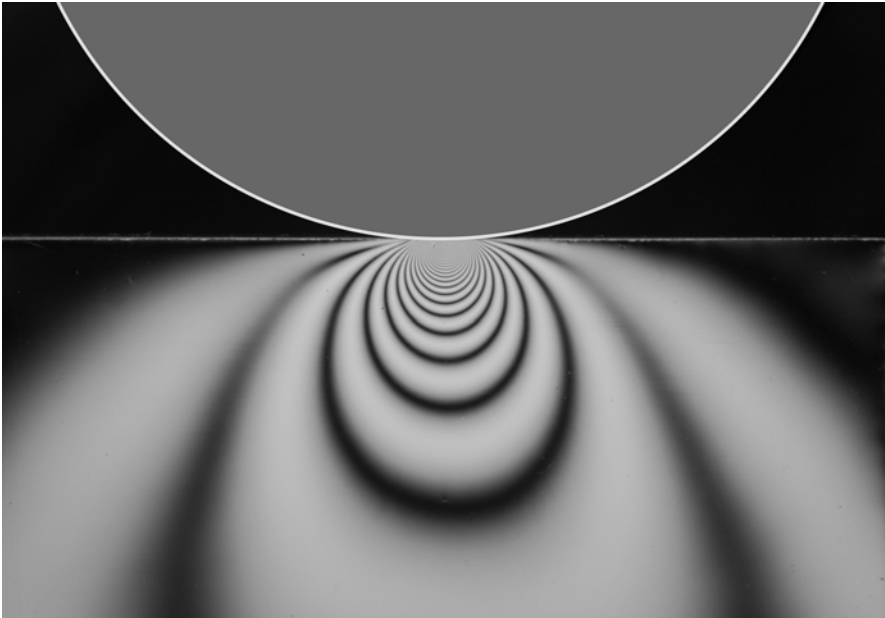


5 Rigorose Behandlung des Kontaktproblems – Hertzscher Kontakt



In diesem Kapitel werden Methoden zur exakten Lösung von Kontaktproblemen im Rahmen der "Halbraumnäherung" erläutert. Wir behandeln dabei ausführlich das klassische Kontaktproblem des Normalkontakts zwischen einer starren Kugel und einem elastischen Halbraum, welches oft auch zur Analyse von komplizierteren Modellen herangezogen wird.

Als vorbereitenden Schritt fassen wir einige Ergebnisse der Elastizitätstheorie zusammen, die in der Kontaktmechanik eine unmittelbare Anwendung finden. Wir betrachten Deformationen in einem elastischen Halbraum, die durch die an der Oberfläche des Halbraumes wirkenden vorgegebenen Spannungen verursacht werden. Die Berechnung der Deformation in einem elastischen Körper unter der Einwirkung von Oberflächenkräften („direkte Aufgabe der Elastizitätstheorie“) ist viel einfacher als die Lösung von Kontaktproblemen, da in den letzteren weder die Spannungsverteilung, noch das Kontaktgebiet anfänglich bekannt sind. Die klassischen Lösungen von Hertz für einen nicht adhäsiven und von Johnson, Kendall und Roberts für einen adhäsiven Kontakt benutzen die bekannten Lösungen der „direkten Aufgaben“ als eine Voraussetzung zur Konstruktion der Lösung eines Kontaktproblems.

5.1 Deformation eines elastischen Halbraumes unter der Einwirkung von Oberflächenkräften

Wir betrachten ein elastisches Medium, welches einen unendlich großen Halbraum ausfüllt, d.h. welches von einer Seite durch eine unendlich ausgedehnte Ebene begrenzt wird. Unter dem Einfluss von Kräften, die an der freien Oberfläche wirken, wird sich das Medium deformieren. Wir legen die xy -Ebene in die freie Oberfläche des Mediums; dem ausgefüllten Gebiet entsprechen positive z . Die Deformation im gesamten Halbraum kann in analytischer Form bestimmt und in Lehrbüchern über die Elastizitätstheorie gefunden werden¹. Wir führen hier nur die Formeln für die Verschiebungen unter der Wirkung einer entlang der z -Achse gerichteten, im Koordinatenursprung angreifenden Kraft auf.

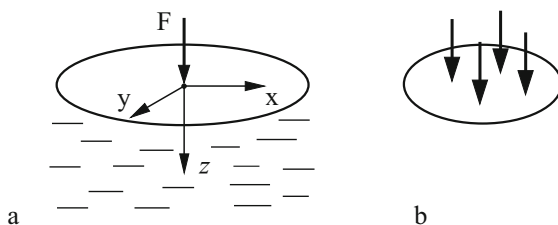


Abb. 5.1 (a) Eine an der Oberfläche eines elastischen Halbraumes angreifende Kraft; (b) Ein auf die Oberfläche wirkendes Kraftsystem.

