2 Innerbetriebliche Standortplanung

2.1 Gegenstand der innerbetrieblichen Standortplanung

Die Aufgabe der innerbetrieblichen Standortplanung besteht darin, die Maschinenstandorte innerhalb einer Betriebsstätte im Hinblick auf den zu bewältigenden Materialfluss so zu wählen, dass die Transportkosten minimiert werden (CORSTEN/GÖSSINGER 2009). Wie bedeutsam die Frage nach der besten Anordnung der Maschinen für einen Betrieb ist, hängt – wie die Ausführungen des vorherigen Kapitels haben deutlich werden lassen – vornehmlich von dessen Produktionsstruktur ab (KRAJEWSKI u. a. 2007). Lassen sich die Maschinen produktorientiert anordnen, wie dies bei der Fließfertigung (flow-shop) häufig möglich ist, so sind die Maschinenstandorte vergleichsweise einfach zu bestimmen (JACOBS u. a. 2009). Die englischsprachige Literatur bezeichnet eine solche produktorientierte Anordnung als product layout. Die einfache Handhabung dieses Problemtyps ist sofort ersichtlich, weil hier allen Aufträgen eine identische Maschinenfolge zugrunde liegt. Wesentlich schwieriger wird die Standortentscheidung, wenn in sehr kleinen Losen eine große Anzahl beträchtlich voneinander abweichender Güter gefertigt wird, was meist in der Werkstattfertigung (job-shop) der Fall ist. Dann ist es kaum möglich, die Maschinen so zusammenzufassen, dass funktionsähnliche Arbeitsgänge, die im Produktionsablauf unmittelbar hintereinander auszuführen sind, auch möglichst schnell hintereinander, d. h. ohne weite Transporte zurückzulegen, ausgeführt werden. Darüber hinaus wird es wegen der starken Heterogenität des Produktangebots sowie der geringen Losgrößen kaum rentabel sein, den Transport zu automatisieren, wie dies mit einem Fließband erfolgt. Die Transportzeiten werden also länger und fallen gegenüber den Bearbeitungszeiten auf den Maschinen relativ stärker ins Gewicht. Die für die Werkstattfertigung erforderliche Maschinenanordnung nennt man auch prozessorientiert oder funktionsorientiert (process layout oder functional layout). In beiden Fällen liegt der innerbetrieblichen Standortentscheidung ein gegebener Maschinenpark, bestehend aus den Maschinen m, $m=1,\ldots,M$, zugrunde. Alle bzw. einige dieser Maschinen werden für alle bzw. einige Aufträge j, $j=1,\ldots,J$, eines bekannten Auftragsbestands auf zumindest einer Bearbeitungsstufe benötigt.

An dieser Stelle soll die Vereinbarung getroffen werden, dass nur Standorte im zweidimensionalen Raum, d. h. in einer Ebene betrachtet und durch ihre Mittelpunkte gemäß dem Koordinatentupel $(x_k; y_k)$ identifiziert werden (LIGGETT 2000). Vereinfachend soll der einem Tupel $(x_k; y_k)$ zugeordnete Standort mit k

bezeichnet werden. Stehen für die Maschinenanordnung K Standorte, $k=1,\ldots,K$, zur Auswahl, so sei $L^K=\{1,\ldots,K\}$ die Menge dieser Standorte. Hat man aber bereits aus diesen K Standorten $M \leq K$ Standorte so ausgewählt, dass jeder Maschine genau ein Standort zugeordnet ist, so bezeichnet $L^M \subseteq L^K$ die M -elementige Menge der ausgewählten Standorte. Die eindeutige Abbildung

$$P: \tilde{M} \to L^M, \tilde{M}=\{1,\ldots,M\},$$

heißt dann Lösung des innerbetrieblichen Standortproblems. Ausführlich lässt sich eine Lösung auch als

$$P(\tilde{M})=(P(1),\ldots,P(M)) \in \wp(L^M)$$

darstellen, was besagt, dass Maschine eins auf dem Standort $P(1) \in L^M$, Maschine zwei auf dem Standort $P(2) \in L^M$ usw. angeordnet wird. Die Menge $\wp(L^M)$ bezeichnet dabei die Menge aller Permutationen der Anordnung der Indizes von L^M. Im Folgenden soll der Maschine m (bzw. n) zugeordnete Standort $P(m)$ (bzw. $P(n)$) generell mit k bzw. l bezeichnet werden.

Der Transportweg d_{kl} vom Standort k zum Standort l ist durch die Strecke von k nach l gegeben, wie sie von den Transportmitteln aufgrund eines vorgegebenen Wegesystems zurückgelegt werden kann. Jedem Transportweg lässt sich eine Transportzeit zuordnen, welche die entsprechende Strecke in einer geeigneten Zeitdimension misst. Die Transportzeit einer Mengeneinheit der Produktart zwischen den Maschinen m und n wird mit t_{mn} bezeichnet. Den Güteraustausch, der zwischen zwei Maschinen m und n in der Richtung stattfindet, dass ein beliebiger Auftrag zunächst auf Maschine m und unmittelbar anschließend auf Maschine n bearbeitet wird, definiert man durch die Summe der so transportierten Mengeneinheiten als Transportintensität i_{mn}. Die Transportkosten $k_{mn}(=k_{nm})$ zwischen zwei Maschinen ergeben sich aus der Bewertung der entsprechenden Transportzeiten mit einem Zeitkostensatz q und der Multiplikation mit der Summe $(i_{mn}+i_{nm})$ der Transportintensitäten. Formal hat man also:

$$k_{mn}=k_{nm}=t_{mn} \cdot q \cdot (i_{mn}+i_{nm}). \tag{2.1.1}$$

2.2 Modellprämissen und Zielfunktion

Bemüht man sich um eine optimale Anordnung der Maschinen zueinander, so hat man sich zunächst an den Rahmenbedingungen zu dem vorliegenden Standortproblem auszurichten. Derartige Bedingungen lassen sich als Prämissen zu einer modelltheoretischen Betrachtung fassen. Sie werden in der einschlägigen Literatur (Nahmias 2009) nahezu identisch formuliert.

- Als erste und wichtigste Prämisse wird gefordert, dass die Wahl einer Standortlösung die Betriebsleistung nicht beeinflusst. D. h. der Betrieb ist mit jeder in Frage kommenden Wahl von Maschinenstandorten in der Lage, sein Produktionsprogramm zeitgerecht auszuführen. Die Absatzpreise liegen fest, unabhängig von dem exakten Fertigstellungstermin eines Auftrags und dem Auslieferungstermin. Mit dieser Annahme und dem Streben nach maximalen Deckungsbeiträgen kann sich eine Planung der innerbetrieblichen Standorte ausschließlich unter Kostenaspekten vollziehen (Kruse 1986).

