht alle voneinander unabhängig sein.

2. Die Bedingungen (1.93) werden auf q_1, \dots, q_j umgeschrieben:

$$\sum_{m=1}^j a_{im} dq_m + b_{it} dt = 0 , \quad i = 1, \dots, p . \quad (1.95)$$

3. Die Zwangsbedingungen werden für virtuelle Verrückungen formuliert ($\delta t = 0$):

$$\sum_{m=1}^j a_{im} \delta q_m = 0 , \quad i = 1, \dots, p . \quad (1.96)$$

4. Wir führen nun so genannte *Lagrange'sche Multiplikatoren* λ_i ein, die unabhängig von \mathbf{q} sein sollen, aber möglicherweise von t abhängen. Aus (1.96) folgt trivialerweise:

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i \sum_{m=1}^j a_{im} \delta q_m = 0 . \quad (1.97)$$

5. Das System sei konservativ. Dann lässt sich eine Lagrange-Funktion definieren, für die die Bewegungsgleichungen die Form (1.35) haben:

$$\sum_{m=1}^j \left(\frac{\partial L}{\partial q_m} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \right) \delta q_m = 0 . \quad (1.98)$$

Dies kombinieren wir mit (1.97):

$$\sum_{m=1}^j \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_m} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} + \sum_{i=1}^p \lambda_i a_{im} \right\} \delta q_m = 0 . \quad (1.99)$$

Die δq_m sind nicht unabhängig voneinander, d. h., wir können nicht jeden Summanden gleich Null setzen.

6. Wegen der Zwangsbedingungen sind nur $j-p = 3N - \bar{p}$ Koordinaten frei wählbar. Wir legen fest:

$$\begin{aligned} q_m &: m = 1, \dots, j-p : && \text{unabhängig,} \\ q_m &: m = j-p+1, \dots, j : && \text{abhängig.} \end{aligned}$$

Nun sind die p Lagrange'schen Multiplikatoren λ_i noch unbestimmt. Wir wählen sie so, dass gilt:

$$\frac{\partial L}{\partial q_m} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} + \sum_{i=1}^p \lambda_i a_{im} \stackrel{!}{=} 0, \quad m = j-p+1, \dots, j. \quad (1.100)$$

Das sind p Gleichungen für p unbekannte λ_i , die durch (1.100) festgelegt sind. Einsetzen in (1.99) führt dann zu

$$\sum_{m=1}^{j-p} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_m} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} + \sum_{i=1}^p \lambda_i a_{im} \right\} \delta q_m = 0.$$

Diese q_m sind nun aber unabhängig voneinander, sodass bereits jeder Summand für sich gleich Null sein muss:

$$\frac{\partial L}{\partial q_m} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} + \sum_{i=1}^p \lambda_i a_{im} = 0, \quad m = 1, 2, \dots, j-p. \quad (1.101)$$

7. Wir kombinieren (1.101) und (1.100) und erhalten die

Lagrange'schen Bewegungsgleichungen (1. Art)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial L}{\partial q_m} = \sum_{i=1}^p \lambda_i a_{im}, \quad m = 1, \dots, j. \quad (1.102)$$

Das sind j Gleichungen für $j+p$ Unbekannte, nämlich j Koordinaten q_m und p Multiplikatoren λ_i . Die fehlenden Bestimmungsgleichungen sind die p Zwangsbedingungen (1.95):

$$\sum_{m=1}^j a_{im} \dot{q}_m + b_{it} = 0, \quad i = 1, \dots, p. \quad (1.103)$$

Diese Zwangsbedingungen lassen sich zwar nicht direkt integrieren, möglicherweise aber im Zusammenhang mit den obigen Bewegungsgleichungen. Wir werden dies an Beispielen demonstrieren. Bei diesem Verfahren erhalten wir also eigentlich mehr als ursprünglich beabsichtigt, nämlich neben den q_m noch die λ_i .

Was ist die physikalische Bedeutung der λ_i ? Vergleicht man (1.102) mit (1.33), so wird klar, dass

$$\bar{Q}_m = \sum_{i=1}^p \lambda_i a_{im} \quad (1.104)$$

als Komponente einer *generalisierten Zwangskraft* zu interpretieren ist, die die nicht-holonomen Zwangsbedingungen realisiert. Man kann dann (1.97) auch wie folgt schreiben:

$$\sum_{m=1}^j \bar{Q}_m \delta q_m = 0. \quad (1.105)$$

Das ist gewissermaßen das d'Alembert'sche Prinzip für die generalisierte Zwangskraft.