Die Verschiebungen, die diese Kraft hervorruft, berechnen sich nach den folgenden Gleichungen:

$$u_x = \frac{1+\nu}{2\pi E} \left[\frac{xz}{r^3} - \frac{(1-2\nu)x}{r(r+z)} \right] F_z, \quad (5.1)$$

$$u_y = \frac{1+\nu}{2\pi E} \left[\frac{yz}{r^3} - \frac{(1-2\nu)y}{r(r+z)} \right] F_z, \quad (5.2)$$

$$u_z = \frac{1+\nu}{2\pi E} \left[\frac{2(1-\nu)}{r} + \frac{z^2}{r^3} \right] F_z, \quad (5.3)$$

mit $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Im Besonderen erhält man hieraus die Verschiebung der freien Oberfläche des Mediums, indem man $z = 0$ setzt:

¹ Siehe z.B. L.D. Landau, E.M. Lifschitz. Elastizitätstheorie, (Lehrbuch der Theoretischen Physik, Band 7), 7. überarbeitete Auflage, Akademie Verlag, Berlin 1991, §§8,9.

$$u_x = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\pi E} \frac{x}{r^2} F_z, \quad (5.4)$$

$$u_y = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\pi E} \frac{y}{r^2} F_z, \quad (5.5)$$

$$u_z = \frac{(1-\nu^2)}{\pi E} \frac{1}{r} F_z, \quad (5.6)$$

mit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Bei mehreren gleichzeitig angreifenden Kräften (Abb. 5.1 b) werden wir Verschiebungen bekommen, die sich aus der Summe der jeweiligen Lösung für jede einzelne Kraft ergeben.

Wir werden im Weiteren im Rahmen der *Halbraumnäherung* arbeiten, bei der angenommen wird, dass die Steigung der kontaktierenden Oberflächen im Kontaktgebiet und in der relevanten Umgebung viel kleiner als Eins sind, so dass die Oberflächen in erster Näherung "eben" sind. Zwar müssen dabei die Kontaktbedingungen für die beiden Oberflächen auch weiterhin exakt verfolgt werden, die Zusammenhänge zwischen den Oberflächenkräften und Verschiebungen können aber als identisch mit denen in einem elastischen Halbraum angesehen werden.

Für Kontaktprobleme *ohne Reibung* ist im Rahmen der Halbraumnäherung nur die z -Projektion der Verschiebung (5.6) von Interesse. Insbesondere bei einer kontinuierlichen Verteilung $p(x, y)$ des Normaldruckes berechnet sich die Verschiebung der Oberfläche durch

$$u_z = \frac{1}{\pi E^*} \iint p(x', y') \frac{dx' dy'}{r}, \quad r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} \quad (5.7)$$

mit

$$E^* = \frac{E}{(1-\nu^2)}. \quad (5.8)$$

Bevor wir zum eigentlichen Kontaktproblem übergehen, wollen wir zwei Hilfsaufgaben lösen. Wir nehmen an, dass in einem kreisförmigen Gebiet mit dem Radius a eine Druckverteilung der Form $p = p_0 (1 - r^2/a^2)^n$ erzeugt wird. Gesucht wird die vertikale Verschiebung der Oberflächenpunkte innerhalb des kreisförmigen beanspruchten Gebietes.

a. Homogene Normalverschiebung ($n = -1/2$).

Das benutzte Koordinatensystem ist in der Abb. 5.1 a gezeigt. Die Normalspannung sei nach dem Gesetz

$$p = p_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{-1/2} \quad (5.9)$$

verteilt. Für die vertikale Verschiebung ergibt sich (eine ausführliche Herleitung findet sich im Anhang A):

$$u_z = \frac{\pi p_0 a}{E^*}, \quad r \leq a. \quad (5.10)$$

Die vertikale Verschiebung ist für alle Punkte im Kontaktgebiet gleich. Aus diesem Ergebnis folgt unmittelbar, wie sich die angenommene Druckverteilung erzeugen lässt: Sie entsteht beim Eindruck durch einen starren zylindrischen Stab. Die gesamte im Druckgebiet wirkende Kraft ist gleich

$$F = \int_0^a p(r) 2\pi r dr = 2\pi p_0 a^2. \quad (5.11)$$

Die Steifigkeit des Kontaktes wird definiert als Verhältnis der Kraft zur Verschiebung:

$$c = 2aE^* \quad (5.12)$$

Geschrieben in der Form

$$c = 2E^* \beta \sqrt{\frac{A}{\pi}}, \quad (5.13)$$

wobei A die Kontaktfläche des starren Indenters ist, ist (5.12) auch für Indenter mit nicht runden Querschnitten gültig. Die Konstante β hat immer die Größenordnung 1:

Runder Querschnitt:	$\beta=1,000$	
Dreieckiger Querschnitt:	$\beta=1,034$	(5.14)
Quadratischer Querschnitt:	$\beta=1,012$	

b. Hertzsche Druckverteilung ($n = 1/2$).