- Unter den zahlreichen im Betrieb anfallenden Kostenarten sind allein die Transportkosten problemabhängig. Aus diesem Grund lassen sich die gesamten Produktionskosten K in solche, die durch die innerbetriebliche Standortentscheidung beeinflusst werden (d. h. Transportkosten K_T) und sonstige, unter diesem Planungsaspekt konstante Kosten (K_c) einteilen:

$$K = K_T + K_c = \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=m}^{M} k_{mn} + K_c. \tag{2.2.1}$$

- Dies hat zur Folge, dass hinsichtlich einer Kostenminimierung nur der erste Term beachtet werden muss, während die konstanten Kosten K_c in gleicher Höhe für alle Standortlösungen anfallen. Insbesondere bedeutet das, dass andere Planungsbereiche der Produktion außer Acht bleiben. Simultane Planungsaspekte treten, obwohl sie etwa in der oben beschriebenen Weise existieren, zugunsten einer technisch durchführbaren separaten Planungsausführung in den Hintergrund.

- Die Transportkosten lassen sich bestimmten Transportaktivitäten eindeutig zuordnen.

- Bezüglich aller Transportkosten werden konstante, identische Zeitkostensätze von eins $(q=1)$ unterstellt, so dass man sich letztlich auf eine Betrachtung von Transportzeiten beschränken kann. Für diese soll wiederum Proportionalität zur transportierten Stückzahl und zur Weglänge gelten, so dass man die Transportkosten k_{mn} schließlich durch die mit der Summe $(i_{mn}+i_{nm})$ der Transportintensitäten gewichteten Entfernung d_{kl} zwischen den Maschinen m und n misst.

- Zum Planungsbeginn sind sowohl die Maschinen als auch die darauf zu bearbeitenden Aufträge (Lose) mit ihren Maschinenfolgen bekannt. Zum einen hat man damit ein statisches Standortproblem, zum anderen können die Transportintensitäten i_{mn} aus den Maschinenfolgen und den Losgrößen eindeutig bestimmt werden (Rosenblatt 1986, Wäscher 1982).

Allein mit diesen Bedingungen kann eine Lösung noch nicht auf ihre Optimalität überprüft werden. Dazu fehlt ein geeignetes Zielkriterium, welches sich, wie die Prämissen allerdings schon nahe legen, auf die Forderung nach Kostenminimierung gründen sollte (Günther 2005). Am häufigsten wird die Zielsetzung der

Minimierung der Summe aller Transportkosten formuliert, welche im Verlauf des durch die Aufträge beschriebenen Produktionsprozesses anfallen, d. h.

$$min\, K_T \text{ oder } min \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=m}^{M} k_{mn} \,. \tag{2.2.2}$$

Anstelle einer Minimierung der Transportkostensumme (Transportzeitensumme) können auch die von einem Auftrag maximal zurückzulegenden Transportwege minimiert werden. Eine derartige Zielvorschrift trägt dafür Sorge, dass die Aufträge möglichst gleich behandelt, d. h. in einer möglichst kurzen Zeit zur nächsten Bearbeitung transportiert werden. Dies ist dann von Bedeutung, wenn der Auftragsbestand als Ganzes zu einem möglichst frühen Termin fertig gestellt sein muss. Eine mit dieser Vorschrift angestrebte Lösung wird als Minimax-Lösung bezeichnet. Anhand von Beispiel 2.1 lassen sich die soeben angestellten Überlegungen veranschaulichen.

Beispiel 2.1

Während ein Auftrag A mit einer Losgröße von 100 Mengeneinheiten (ME) zunächst auf Maschine 1, anschließend auf Maschine 2 und schließlich auf Maschine 3 zu bearbeiten ist, soll ein zweiter Auftrag B mit der Losgröße 50 ME auf den drei Maschinen in der Reihenfolge 2–1–3 bearbeitet werden. Aus dem Standortschema der Abbildung 2.2.1 wurden für Maschine 1 der Standort 3, Maschine 2 der Standort 1 und Maschine 3 der Standort 4 ausgewählt. Die benötigten Transportwege d_{kl} sind durch die Tabelle 2.2.1 gegeben.

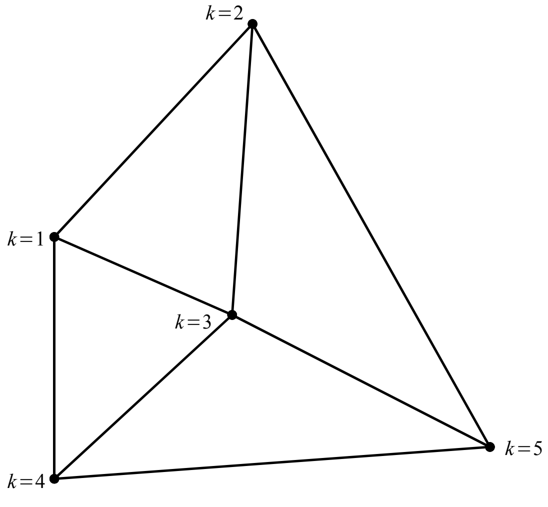

Abbildung 2.2.1: Zur Auswahl stehende Maschinenstandorte

Tabelle 2.2.1: Transportwege [in 100m]

Standort	$l=1$	$l=2$	$l=3$	$l=4$	$l=5$
$k=1$	0	6	4	5	10
$k=2$	6	0	6	10	10
$k=3$	4	6	0	5	6
$k=4$	5	10	5	0	9
$k=5$	10	10	6	9	0

Als Lösung zu diesem innerbetrieblichen Standortproblem erhält man somit die Abbildung $P\{1,2,3\}=(3,1,4)$. Die Transportintensitäten zwischen den Maschinen kann man Tabelle 2.2.2 entnehmen. Sie ergeben sich aus den Losgrößen und Maschinenfolgen beider Aufträge.

Tabelle 2.2.2: Transportintensitäten [in ME]

Maschine	$n=1$	$n=2$	$n=3$
$m=1$	–	100	50
$m=2$	50	–	100
$m=3$	0	0	–

Es sei angenommen, dass mit dem eingesetzten Transportmittel 100 m in einer Zeiteinheit zurückgelegt werden können, so dass

$$d_{kl}=t_{mn}\cdot 1\,\frac{100\text{ m}}{\text{ZE}}$$

gilt. Die Nutzung des Transportmittels verursache Kosten in Höhe von einer Geldheinheit pro Zeit- und Mengeneinheit, d. h.:

$$q=1\,\frac{\text{GE}}{\text{ZE}\cdot\text{ME}}.$$

Für die drei willkürlich gewählten Standorte der drei Maschinen erhält man die Transportkosten k_{mn} aus folgenden Überlegungen:

- zwischen Maschine 1 und 2 werden 150 ME über eine Strecke von 400 m bewegt
- zwischen Maschine 1 und 3 werden 50 ME über 500 m transportiert und
- zwischen Maschine 2 und 3 werden 100 ME über 500 m bewegt.