Man kann die Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren auch auf Systeme mit ausschließlich holonomen Zwangsbedingungen anwenden. Dazu schreiben wir die p holonomen Zwangsbedingungen (von insgesamt $\bar{p} \geq p$),

$$f_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0, \quad i = 1, \dots, p,$$

auf generalisierte Koordinaten q_1, \dots, q_j um:

$$\tilde{f}_i(q_1, \dots, q_j, t) = 0, \quad i = 1, \dots, p.$$

Damit gilt dann auch die Beziehung

$$df_i = \sum_{m=1}^j \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial q_m} dq_m + \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial t} dt = 0,$$

die mit (1.95) bzw. (1.103) formal identisch ist, falls

$$a_{im} = \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial q_m} \quad \text{und} \quad b_{it} = \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial t}$$

gesetzt werden. Damit sind dann (1.102) und (1.103) zu lösen. Das Verfahren liefert nun auch Informationen über Zwangskräfte, ist aber auch komplizierter, da statt $j - p$ nun $j + p$ Gleichungen zu lösen sind. – Die Anwendungsbeispiele des nächsten Abschnitts sollen mit dem abstrakten Formalismus vertraut machen.

➤ 1.2.6 Anwendungen der Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren

Wir diskutieren drei einfache physikalische Probleme.

➤ 1) Atwood'sche Fallmaschine

Als eigentlich holonomes System haben wir die Fallmaschine bereits als Anwendungsbeispiel 1) in Abschn. 1.2.2 diskutiert. Sie dient hier der Illustration der Methode.

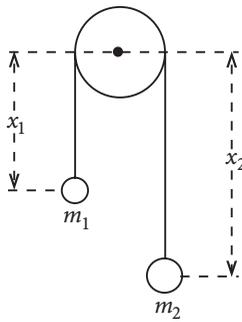


Abb. 1.20. Atwood'sche Fallmaschine

Von den fünf Zwangsbedingungen

$$y_1 = y_2 = z_1 = z_2 = 0 ,$$

$$x_1 + x_2 - l = 0$$

verwenden wir nur die ersten vier zur Verringerung der Koordinatenzahl:

$$j = 6 - 4 = 2 .$$

Als *generalisierte* Koordinaten wählen wir:

$$q_1 = x_1 ; \quad q_2 = x_2 .$$

Die verbleibende Zwangsbedingung lautet dann:

$$f(q_1, q_2, t) = q_1 + q_2 - l = 0 \quad (p = 1)$$

$$\Rightarrow df = dq_1 + dq_2 = 0 .$$

Der Vergleich mit (1.95) liefert

$$a_{11} = a_{12} = 1 .$$

Wegen $p = 1$ ist nur ein Lagrange'scher Multiplikator λ vonnöten (1.104):

$$\bar{Q}_1 = \bar{Q}_2 = \lambda \quad \text{Fadenspannung} .$$

Mit der Lagrange-Funktion

$$L = \frac{1}{2} (m_1 \dot{q}_1^2 + m_2 \dot{q}_2^2) + g (m_1 q_1 + m_2 q_2)$$

ergeben sich gemäß (1.102) die Bewegungsgleichungen:

$$m_1 \ddot{q}_1 - m_1 g = \lambda ; \quad m_2 \ddot{q}_2 - m_2 g = \lambda .$$

Ferner folgt aus der Zwangsbedingung nach (1.103):

$$\dot{q}_1 + \dot{q}_2 = 0 .$$

Das sind jetzt drei zu lösende Gleichungen statt wie früher eine, als die Fallmaschine noch als holonomes System behandelt wurde. Dafür erhalten wir nun auch zusätzliche Information über die Zwangskraft. Als Lösung des obigen Gleichungssystems ergeben sich die früheren Resultate (1.48) und (1.49):

$$\ddot{q}_1 = -\ddot{q}_2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g ; \quad \lambda = -2g \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} .$$

2) Rollendes Fass auf schiefer Ebene

Das „Fass“ ist ein Hohlzylinder der Masse M , dessen Trägheitsmoment J sich zu

$$J = \int \varrho(r) r^2 d^3r = M R^2 \quad (1.106)$$

berechnet (s. Abschn. 4.3, Bd. 1). $\varrho(r)$ ist die Massendichte des Hohlzylinders. Verifizieren Sie (1.106) zur Übung. – Es handelt sich hier wiederum um ein holonomes Problem. Wir betrachten als *generalisierte* Koordinaten

$$q_1 = x ; \quad q_2 = \vartheta \quad (j = 2)$$

mit der Abrollbedingung

$$R d\vartheta = dx$$

als Zwangsbedingung. Diese ist natürlich integrabel und dann holonom. Dies soll hier jedoch bewusst nicht gemacht werden. Aus

$$R dq_2 - dq_1 = 0 \quad (p = 1)$$

folgt:

$$a_{11} = -1 ; \quad a_{12} = R .$$

Das rollende Fass besitzt die Lagrange-Funktion:

$$L = \frac{M}{2} \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} J \dot{q}_2^2 - M g (l - q_1) \sin \varphi .$$