Für die Druckverteilung der Form

$$p = p_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{1/2} \quad (5.15)$$

ergibt sich die vertikale Verschiebung (Anhang A)

$$u_z = \frac{\pi p_0}{4E^* a} (2a^2 - r^2). \quad (5.16)$$

Für die Gesamtkraft folgt

$$F = \int_0^a p(r) 2\pi r dr = \frac{2}{3} p_0 \pi a^2 . \quad (5.17)$$

Die Verschiebung der Oberfläche innerhalb und außerhalb des Druckgebietes ist in Abb. 5.2 gezeigt.

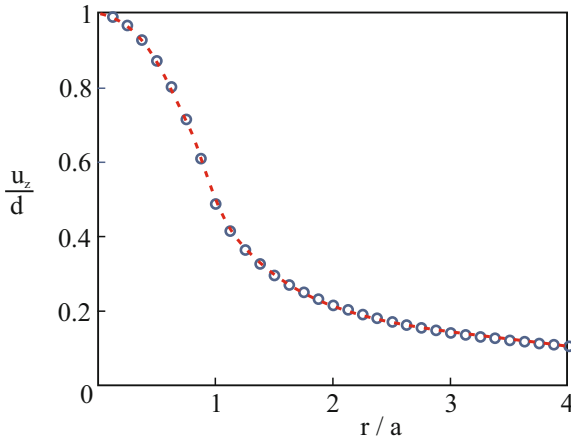


Abb. 5.2 Oberflächenverschiebung u_z , die sich für die Druckverteilung (5.15) ergibt; $d = u_z(0)$ ist die Eindringtiefe.

5.2 Hertzische Kontakttheorie

In der Abb. 5.3 ist schematisch ein Kontakt zwischen einer starren Kugel und einem elastischen Halbraum gezeigt. Die Verschiebung der Oberflächenpunkte im Kontaktgebiet zwischen einer ursprünglich ebenen Oberfläche und der starren Kugel mit Radius R ist gleich

$$u_z = d - \frac{r^2}{2R} . \quad (5.18)$$

Wir haben gesehen (5.16), dass eine quadratische Verteilung der vertikalen Verschiebungen durch eine Druckverteilung der Form (5.15) erzeugt wird.

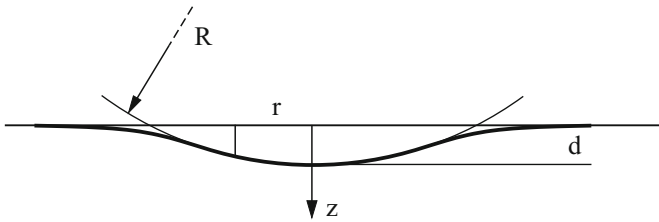


Abb. 5.3 Eine starre Kugel im Kontakt mit einem elastischen Halbraum.

Versuchen wir die Parameter a und p_0 so zu wählen, dass diese Druckverteilung genau die Verschiebungen (5.18) verursacht:

$$\frac{1}{E^*} \frac{\pi p_0}{4a} (2a^2 - r^2) = d - \frac{r^2}{2R}. \quad (5.19)$$

a und d müssen demnach die folgenden Forderungen erfüllen:

$$a = \frac{\pi p_0 R}{2E^*}, \quad d = \frac{\pi a p_0}{2E^*}. \quad (5.20)$$

Für den Kontaktradius folgt daraus

$$a^2 = Rd \quad (5.21)$$

und für den maximalen Druck

$$p_0 = \frac{2}{\pi} E^* \left(\frac{d}{R} \right)^{1/2}. \quad (5.22)$$

Einsetzen von (5.21) und (5.22) in (5.17) ergibt für die Normalkraft

$$F = \frac{4}{3} E^* R^{1/2} d^{3/2}. \quad (5.23)$$

Mit (5.22) und (5.23) kann auch der Druck im Zentrum des Kontaktgebietes und der Kontaktradius als Funktion der Normalkraft berechnet werden:

$$p_0 = \left(\frac{6FE^{*2}}{\pi^3 R^2} \right)^{1/3}, \quad a = \left(\frac{3FR}{4E^*} \right)^{1/3}. \quad (5.24)$$

Wir bestimmen noch den Ausdruck für die potentielle Energie U der elastischen Deformation. Wegen $-F = -\partial U / \partial d$ erhalten wir für U

$$U = \frac{8}{15} E^* R^{1/2} d^{5/2}. \quad (5.25)$$

5.3 Kontakt zwischen zwei elastischen Körpern mit gekrümmten Oberflächen

Die Ergebnisse der Hertzschen Theorie (5.21), (5.22), (5.23) kann man mit geringen Modifikationen auch in den unten aufgelisteten Fällen benutzen.

(A). Sind beide Körper elastisch, so muss man für E^* den folgenden Ausdruck benutzen

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}. \quad (5.26)$$

E_1 und E_2 sind hier die Elastizitätsmoduln und ν_1 und ν_2 die Poisson-Zahlen beider Körper.