Allgemein gilt für die Transportkosten k_{mn} gemäß (2.1.1):

$$k_{mn} = k_{nm} = t_{mn} \cdot q \cdot (i_{mn} + i_{nm}).$$

Aufgrund der hier getroffenen Annahme über den Zusammenhang von Entfernung und Transportzeit folgt:

$$k_{mn} = k_{nm} = d_{kl} \cdot \frac{\text{ZE}}{100\text{ m}} \cdot q \cdot (i_{mn} + i_{nm}).$$

Setzt man den Transportkostensatz q ein, erhält man:

$$k_{mn} = k_{nm} = d_{kl} \cdot \frac{\text{ZE}}{100\text{ m}} \cdot 1 \frac{\text{GE}}{\text{ZE} \cdot \text{ME}} \cdot (i_{mn} + i_{nm}) = d_{kl} \cdot 1 \frac{\text{GE}}{100\text{ m} \cdot \text{ME}} \cdot (i_{mn} + i_{nm})$$

Es ergibt sich damit:

- zwischen Maschine 1 und 2:

$$\begin{aligned} k_{12} = k_{21} = d_{31} \cdot 1 \frac{\text{GE}}{100\text{ m} \cdot \text{ME}} \cdot (i_{12} + i_{21}) \\ &= 400\text{ m} \cdot 1 \frac{\text{GE}}{100\text{ m} \cdot \text{ME}} \cdot (100\text{ ME} + 50\text{ ME}) \\ &= 600\text{ GE}, \end{aligned}$$

- zwischen Maschine 1 und 3:

$$\begin{aligned} k_{13} = k_{31} = d_{34} \cdot 1 \frac{\text{GE}}{100\text{ m} \cdot \text{ME}} \cdot (i_{13} + i_{31}) \\ &= 500\text{ m} \cdot 1 \frac{\text{GE}}{100\text{ m} \cdot \text{ME}} \cdot (50\text{ ME} + 0\text{ ME}) \\ &= 250\text{ GE und} \end{aligned}$$

- zwischen Maschine 2 und 3:

$$\begin{aligned} k_{23} = k_{32} = d_{14} \cdot 1 \frac{\text{GE}}{100\text{ m} \cdot \text{ME}} \cdot (i_{23} + i_{32}) \\ &= 500\text{ m} \cdot 1 \frac{\text{GE}}{100\text{ m} \cdot \text{ME}} \cdot (100\text{ ME} + 0\text{ ME}) \\ &= 500\text{ GE und} \end{aligned}$$

Gemäß (2.2.1) erhält man für die willkürlich getroffenene Standortwahl $P\{1,2,3\} = (3,1,4)$ folgende gesamte Materialflusskosten K_T:

$$K_T = \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=m}^{M} k_{mn} \text{ bzw.}$$

$$\begin{aligned} K_T &= \sum_{m=1}^{3} \sum_{n=m}^{3} k_{mn} \\ &= k_{11} + k_{12} + k_{13} + k_{22} + k_{23} + k_{33} \\ &= 0 + 600 + 250 + 0 + 500 + 0 \\ &= 1.350 \text{ GE.} \end{aligned}$$

Darüber, ob man damit eine optimale Lösung erreicht hat, lässt sich in Anbetracht einer noch fehlenden Zielvorschrift nichts aussagen. Beschränkt man sich jedoch auf eine Betrachtung der willkürlich gewählten Standorte 1, 3 und 4 und berechnet für jede mögliche Zuordnung der drei Maschinen auf diese Standorte die zugehörigen Materialflusskosten, stellt man fest, dass $P\{1,2,3\} = (3,1,4)$ und $P\{1,2,3\} = (1,3,4)$ zu den geringsten Materialflusskosten führen (vgl. Tabelle 2.2.3).

Tabelle 2.2.3: Materialflusskosten sämtlicher möglicher Maschinenanordnungen auf den Standorten 1, 3 und 4

Anordnung der Maschinen 1–3 auf den gewählten Standorten 1, 3 und 4	Materialflusskosten
$P\{1,2,3\} = (1,3,4)$	1.350 GE
$P\{1,2,3\} = (1,4,3)$	1.450 GE
$P\{1,2,3\} = (3,1,4)$	1.350 GE
$P\{1,2,3\} = (3,4,1)$	1.450 GE
$P\{1,2,3\} = (4,1,3)$	1.400 GE
$P\{1,2,3\} = (4,3,1)$	1.400 GE

2.3 Klassifizierung von Standortproblemen

In diesem Unterkapitel sollen mehrere Typen von innerbetrieblichen Standortproblemen grob skizziert werden, bevor typische Lösungsverfahren vorgestellt werden. Für die Typeneinteilung sind besonders zwei Aspekte wesentlich, zum einen der zulässige Lösungsraum, welcher einmal unbeschränkt oder aber durch eine

Vorauswahl von Standorten bereits beschränkt sein kann, zum anderen das Entfernungsmaß, welches die Länge der Transportwege bestimmt.

Zunächst wird ein allgemeines Standortproblem formuliert, welches von einem unbeschränkten Lösungsraum ausgeht. Seien dazu $M-N$ Maschinen, $m=1,\dots,M-N$, bereits auf Standorten $k=1,\dots,M-N$ angeordnet. Dagegen sind noch N neue Maschinen, $m=M-N+1,\dots,M$, auf beliebigen Standorten $k\notin\{1,\dots,M-N\}$ anzuordnen. Die Transportzeitensumme beträgt damit

$$Z_T=\sum_{m=1}^{M-N}\sum_{n=1}^{M-N} d_{mn}\cdot i_{mn}+\sum_{m=1}^{M-N}\sum_{l=M-N+1}^{M} d_{ml}\cdot i_{ml} + \sum_{k=M-N+1}^{M}\sum_{n=1}^{M-N} d_{kn}\cdot i_{kn}+\sum_{k=M-N+1}^{M}\sum_{l=M-N+1}^{M} d_{kl}\cdot i_{kl}, \tag{2.3.1}$$

wenn eine neue Maschine m bzw. n auf einem Standort $k\in L^K$ bzw. $l\in L^K$, $k,l\notin\{1,\dots,M-N\}$, angeordnet wird. Während der erste Summand die Transportbeziehungen zwischen den bereits angeordneten Maschinen ausdrückt und somit als konstanter Term bei der Lösungssuche vernachlässigt werden darf, enthalten der zweite und dritte Summand die variablen Transportzeiten zwischen den bereits angeordneten und den neuen Maschinen und der vierte Term die Transportzeiten zwischen den neuen Maschinen. Das unbeschränkte Standortproblem besteht nun darin, geeignete Standorte k, l für die neuen Maschinen m, n zu finden, so dass die obige Transportzeitensumme minimal wird. In dem Spezialfall, in dem zwischen neuen und alten Maschinen kein Güteraustausch stattfindet, vereinfacht sich diese Zielfunktion, indem der zweite und dritte Summand null werden. Analog fällt der letzte Summand weg, wenn zwischen den neuen Maschinen keine Transportbeziehungen bestehen.