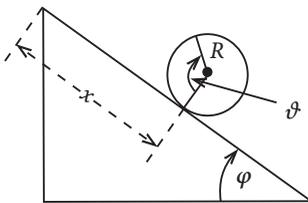


Abb. 1.21. Rollender Hohlzylinder auf einer schiefen Ebene

Wegen $p = 1$ benötigen wir **einen** Lagrange'schen Multiplikator λ . Nach (1.102) gilt dann:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} = M \ddot{q}_1 - M g \sin \varphi = \lambda a_{11} = -\lambda ,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial L}{\partial q_2} = J \ddot{q}_2 = \lambda a_{12} = R \lambda .$$

Die Koordinate q_2 scheint zyklisch zu sein. Dies führt hier aber nicht zu einem Erhaltungssatz, da q_1 und q_2 ja nicht unabhängig voneinander sind. Die Zwangsbedingung liefert noch, (1.103) entsprechend, eine dritte Bestimmungsgleichung:

$$-\dot{q}_1 + R \dot{q}_2 = 0 .$$

Man findet leicht als vorläufige Lösung:

$$\ddot{q}_1 = \ddot{x} = \frac{1}{2} g \sin \varphi ,$$

$$\ddot{q}_2 = \ddot{\vartheta} = \frac{1}{2R} g \sin \varphi ,$$

$$\lambda = \frac{M}{2} g \sin \varphi .$$

Die Linearbeschleunigung des abrollenden Zylinders ist also nur halb so groß wie die eines Körpers, der auf der Ebene reibungslos gleitet (vgl. (4.36), Bd. 1). Für die generalisierten Zwangskräfte finden wir

$$\bar{Q}_1 = \lambda a_{11} = -\frac{M}{2} g \sin \varphi ; \quad \bar{Q}_2 = \lambda a_{12} = \frac{1}{2} M g R \sin \varphi .$$

\bar{Q}_1 kann mit der x -Komponente der Zwangskraft identifiziert werden, die aus der „Rauigkeit“ der Unterlage resultiert, die das Fass zum „Rollen“ bringt. Sie vermindert die tatsächlich wirkende Schwerkraft von $Mg \sin \varphi$ auf $(1/2)Mg \sin \varphi$. $-\bar{Q}_2$ entspricht dem durch die „Rauigkeit“ der Unterlage dem Zylinder aufgezwungenen Drehmoment.

3) Rollen eines Rades auf rauher Unterfläche

Dieses System haben wir bereits in Abschn. 1.1 als Anwendungsbeispiel für nicht-holonome Zwangsbedingungen diskutiert. Wir übernehmen die Notation des Beispiels (B,2) aus Abschn. 1.1 und wählen als „generalisierte“ Koordinaten:

$$q_1 = x ; \quad q_2 = y ; \quad q_3 = \varphi ; \quad q_4 = \vartheta .$$

Die Zwangsbedingung „Rollen“ wird nach (1.14) durch

$$\dot{x} - R \cos \vartheta \dot{\varphi} = 0 ; \quad \dot{y} - R \sin \vartheta \dot{\varphi} = 0$$

wiedergegeben. Dies bedeutet nach (1.95) ($p = 2$):

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1; & a_{12} &= 0; & a_{13} &= -R \cos \vartheta; & a_{14} &= 0; \\ a_{21} &= 0; & a_{22} &= 1; & a_{23} &= -R \sin \vartheta; & a_{24} &= 0. \end{aligned}$$

Wir benötigen zwei Lagrange'sche Multiplikatoren λ_1 und λ_2 . Nach (1.104) lauten dann die generalisierten Zwangskräfte:

$$\bar{Q}_1 = \lambda_1; \quad \bar{Q}_2 = \lambda_2; \quad \bar{Q}_3 = -R \cos \vartheta \lambda_1 - R \sin \vartheta \lambda_2; \quad \bar{Q}_4 = 0.$$