(B) Sind zwei Kugeln mit den Radien R_1 und R_2 im Kontakt (Abb. 5.4 a), so gelten die Gleichungen (5.21), (5.22), (5.23) weiterhin mit dem Radius R gemäß

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}. \quad (5.27)$$

Dies gilt auch dann, wenn einer der Radien negativ ist (Abb. 5.4 b). Der Krümmungsradius ist negativ, wenn das Krümmungszentrum außerhalb des Mediums liegt.

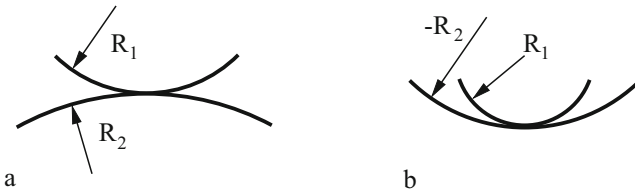


Abb. 5.4 Kontakt zwischen zwei Körpern mit gekrümmten Oberflächen.

(C) In einem Kontakt zwischen einem elastischen Halbraum und einem starren Körper mit den Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 (Abb. 5.5 a) ergibt sich ein elliptisches Kontaktgebiet. Für die Halbachsen gilt

$$a = \sqrt{R_1 d}, \quad b = \sqrt{R_2 d}. \quad (5.28)$$

Die Kontaktfläche berechnet sich somit zu

$$A = \pi ab = \pi \tilde{R} d, \quad (5.29)$$

wobei

$$\tilde{R} = \sqrt{R_1 R_2} \quad (5.30)$$

der effektive, *Gauß'sche Krümmungsradius* der Oberfläche ist. Dieser Radius ist auch in den anderen Hertzschen Beziehungen an Stelle von R zu benutzen².

Die Druckverteilung wird durch

$$p(x, y) = p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad (5.31)$$

gegeben.

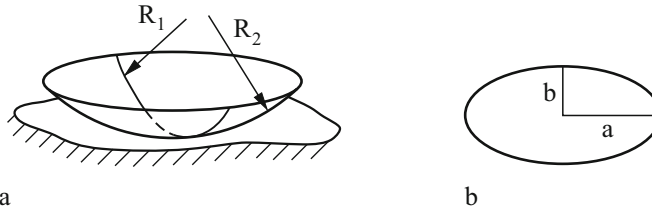


Abb. 5.5 Ein Körper mit gekrümmter Oberfläche (Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2) im Kontakt mit einem elastischem Halbraum.

(D) Sind zwei elastische Zylinder mit senkrecht zu einander liegenden Achsen und den Radien R_1 und R_2 im Kontakt (Abb. 5.6 a), so wird der Abstand der Oberflächen beider Körper im ersten Moment (noch ohne Deformation) gegeben durch

$$h(x, y) = \frac{x^2}{2R_1} + \frac{y^2}{2R_2}. \quad (5.32)$$

Das entspricht genau dem Fall (C) eines Ellipsoids mit den Krümmungsradien R_1 und R_2 . Dementsprechend gelten die Hertzschen Relationen mit

$$\tilde{R} = \sqrt{R_1 R_2}. \quad (5.33)$$

Bei gleichen Radien $R = R_1 = R_2$ ist das Kontaktproblem zwischen zwei Zylindern äquivalent zum Kontaktproblem zwischen einer Kugel mit dem Radius R und einem elastischen Halbraum mit ebener Oberfläche.

² Die Hertz'schen Beziehungen gelten umso genauer, je näher das Verhältnis R_1 / R_2 zu 1 ist. Aber auch für $R_1 / R_2 = 10$ gilt die Gleichung (5.23) mit einer Genauigkeit von 2,5%.

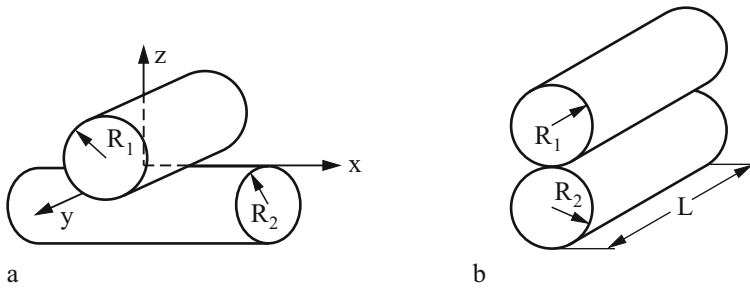


Abb. 5.6 (a) Zwei gekreuzte elastische Zylinder im Kontakt; (b) Zwei Zylinder mit parallelen Achsen im Kontakt.