Für die Lage der optimalen Standorte ist es nun von entscheidender Bedeutung, wie die Länge der Transportwege d_{kl} zwischen zwei Maschinen k und l festgestellt wird (Meller/Gau 1996). Hier kennt man zunächst die gerade Entfernungsmessung, die den so genannten euklidischen Abstand zwischen den Standorten angibt (Brandon-Jones/Slack 2009). Man hat in diesem Fall, wenn der Standort k durch die Koordinaten x_k und y_k, der Standort l durch die Koordinaten x_l und y_l beschrieben werden können, als euklidischen Abstand der beiden Standorte

$$d_{kl}^E=\left[\left(x_k-x_l\right)^2+\left(y_k-y_l\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{2.3.2}$$

Sind die Transportmittel dagegen für die Benutzung des geraden Wegs ungeeignet, weil ihnen beispielsweise Maschinen oder andere Hindernisse diesen Weg versperren, wird häufig ein rechtwinkliges Wegenetz angelegt, wobei sich der Abstand zwischen den Maschinen dann nach

$$d_{kl}^R=|x_k-x_l|+|y_k-y_l| \tag{2.3.3}$$

bemisst. Abbildung 2.3.1 zeigt eine graphische Interpretation dieser beiden Maße.

Es ist zu bemerken, dass sowohl für den euklidischen als auch für den rechtwinkligen Abstand $d_{kl} = d_{lk}$ gilt, d. h. beide Maße sind symmetrisch bezüglich der Standorte k und l. Weiterhin hat man $d_{kk} = 0$. Bleibt also ein Auftrag während zwei aufeinander folgender Operationen bei einer Maschine, so nimmt der zwischen den Operationen liegende Transport keine Zeit in Anspruch. Diese wünschenswerte Eigenschaft reduziert die Transportzeitensumme Z_T um weitere Summanden.

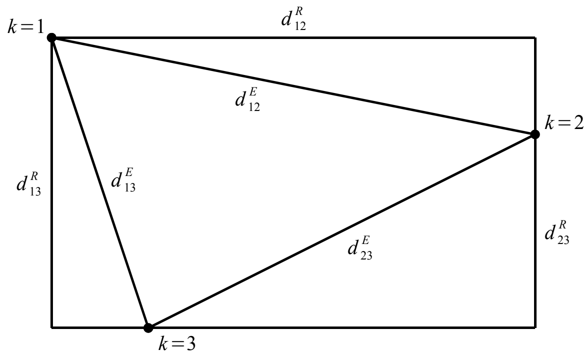

Abbildung 2.3.1: Entfernungsmessung mit zwei verschiedenen Maßen

Neben den vorgestellten Maßen existiert eine Anzahl weiterer Möglichkeiten der Entfernungsmessung. Prinzipiell lässt sich für jedes Standortproblem ein zutreffendes Maß konstruieren. Viele solcher Maße haben gegenüber den oben formulierten Maßen den Nachteil, dass man sie nicht explizit angeben kann. Sie sind vielmehr in den bereits berechneten Transportentfernungen d_{kl} enthalten. Dies erschwert oft die Handhabung der Zielfunktion bezüglich ihrer Optimierung.

Ein solches implizites Maß hat man auch, wenn man einen zweiten Problemtyp der innerbetrieblichen Standortplanung betrachtet, der sich durch eine Beschränkung des Lösungsraums auf M bereits ausgewählte Standorte auszeichnet. Es ist hierbei uninteressant, nach welchem Kriterium und unter Zugrundelegung welchen Maßes diese Auswahl erfolgt. Die Standorte sind durch eine diskrete Menge L^M, die Entfernung zwischen den Standorten durch d_{kl} vorgegeben. Für eine Lösung dieses Standortproblems ist es nur noch von Bedeutung, ob die Maschine m dem Standort k zugeordnet wird oder nicht; falls ja, wird die binäre Problemvariable y_{km} zu eins, falls nein, erhält sie den Wert null. Als Zielfunktion hat man deswegen:

$$min\, Z_T = \sum_{k=1}^{M} \sum_{l=1}^{M} \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{M} d_{kl} \cdot i_{mn} \cdot y_{km} \cdot y_{ln} \,. \tag{2.3.4}$$

Aufgrund der über die Optimalität allein entscheidenden eindeutigen Zuordnungen der neuen Maschinen m und n zu Standorten k und l nennt man diese Art von Standortproblemen auch quadratische Zuordnungsprobleme. Während in allgemeinen Standortproblemen die Größen x_k, y_k als Problemvariablen in der Zielfunktion auftreten, hat man hier eine nichtlineare Zielfunktion mit den Variablen y_{km} und y_{ln}.

2.4 Lösungsansätze

Eine Übersicht über wichtige algorithmische Arbeiten zu Standortproblemen sowohl des allgemeinen Typs als auch des Zuordnungstyps findet man bei NAHMIAS (2009). In diesem Unterkapitel werden einige Verfahren zur Lösung von Standortproblemen des ersten, allgemeinen Typs dargestellt. Die grundlegende Arbeit wurde hierbei von BINDSCHEDLER und MOORE (1961) geleistet, die erstmals einen exakten analytischen Ansatz entwickelt haben. Ihr Ausgangspunkt ist dabei eine bereits eingerichtete Betriebsanlage, in der der Standort für eine neue Maschine bestimmt werden soll. Dazu wird für jeden möglichen Standort der neuen Maschine ein Effektivitätsmaß E vorgeschlagen, welches die variablen Transportkosten angibt, die mit der Platzierung der neuen Maschine auf diesem Standort verbunden sind. Durch Verknüpfung aller Standortpunkte mit demselben Effektivitätsmaß erhält man schließlich eine Isokostenlinie, welche eine graphische Interpretation und vergleichende Bewertung sämtlicher Standortvorschläge gestattet. Der Ansatz von BINDSCHEDLER und MOORE kann sowohl unter der Voraussetzung eines euklidischen Abstandsmaßes als auch für einen rechtwinkligen Abstand formuliert werden. Zunächst sei der euklidische Abstand unterstellt.