Die Radscheibe möge sich im kräftefreien Raum bewegen, besitze also nur kinetische Energie:

$$L = T = \frac{M}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\vartheta}^2.$$

J_1 ist das Trägheitsmoment um die Radachse und J_2 das Trägheitsmoment um die durch Scheibenmittelpunkt und Auflagepunkt verlaufende Achse. Die Lagrange-Gleichungen (1.102) liefern nun:

$$M \ddot{x} = \lambda_1; \quad M \ddot{y} = \lambda_2; \quad J_1 \ddot{\varphi} = -R \lambda_1 \cos \vartheta - R \lambda_2 \sin \vartheta; \quad J_2 \ddot{\vartheta} = 0.$$

Mit den obigen Zwangsbedingungen haben wir damit sechs Gleichungen für sechs Unbekannte. Aus $\ddot{\vartheta} = 0$ folgt:

$$\vartheta = \omega t \quad (\omega = \text{const}).$$

Wir differenzieren die Zwangsbedingungen noch einmal nach der Zeit:

$$\ddot{x} = -R \omega \dot{\varphi} \sin \omega t + R \ddot{\varphi} \cos \omega t,$$

$$\ddot{y} = R \omega \dot{\varphi} \cos \omega t + R \ddot{\varphi} \sin \omega t.$$

Damit liegen auch die Multiplikatoren λ_1 und λ_2 fest:

$$\lambda_1 = -M R \omega \sin \omega t \dot{\varphi} + M R \cos \omega t \ddot{\varphi},$$

$$\lambda_2 = M R \omega \cos \omega t \dot{\varphi} + M R \sin \omega t \ddot{\varphi}.$$

Die letzte, noch nicht benutzte Lagrange-Gleichung ergibt dann nach Einsetzen von λ_1 und λ_2 :

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\varphi} &= M R^2 \omega \sin \omega t \cos \omega t \dot{\varphi} - M R^2 \cos^2 \omega t \ddot{\varphi} - \\ &\quad - M R^2 \omega \cos \omega t \sin \omega t \dot{\varphi} - M R^2 \sin^2 \omega t \ddot{\varphi} = \\ &= -M R^2 \ddot{\varphi}. \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann aber nur die Lösung

$$\ddot{\varphi} \equiv 0 \iff \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 = \text{const}$$

haben. Damit sind die Zwangskräfte vollständig bestimmt:

$$\bar{Q}_1 = -MR\omega\dot{\phi}_0 \sin \omega t ; \quad \bar{Q}_2 = MR\omega\dot{\phi}_0 \cos \omega t ; \quad \bar{Q}_3 = \bar{Q}_4 = 0 . \quad (1.107)$$

Sie sorgen dafür, dass die Scheibe senkrecht auf der xy -Ebene rollt. Falls sich das Rad lediglich geradeaus bewegt, ist ω gleich Null, sodass alle Zwangskräfte verschwinden.

➤ 1.2.7 Aufgaben

Aufgabe 1.2.1 Diskutieren Sie die Bewegung einer auf einem gleichförmig rotierenden Draht reibungslos gleitenden Perle. r sei der Abstand vom Drehpunkt. Es sollen die Anfangsbedingungen

$$r(t=0) = r_0 ; \quad \dot{r}(t=0) = -r_0\omega$$

gelten (ω : konstante Winkelgeschwindigkeit des Drahtes).

1.2.1

Aufgabe 1.2.2 Betrachten Sie eine auf einem mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden Draht reibungslos gleitende Perle der Masse m . Sie befinde sich, anders als in Aufgabe 1.2.1 zudem im Schwerfeld der Erde.

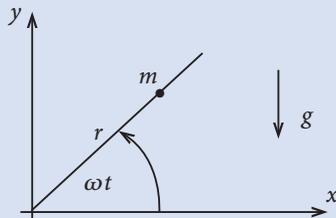


Abb. 1.22. Perle auf rotierendem Draht im Schwerfeld der Erde

1.2.2

1. Welche Zwangsbedingungen liegen vor?
2. Formulieren Sie die Lagrange-Funktion der Perle!
3. Stellen Sie die Lagrangesche Bewegungsgleichung auf und finden Sie deren allgemeine Lösung!
4. Benutzen Sie die Anfangsbedingungen

$$r(t=0) = r_0 ; \quad \dot{r}(t=0) = 0 .$$

Wie groß muss ω mindestens sein, damit die Perle sich auch für $t \rightarrow \infty$ nach außen bewegt?

5. Wie würde das Problem in der Newton-Mechanik zu bearbeiten sein?