(E) Im Falle eines Kontaktes zwischen zwei Zylindern mit parallelen Achsen (Abb. 5.6 b) ist die Kraft linear proportional zur Eindringtiefe (was wir bereits im Kapitel 2 gesehen haben):

$$F = \frac{\pi}{4} E^* L d \tag{5.34}$$

Interessant ist, dass der Krümmungsradius in dieser Beziehung überhaupt nicht erscheint. Die halbe Kontaktbreite wird durch dieselbe Beziehung

$$a = \sqrt{Rd} , \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \tag{5.35}$$

gegeben, wie im Kontakt zwischen zwei Kugeln. Der maximale Druck ist gleich

$$p_0 = \frac{E^* d}{2 a} = \frac{E^*}{2} \left(\frac{d}{R} \right)^{1/2} = \left(\frac{E^* F}{\pi L R} \right)^{1/2} . \tag{5.36}$$

5.4 Kontakt zwischen einem starren kegelförmigen Indenter und dem elastischen Halbraum

Bei Indentierung eines elastischen Halbraumes durch einen starren kegelförmigen Indenter (Abb. 5.7 a) sind die Eindringtiefe und der Kontaktradius durch die Beziehung³

³ Sneddon I.N. The Relation between Load and Penetration in the Axisymmetric Boussinesq Problem for a Punch of Arbitrary Profile. - Int. J. Eng. Sci., 1965, v. 3, pp. 47–57.

$$d = \frac{\pi}{2} a \tan \theta \tag{5.37}$$

gegeben. Die Druckverteilung hat die Form

$$p(r) = -\frac{Ed}{\pi a(1-\nu^2)} \ln \left(\frac{a}{r} + \sqrt{\left(\frac{a}{r}\right)^2 - 1} \right). \tag{5.38}$$

Die Spannung hat an der Spitze des Kegels (im Zentrum des Kontaktgebietes) eine logarithmische Singularität (Abb. 5.7 b). Die Gesamtkraft berechnet sich zu

$$F_N = \frac{2}{\pi} E \frac{d^2}{\tan \theta}. \tag{5.39}$$

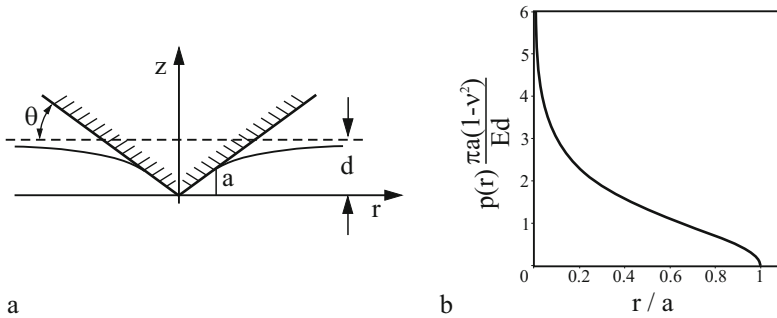


Abb. 5.7 (a) Kontakt zwischen einem starren kegelförmigen Indenter und dem elastischen Halbraum; (b) Druckverteilung im Normalkontakt zwischen einem starren kegelförmigen Indenter und dem elastischen Halbraum.

5.5 Innere Spannungen beim Hertzschen Kontakt

Die Spannungen unter Einwirkung einer vertikalen Einzelkraft F im Koordinatensprung sind durch

$$\sigma_{xx} = \frac{F}{2\pi} \left[-3 \frac{x^2 z}{r^5} + (1-2\nu) \left(\frac{x^2 (2r+z)}{r^3 (r+z)^2} - \frac{r^2 - rz - z^2}{r^3 (r+z)} \right) \right], \tag{5.40}$$

$$\sigma_{yy} = \frac{F}{2\pi} \left[-3 \frac{y^2 z}{r^5} + (1-2\nu) \left(\frac{y^2 (2r+z)}{r^3 (r+z)^2} - \frac{r^2 - rz - z^2}{r^3 (r+z)} \right) \right], \tag{5.41}$$

$$\sigma_{zz} = -\frac{3F}{2\pi} \frac{z^3}{r^5}, \quad (5.42)$$

$$\tau_{xy} = \frac{F}{2\pi} \left[-3 \frac{xyz}{r^5} + (1-2\nu) \frac{xy(2r+z)}{r^3(r+z)^2} \right], \quad (5.43)$$

$$\tau_{yz} = \frac{3F}{2\pi} \frac{yz^2}{r^5}, \quad (5.44)$$

$$\tau_{xz} = \frac{3F}{2\pi} \frac{xz^2}{r^5} \quad (5.45)$$

bestimmt⁴. Die Berechnung der Spannungen bei beliebiger Normaldruckverteilung p an der Oberfläche gelingt durch Superposition. Für die Normalspannung σ_{zz} in z -Richtung ergibt sich exemplarisch

$$\sigma_{zz}(x, y, z) = -\frac{3z^3}{2\pi} \iint_{(A)} \frac{p(x', y')}{\left((x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2 \right)^{5/2}} dx' dy', \quad (5.46)$$

wobei $\iint_{(A)}$ die Integration über das druckbeaufschlagte Gebiet meint.