Hat man nur eine schon angeordnete Maschine, zu der die neue Maschine möglichst so platziert werden soll, dass sich minimale Transportwege ergeben, so kann man der existierenden Maschine $(m=1)$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Standortkoordinaten $(0;0)$ zuordnen, wogegen die neue Maschine zwei die variablen Koordinaten $(x;y)$ erhält. Das aus dem Kriterium der minimalen Transportkostensumme in diesem Fall unmittelbar herzuleitende Effektivitätsmaß E lautet dann:

$$E=d_{12}=\left[(0-x)^2+(0-y)^2\right]^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x^2+y^2}. \tag{2.4.1}$$

Die Transportintensitäten i_{12} und i_{21} sind hier ohne Bedeutung, sie sind konstant und beeinträchtigen die relative Effektivität einer Anordnung $(x;y)$ nicht. Wie auch die Abbildung 2.4.1 verdeutlicht, wäre der bezüglich E günstigste Standort für die neue Maschine derjenige, der bereits von der existierenden Maschine eingenommen wird. Die doppelte Besetzung eines Standorts wird jedoch durch die Modellprämissen ausgeschlossen, so dass die nächstbeste Lösungsrealisierung darin liegt, die neue Maschine in einem „infinitesimalen“ Abstand von $(0;0)$ anzusiedeln. Neben der sofort auftretenden Frage, welches denn der „infinitesimale“ Abstand sei, wird auch die mangelnde Praktikabilität eines solchen Lösungsvorschlags sofort einsichtig. Die Forderung einer Beschränkung des Lösungsraums insofern, als in einer durch die räumlichen Ausmaße der existierenden Maschine vorgegebenen Umgebung von $(0;0)$ keine andere Maschine angeordnet werden darf, erhält hier erstmals gravierende Bedeutung.

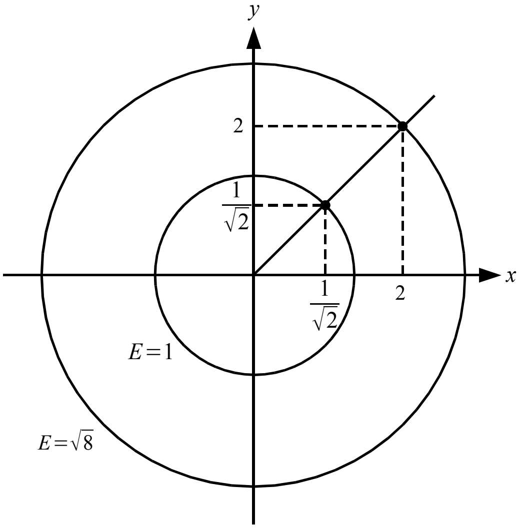

Abbildung 2.4.1: Effektivitätsmaß bei euklidischem Abstand; eine existierende und eine neue Maschine

Anders verhält es sich, wenn die bestehende Betriebsanlage zwei Maschinen 1 und 2 umfasst, welche beispielsweise in den Punkten $(-1;0)$ und $(1;0)$ des Koordinatensystems lokalisiert sein mögen. Die Anordnung einer neuen Maschine 3 würde nunmehr unter Beachtung des Effektivitätsmaßes

$$\begin{aligned} E &= (i_{13}+i_{31})\cdot d_{13}+(i_{23}+i_{32})\cdot d_{23} \\ &= (i_{13}+i_{31})\cdot[(-1-x)^2+(0-y)^2]^{\frac{1}{2}}+(i_{23}+i_{32})\cdot[(1-x)^2+(0-y)^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= (i_{13}+i_{31})\cdot[(x+1)^2+y^2]^{\frac{1}{2}}+(i_{23}+i_{32})\cdot[(x-1)^2+y^2]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

erfolgen. Das Effektivitätsoptimum bzw. Transportkostenminimum bestimmt sich nun aus

$$\frac{\partial E}{\partial x}=0 \text{ und } \frac{\partial E}{\partial y}=0.$$

Die Berechnung der optimalen Standortkoordinaten $(x;y)$ ist jedoch infolge des auftretenden Wurzelausdrucks nicht einfach.

Weiter erschwerend auf die Bestimmung eines Standortoptimums wirkt sich die Voraussetzung beliebig vieler existierender Maschinen $1,\dots,M-1$ sowie einer neuen Maschine M aus. Für E ergibt sich jetzt

$$E = \sum_{m=1}^{M-1} \left(i_{mM} + i_{Mm}\right) \cdot \left[\left(x_M - x\right)^2 + \left(y_m - y\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{2.4.3}$$

wobei die Koordinaten $(x_m; y_m)$ den Standort einer existierenden Maschine $m = 1, \ldots, M-1$ und $(x; y)$ den zu suchenden Standort der neuen Maschine M kennzeichnen. Es empfiehlt sich, zunächst eine vermutete Näherungslösung $\left(x^{(1)}; y^{(1)}\right)$ festzulegen und eine neue x-Koordinate $x^{(2)}$ aus

$\frac{\partial E}{\partial x} = 0$ unter der Bedingung $y = y^{(1)}$

zu ermitteln. Wegen der Konvexität von E erhält man anschließend aus

$\frac{\partial E}{\partial x} = 0$ unter der Bedingung $x = x^{(2)}$

einen neuen, besseren Wert $y^{(2)}$, so dass dieses Verfahren schließlich konvergiert, indem es unter Beachtung der im letzten Schritt s ermittelten Koordinaten $y^{(s)}$ (bzw. $x^{(s)}$), $s = 1, 2, 3, \ldots,$ im nächsten Schritt immer zu einem besseren Koordinatenwert $x^{(s+1)}$ (bzw. $y^{(s+1)}$) führt. Diese Vorgehensweise ist in Abbildung 2.4.2 skizziert.