Für die Hertzsche Druckverteilung (5.15) werden im Folgenden einige Ergebnisse gezeigt. Abb. 5.8 zeigt die Spannungen auf der z -Achse für $\nu = 0,33$. Die Schubspannungen sind alle 0; für die Punkte auf der z -Achse sind die Koordinatenrichtungen gleichzeitig die Hauptrichtungen. Die analytische Lösung für die Komponenten des Spannungstensors lautet⁵

$$\sigma_{zz} = -p_0 \left(1 + \frac{z^2}{a^2} \right)^{-1}, \quad (5.47)$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = -p_0 \left[(1+\nu) \left(1 - \frac{z}{a} \arctan \frac{a}{z} \right) - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{z^2}{a^2} \right)^{-1} \right]. \quad (5.48)$$

Zudem ist die maximale Schubspannung $\tau_1 = \frac{1}{2} |\sigma_{zz} - \sigma_{xx}|$ abgebildet. Man kommt zum Ergebnis, dass die maximale Schubspannung im Inneren liegt; für $\nu = 0,33$ bei $z \approx 0,49a$. Abb. 5.9 zeigt die Vergleichsspannung

⁴ Hahn, H. G.: Elastizitätstheorie. Teubner, 1985.

⁵ Johnson, K. L.: Contact mechanics. Cambridge University Press, 6. Nachdruck der 1. Auflage, 2001.

$$\sigma_V = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{yy})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) \right]^{1/2} \quad (5.49)$$

nach der Gestaltänderungsenergiehypothese in der $x - z$ -Ebene.

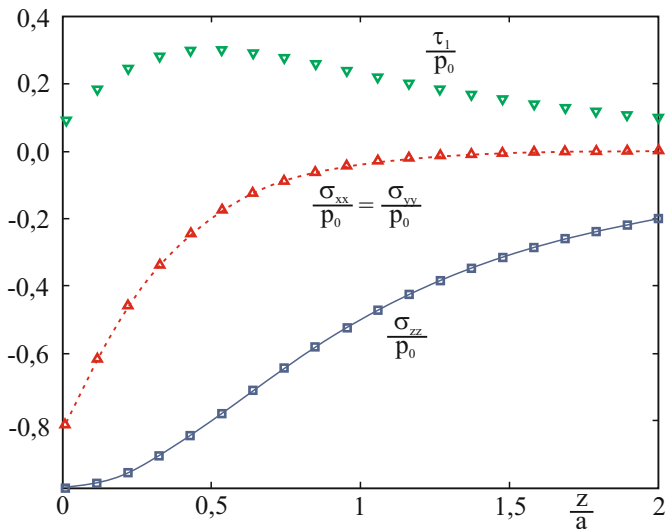


Abb. 5.8 Spannungen entlang der z-Achse ($x = y = 0$) bei Hertzscher Druckverteilung.

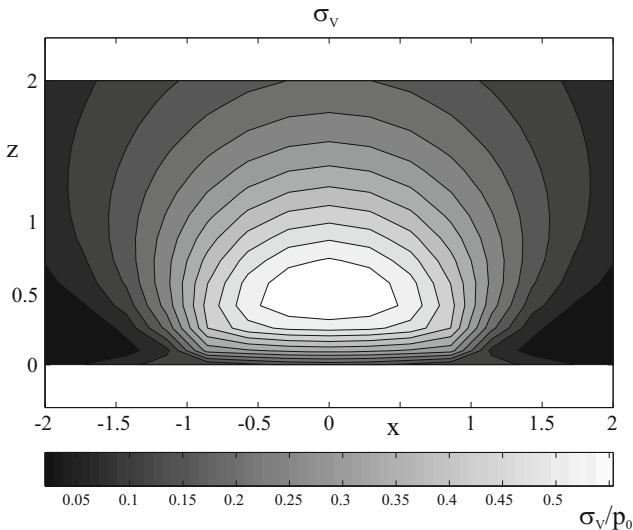


Abb. 5.9 Vergleichsspannung σ_V gemäß (5.49) bei Hertzscher Druckverteilung (x - z -Ebene).

Aufgaben

Aufgabe 1: Abzuschätzen ist der maximale Druck und die Größe des Kontaktgebietes in einem Rad-Schiene-Kontakt. Die maximalen Lasten je Rad liegen bei den Güterzügen bei $F \approx 10^5 \text{ N}$, der Radradius beträgt ca. $R = 0,5 \text{ m}$.

Lösung: Der Rad-Schiene-Kontakt kann in erster Näherung als Kontakt zwischen zwei Zylindern mit zu einander senkrechten Achsen und ungefähr gleichen Krümmungsradien R betrachtet werden. Er ist somit äquivalent zu einem Kontakt zwischen einer elastischen Kugel mit dem Radius R und einem elastischen Halbraum. Der effektive Elastizitätsmodul beträgt $E^* \approx E / 2(1-\nu^2) \approx 1,2 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$. Für den Druck p_0 im Zentrum des Kontaktgebietes ergibt sich nach (5.24) $p_0 \approx 1,0 \text{ GPa}$. Der Kontaktradius beträgt $a \approx 6,8 \text{ mm}$.

Aufgabe 2: Zwei Zylinder aus dem gleichen Material und mit gleichen Radien R werden so in Kontakt gebracht, dass ihre Achsen einen Winkel von $\pi/4$ bilden (Abb. 5.10). Zu bestimmen ist die Kraft-Eindrucktiefe-Relation.

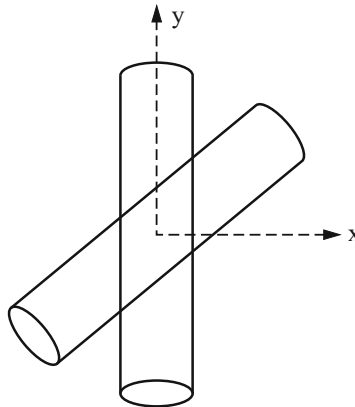


Abb. 5.10 Kontakt zwischen zwei gleichartigen Zylindern, deren Achsen einen Winkel von $\pi/4$ bilden (Draufsicht).

Lösung: Die Kontaktebene nehmen wir als horizontal an. Der Abstand der Oberfläche des ersten Zylinders von dieser Fläche (im ersten Moment des Kontaktes)

ist gleich $z_1 = \frac{x^2}{2R}$, die des zweiten $z_2 = -\frac{(x-y)^2}{4R}$. Der Abstand zwischen beiden

Flächen ist gleich

$$h = \frac{x^2}{2R} + \frac{(x-y)^2}{4R} = \frac{1}{R} \left(\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}y^2 \right).$$

Die Hauptkrümmungen berechnen sich als Eigenwerte dieser quadratischen Form aus der Gleichung

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{4R} - \kappa & -\frac{1}{4R} \\ -\frac{1}{4R} & \frac{1}{4R} - \kappa \end{vmatrix} = \kappa^2 - \frac{\kappa}{R} + \frac{1}{8R^2} = 0.$$

zu $\kappa_{1,2} = \frac{1 \pm 1/\sqrt{2}}{2R}$. Die Hauptkrümmungsradien sind entsprechend gleich

$R_{1,2} = \frac{2R}{1 \pm 1/\sqrt{2}}$. Für den Gauß'schen Krümmungsradius ergibt sich

$\tilde{R} = \sqrt{R_1 R_2} = 2\sqrt{2}R$. Da die Stoffe beider Zylinder gleich sind, ergibt sich aus

(5.26) $E^* = \frac{E}{2(1-\nu^2)}$. Die Kraft-Eindruck-Relation (5.23) wird in diesem Fall zu

$$F = \frac{2^{7/4}}{3} \frac{E}{(1-\nu^2)} R^{1/2} d^{3/2}.$$

Aufgabe 3: Man bestimme die Kontaktzeit, einer mit einer starren Wand zusammenstoßenden elastischen Kugel (Radius R) (Hertz, 1882).

Lösung: Die Annäherung der Kugel zur Wand ab dem ersten Kontakt bezeichnen wir mit x . Die potentielle Energie des Systems wird durch (5.25) gegeben mit $d = x$ und E^* nach (5.26). Während der Stoßzeit bleibt die Energie erhalten:

$$\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{8}{15} E^* R^{1/2} x^{5/2} = \frac{mv_0^2}{2}.$$

Die maximale Annäherung der Kugel und der Wand x_0 entspricht dem Zeitpunkt, zu dem die Geschwindigkeit dx/dt verschwindet, und ist gleich

$$x_0 = \left(\frac{15}{16} \frac{mv_0^2}{E^* R^{1/2}} \right)^{2/5}.$$

Die Stoßdauer τ (während der x von 0 bis x_0 anwächst und dann wieder bis 0 abnimmt) ist

$$\tau = \frac{2}{v_0} \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{1 - (x/x_0)^{5/2}}} = \frac{2x_0}{v_0} \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^{5/2}}} = \frac{2,94x_0}{v_0}.$$

Aufgabe 4: Man bestimme den maximalen Kontaktdruck bei einem Zusammenstoß zwischen einer Kugel und einer Wand.

Lösung: Die maximale Annäherung x_0 haben wir in der Aufgabe 3 berechnet. Der maximale Druck p_0 wird durch (5.22) gegeben und ist gleich

$$p_0 = \frac{2}{\pi} E^* \left(\frac{x_0}{R} \right)^{1/2} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{15 E^{*4} m v_0^2}{16 R^3} \right)^{1/5} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{5}{4} \pi E^{*4} \rho v_0^2 \right)^{1/5},$$

wobei ρ die Dichte des Materials ist.