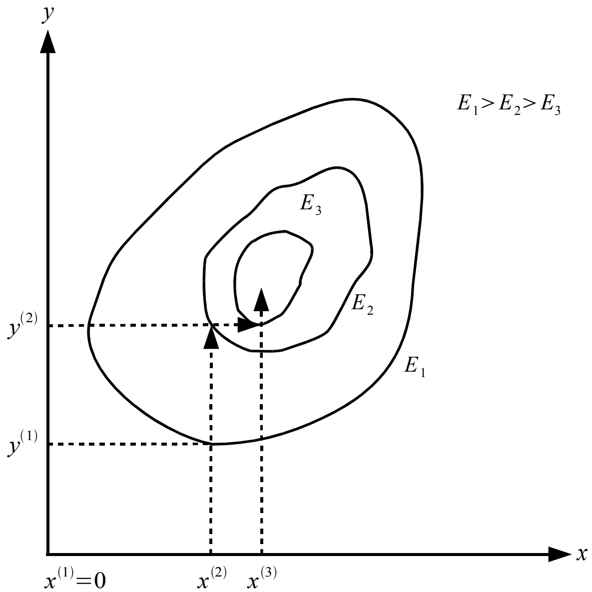

Abbildung 2.4.2: Graphische Interpretation des Lösungswegs eines allgemeinen Standortproblems bei euklidischen Abständen

Oft ist es nicht möglich, eine geradlinige Verbindung zwischen zwei Maschinen herzustellen, weil das System der Gänge im Betrieb bzw. Fertigungsbereich nur einen rechtwinkligen Materialfluss zulässt. Diese Restriktion kann formal durch das rechtwinklige Abstandsmaß ausgedrückt werden. Wird die einzige bereits lokalisierte Maschine 1 wiederum im Koordinatenursprung angeordnet, so hat man für den Standort $(x\,;y)$ einer neuen Maschine 2 jetzt das Effektivitätsmaß

$$E=|0-x|+|0-y| \quad \text{bzw.} \quad E=|x|+|y|.$$

Die Isokostenlinien haben jetzt die in Abbildung 2.4.3 wiedergegebene quadratische Form. Es tritt allerdings die bereits für den euklidischen Abstand konstatierte Problematik der Realisierbarkeit einer besten Lösung auf, da diese erneut im Punkt $(0\,;0)$ bzw. in einer infinitesimalen Umgebung um diesen Punkt liegen müsste.

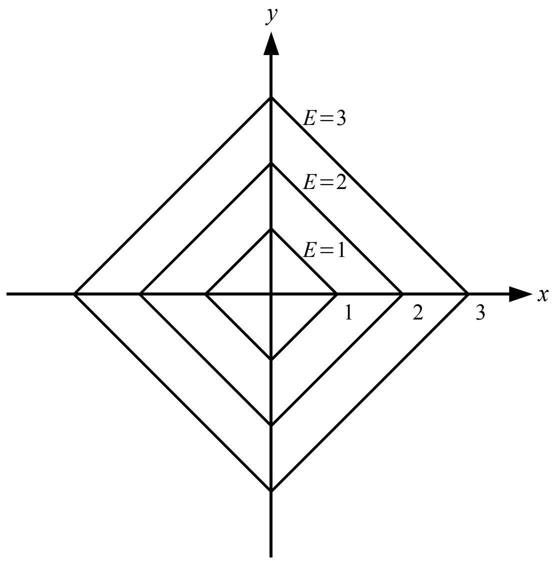

Abbildung 2.4.3: Effektivitätsmaß bei rechtwinkligem Abstand; eine existierende und eine neue Maschine

Geht man dagegen wieder von zwei existierenden Maschinen 1 und 2, die durch die Standortkoordinaten $(-1\,;0)$ und $(1\,;0)$ identifizierbar sind, sowie der neuen Maschine 3 aus, so gilt für das Effektivitätsmaß

$$E=(i_{13}+i_{31})\cdot[|-1-x|+|0-y|]+(i_{23}+i_{32})\cdot[|1-x|+|0-y|]$$

bzw.

$$E=(i_{13}+i_{31})\cdot[|x+1|+|y|]+(i_{23}+i_{32})\cdot[|x-1|+|y|].$$

Während bei zwei existierenden Maschinen kein eindeutiges Standortoptimum für die neue Maschine vorliegt, ist die Eindeutigkeit optimaler Standortkoordinaten für mehr als zwei existierende Maschinen im Allgemeinen gewährleistet.

Beispiel 2.2

Unter Zugrundelegung des allgemeinen Effektivitätsmaßes

$$E=\sum_{m=1}^{M-1}(i_{mM}+i_{Mm})\cdot\left[|x_m-x|+|y_m-y|\right],\quad M-1>2\,,$$

soll für $M=6$, d. h. fünf existierende Maschinen 1, 2, 3, 4, 5 sowie eine neue Maschine 6, ein Verfahren beispielhaft angewendet werden, welches die optimalen Standortkoordinaten $(x;y)$ für die neue Maschine ermittelt. Die Standortkoordinaten seien $(x_1;y_1)=(1;2)$, $(x_2;y_2)=(2;6)$, $(x_3;y_3)=(3;3)$, $(x_4;y_4)=(7;1)$ und $(x_5;y_5)=(7;5)$ der existierenden Maschinen sowie deren Transportintensitäten $i_{16}+i_{61}=16$, $i_{26}+i_{62}=9$, $i_{36}+i_{63}=12$, $i_{46}+i_{64}=16$ und $i_{56}+i_{65}=27$ zur neuen Maschine vorgegeben.

Man geht nun so vor, dass zuerst die Intensitätensumme

$$I=\sum_{m=1}^{5}(i_{m6}+i_{6m})$$

bestimmt wird. I beträgt im Beispielfall 80. Eine Besonderheit des rechtwinkligen Abstandsmaßes ist es, dass die x- bzw. y-Koordinate der neuen Maschine gesondert berechnet werden kann, ohne dass auf die andere Koordinate Rücksicht genommen werden muss. Abbildung 2.4.4 erklärt dies graphisch, indem sie zeigt, dass die Fortbewegung in der einen Richtung unabhängig von der in die andere Richtung geschieht. In den zwei eingezeichneten Wegen ist das gesamte Fortschreiten sowohl für die x- als auch für die y-Richtung identisch. D. h. es ist zulässig, zuerst die optimale Standortkoordinate x zu bestimmen. Dazu werden die Standortkoordinaten $x_m, m=1,\dots,5$, in aufsteigender Folge geordnet. Die Intensitäten $(i_{m6}+i_{6m})$, die x_m zugeordnet werden können, werden in derselben Reihenfolge solange kumuliert, bis die halbe Intensitätensumme $I/2$ erreicht oder überschritten ist.

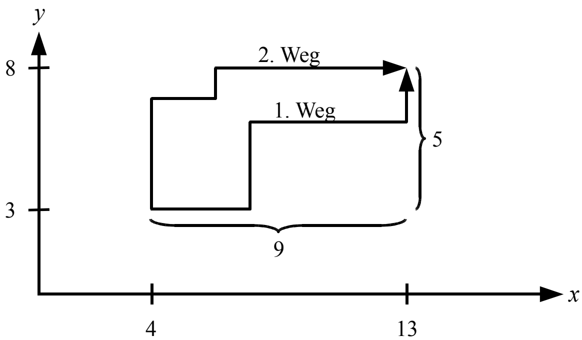

Abbildung 2.4.4: Zwei Beispiele für den Transport in einem rechtwinkligen Wegenetz

Das Ergebnis für die vorgegebenen Daten zeigt Tabelle 2.4.1.