Zum Beispiel bei einem Zusammenstoß einer stählernen Kugel mit einer stählernen Wand mit $v_0 = 1$ m/s hätten wir (unter der Annahme eines rein elastischen Verhaltens)

$$p_0 \approx \frac{2}{\pi} \left(\frac{5}{4} \pi (10^{11})^4 (7,8 \cdot 10^3) \cdot 1 \right)^{1/5} = 3,2 \cdot 10^9 \text{ Pa}.$$

Aufgabe 5: Zu bestimmen ist die differentielle Kontaktsteifigkeit $\delta F_N / \delta d$ für einen Kontakt zwischen einem elastischen rotationssymmetrischen Körper und einer starren Ebene bei einer Kontaktfläche A (Abb. 5.11).

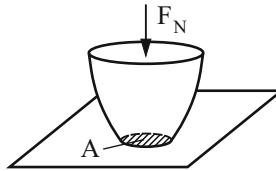


Abb. 5.11 Kontakt zwischen einem elastischen rotationssymmetrischen Körper und einer starren Ebene.

Lösung: Betrachten wir einen runden Kontakt mit dem Radius a . Die Änderung der Konfiguration des Kontaktes infolge einer infinitesimal kleinen Vergrößerung der Indentierungstiefe um δd kann man in zwei Schritten herbeiführen:

Zunächst wird nur das bereits bestehende Kontaktgebiet starr um δd verschoben (Abb. 5.12 b). Dabei ändert sich die Normalkraft gemäß (5.12) um $\delta F_N = 2aE^* \delta d$. Im zweiten Schritt müssen die durch starre Indentierung ausstehenden Ränder angehoben werden (Abb. 5.12 c). Die sich dadurch ergebende Änderung der Normalkraft ist proportional zur Fläche $2\pi a \delta a$, die angehoben werden soll und zur Höhe des ausstehenden Materials. Sie ist somit eine infinitesimal kleine Größe höherer Ordnung und kann vernachlässigt werden. Die differentielle Steifigkeit

$$c = \frac{\delta F_N}{\delta d} = 2aE^*$$

hängt somit nur vom Kontaktradius ab, nicht aber von der genauen Form des rotationsymmetrischen Körpers. Für nicht rotationsymmetrische Körper gilt für die differentielle Steifigkeit die Gleichung (5.13).

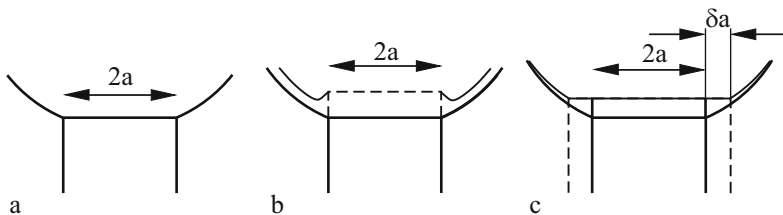


Abb. 5.12 Zur Berechnung der differentiellen Steifigkeit.

Aufgabe 6: Auf einem kreisförmigen Gebiet mit dem Radius a wirkt eine konstante Normalspannung p_0 . Zu bestimmen ist die Verschiebung des Gebietes im Zentrum und am Rande des Kreises.

Lösung: Mit Hilfe der Gleichung (5.7) erhalten wir für die Verschiebung im Zentrum des Kreises

$$u_z(0) = \frac{1}{\pi E^*} \int_0^a p_0 \frac{2\pi r}{r} dr = \frac{2p_0 a}{E^*}.$$

Für die Verschiebung am Rande ergibt sich

$$u_z(a) = \frac{1}{\pi E^*} \int_0^{2a} p_0 \frac{2\varphi(r) \cdot r}{r} dr = \frac{p_0}{\pi E^*} \int_0^{2a} 2\varphi(r) dr.$$

(Definition der Integrationsvariable r in diesem Fall siehe Abb. 5.13). Der Winkel φ berechnet sich zu $2\varphi = \pi - 2 \arcsin\left(\frac{r}{2a}\right)$. Somit erhalten wir

$$u_z(a) = \frac{p_0}{\pi E^*} \int_0^{2a} \left(\pi - 2 \arcsin\left(\frac{r}{2a}\right) \right) dr = \frac{2ap_0}{\pi E^*} \int_0^1 \left(\pi - 2 \arcsin(\xi) \right) d\xi = \frac{4ap_0}{\pi E^*}.$$

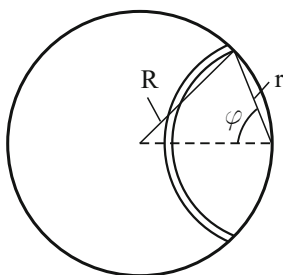


Abb. 5.13 Zur Berechnung des Integrals in der Aufgabe 6.