Tabelle 2.4.1: Kumulierte Intensitäten

k	1	2	3	4	5
x_m	1	2	3	7	7
$\sum_{m=1}^{k} (i_{m6}+i_{6m})$	16	25	37	53	–

Zuletzt hat man die Intensitäten $(i_{46}+i_{64})$ zur bisherigen Intensitätensumme addiert. Während die geforderte Bedingung zuvor nicht erfüllt war, gilt jetzt aber

$$53>40=\frac{I}{2}.$$

Die Standortkoordinate $x_4=7$, die sich den zuletzt addierten Intensitäten zuordnen lässt, gibt nunmehr gleichzeitig die optimale Standortkoordinate x für die neu einzurichtende Maschine an.

Die vorgestellte Methode erzeugt nicht notwendigerweise das einzige Standortoptimum, vielmehr lassen sich in einigen Spezialfällen auch andere Optimalwerte finden. Dagegen ist das Verfahren für mindestens ein Optimum immer hinreichend. Mit zunehmender Anzahl der neu einzurichtenden Maschinen erhöht sich der Rechenaufwand zur Ermittlung optimaler Anordnungen erheblich, zumal dann auch noch Transportbeziehungen zwischen diesen neuen Maschinen zu berücksichtigen sind. Die Kritik an allgemeinen Standortproblemen richtet sich jedoch nicht allein gegen deren mangelnde Praxisnähe oder den sonst allzu hohen Rechenaufwand. Darüber hinaus liefern, wie auch die vorstehenden Beispiele gezeigt haben, die zur Problemlösung dienlichen analytischen oder graphischen Methoden oft nicht zu realisierende Anordnungen von Maschinen, da beispielsweise das ermittelte Standortoptimum bereits durch eine andere Maschine besetzt ist (Armour/Buffa 1963).

Für die praktische Eignung von Modellen und Lösungsansätzen ist deshalb die Berücksichtigung der tatsächlich besetzbaren Standorte wesentlich. Dies kann einmal erfolgen, indem die allgemein erhaltenen Lösungen mit den verfügbaren Plätzen verglichen werden und versucht wird, optimale und realisierbare Maschinenanordnungen möglichst zur Deckung zu bringen, d. h. die Abweichung der auszuwählenden Standorte von den Optima möglichst gering zu halten. Zweitens kann auch eine direkte Vorauswahl in Frage kommender Standorte getroffen und in die modelltheoretische Betrachtung übernommen werden.

Übungsaufgaben

Aufgabe 2.1

Acht existierende Maschinen $m=1,2,...,7,8,$ seien bereits auf den Standorten

- $(x_1;y_1)=(1;1)$, $(x_2;y_2)=(3;10)$,
- $(x_3;y_3)=(4;5)$, $(x_4;y_4)=(10;6)$,
- $(x_5;y_5)=(9;10)$, $(x_6;y_6)=(11;3)$,
- $(x_7;y_7)=(4;12)$, $(x_8;y_8)=(5;8)$

platziert. Für eine neue Maschine $m=9$ mit den Transportintensitäten

- $i_{19}=i_{29}=i_{39}=4$,
- $i_{49}=i_{59}=i_{69}=3$,
- $i_{79}=i_{89}=2$,
- $i_{91}=i_{92}=1$, $i_{93}=4$,
- $i_{94}=i_{95}=3$, $i_{96}=i_{97}=6$ und $i_{98}=3$

zu den existierenden Maschinen stehen die Plätze

- $(x_9;y_9)=(5;7)$,
- $(x_{10};y_{10})=(8;8)$,
- $(x_{11};y_{11})=(7;6)$,
- $(x_{12};y_{12})=(8;12)$ und
- $(x_{13};y_{13})=(9;4)$

zur Auswahl. Ordnen Sie der neuen Maschine den unter dem Aspekt geringster Transportkosten optimalen der verfügbaren Standorte zu. Beachten Sie, dass zum Transport der Zwischenprodukte ein rechtwinkliges Wegenetz eingerichtet ist.

Lösung zu Aufgabe 2.1

Die neue Maschine ist so anzuordnen, dass die anfallenden Transportkosten für die auf dieser Maschine zu bearbeitenden Aufträge minimal sind. Dafür wird für jeden möglichen Standort das Effektivitätsmaß E berechnet, welches die variablen Transportkosten für diese Platzierung der neuen Maschine angibt. Die Transportintensitäten i_{mn} geben die Summe der zwischen zwei Maschinen m und n zu transportierenden Mengeneinheiten an.

Unter Beachtung des Effektivitätsmaßes

$$\begin{aligned}E&=(i_{19}+i_{91})[|1-x|+|1-y|]+(i_{29}+i_{92})[|3-x|+|10-y|]\\&\quad+(i_{39}+i_{93})[|4-x|+|5-y|]+(i_{49}+i_{94})[|10-x|+|6-y|]\\&\quad+(i_{59}+i_{95})[|9-x|+|10-y|]+(i_{69}+i_{96})[|11-x|+|3-y|]\\&\quad+(i_{79}+i_{97})[|4-x|+|12-y|]+(i_{89}+i_{98})[|5-x|+|8-y|]\\&=5[|1-x|+|1-y|]+5[|3-x|+|10-y|]\\&\quad+8[|4-x|+|5-y|]+6[|10-x|+|6-y|]\\&\quad+6[|9-x|+|10-y|]+9[|11-x|+|3-y|]\\&\quad+8[|4-x|+|12-y|]+5[|5-x|+|8-y|]\end{aligned}$$

prüft man die Wahl jedes einzelnen der verfügbaren Standorte der neuen Maschine durch Einsetzen der entsprechenden Koordinatenwerte:

$$\begin{aligned}(x_9;y_9)\colon E&=5\cdot(4+6)+5\cdot(2+3)+8\cdot(1+2)+6\cdot(5+1)\\&\quad+6\cdot(4+3)+9\cdot(6+4)+8\cdot(1+5)+5\cdot(0+1)\\&=320,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x_{10};y_{10})\colon E&=5\cdot(7+7)+5\cdot(5+2)+8\cdot(4+3)+6\cdot(2+2)\\&\quad+6\cdot(1+2)+9\cdot(3+5)+8\cdot(4+4)+5\cdot(3+0)\\&=354,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x_{11};y_{11})\colon E&=5\cdot(6+5)+5\cdot(4+4)+8\cdot(3+1)+6\cdot(3+0)\\&\quad+6\cdot(2+4)+9\cdot(4+3)+8\cdot(3+6)+5\cdot(2+2)\\&=336,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x_{12};y_{12})\colon E&=5\cdot(7+11)+5\cdot(5+2)+8\cdot(4+7)+6\cdot(2+6)\\&\quad+6\cdot(1+2)+9\cdot(3+9)+8\cdot(4+0)+5\cdot(3+4)\\&=454,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x_{13};y_{13})\colon E&=5\cdot(8+3)+5\cdot(6+6)+8\cdot(5+1)+6\cdot(1+2)\\&\quad+6\cdot(0+6)+9\cdot(2+1)+8\cdot(5+8)+5\cdot(4+4)\\&=388.\end{aligned}$$

Folglich ist unter den gegebenen Prämissen der Standort $(x;y)=(x_9;y_9)=(5;7)$ für Maschine 9 am günstigsten, da für diesen das Effektivitätsmaß E den niedrigsten Wert von 320 annimmt.

Aufgabenvariante

Die gegebenen acht Maschinen seien wie in der Aufgabe vorgesehen auf den jeweiligen Standorten angeordnet. Für die neunte Maschine stehen die folgenden Standorte zur Wahl: $(x_9;y_9)=(15;14)$, $(x_{10};y_{10})=(7;10)$, $(x_{11};y_{11})=(10;15)$, $(x_{12};y_{12})=(12;8)$ und $(x_{13};y_{13})=(12;6)$. Die Transportintensitäten zu den neuen Standorten sind Tabelle 2.4.2 zu entnehmen.

Tabelle 2.4.2: Transportintensitäten für die Aufgabenvariante

Maschine m	1	2	3	4	5	6	7	8
i_{m9}	1	3	7	6	4	7	4	8
i_{9m}	10	8	1	10	2	2	10	2

Lösung zur Aufgabenvariante
Es ergibt sich unter der neuen Wertekonstellation, dass der optimale Standort für Maschine $m=9$ bei $(x;y)=(x_{10};x_{10})=(7;10)$ liegt. Das Effektivitätsmaß E dieses Standorts beträgt 606.

Aufgabe 2.2
Sechs existierende Maschinen sind bereits auf den Standorten

- $(x_1;y_1)=(2;2)$, $(x_2;y_2)=(3;10)$,
- $(x_3;y_3)=(4;5)$, $(x_4;y_4)=(10;6)$,
- $(x_5;y_5)=(10;10)$, $(x_6;y_6)=(11;3)$

platziert. Für eine neue Maschine 7 mit Transportintensitäten

- $i_{17}=i_{27}=i_{37}=i_{47}=i_{57}=i_{67}=2$,
- $i_{71}=i_{72}=1$, $i_{73}=3$,
- $i_{74}=5, i_{75}=6$ und $i_{76}=4$

zu den existierenden Maschinen stehen die Plätze

- $(x_7;y_7)=(6;4)$,
- $(x_8;y_8)=(8;8)$,
- $(x_9;y_9)=(5;7)$ und
- $(x_{10};y_{10})=(4;3)$

zur Auswahl. Ordnen Sie der neuen Maschine den unter dem Aspekt geringster Transportkosten optimalen der verfügbaren Standorte zu. Beachten Sie, dass zum Transport der Zwischenprodukte ein rechtwinkliges Wegenetz eingerichtet ist.

Lösung zu Aufgabe 2.2
Unter Beachtung des Effektivitätsmaßes

$$\begin{aligned}E=&(i_{17}+i_{71})[|2-x|+|2-y|]\\&+(i_{27}+i_{72})[|3-x|+|10-y|]\\&+(i_{37}+i_{73})[|4-x|+|5-y|]\\&+(i_{47}+i_{74})[|10-x|+|6-y|]\\&+(i_{57}+i_{75})[|10-x|+|10-y|]\\&+(i_{67}+i_{76})[|11-x|+|3-y|]\\=&3[|2-x|+|2-y|]\\&+3[|3-x|+|10-y|]\\&+5[|4-x|+|5-y|]\\&+7[|10-x|+|6-y|]\\&+8[|10-x|+|10-y|]\\&+6[|11-x|+|3-y|]\end{aligned}$$

prüft man die Wahl eines der verfügbaren Standorte der neuen Maschine durch Einsetzen der entsprechenden Koordinatenwerte.

$$\begin{aligned}(x_7;y_7):\ E=&3\cdot(4+2)+3\cdot(3+6)+5\cdot(2+1)+7\cdot(4+2)\\&+8\cdot(4+6)+6\cdot(5+1)\\=&218,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x_8;y_8):\ E=&3\cdot(6+6)+3\cdot(5+2)+5\cdot(4+3)+7\cdot(2+2)\\&+8\cdot(2+2)+6\cdot(3+5)\\=&200,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x_9;y_9):\ E=&3\cdot(3+5)+3\cdot(2+3)+5\cdot(1+2)+7\cdot(5+1)\\&+8\cdot(5+3)+6\cdot(6+4)\\=&220,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x_{10};y_{10}):\ E=&3\cdot(2+1)+3\cdot(1+7)+5\cdot(0+2)+7\cdot(6+3)\\&+8\cdot(6+7)+6\cdot(7+0)\\=&252.\end{aligned}$$

Der unter den Prämissen günstigste Standort für Maschine 7 ist somit $(x;y)=(x_8;y_8)=(8;8)$, da für diesen E den niedrigsten Wert annimmt.

Aufgabenvariante

Sechs existierende Maschinen $m=1,2,3,4,5,6$ sind auf den Standorten

- $(x_1;y_1)=(4;4)$, $(x_2;y_2)=(4;10)$,
- $(x_3;y_3)=(6;5)$, $(x_4;y_4)=(10;5)$,
- $(x_5;y_5)=(10;9)$, $(x_6;y_6)=(12;3)$

platziert. Für eine neue Maschine 7 mit Transportintensitäten

- $i_{17}=i_{27}=i_{37}=i_{47}=i_{57}=i_{67}=1$,

- $i_{71}=i_{72}=3$, $i_{73}=1$,
- $i_{74}=2, i_{75}=4$ und $i_{76}=5$

zu den existierenden Maschinen stehen die Plätze

- $(x_7; y_7)=(4;6)$,
- $(x_8; y_8)=(8;8)$,
- $(x_9; y_9)=(8;5)$,
- $(x_{10}; y_{10})=(10;3)$

zur Auswahl. Ordnen Sie der neuen Maschine den unter dem Aspekt geringster Transportkosten optimalen der verfügbaren Standorte zu, wenn ein rechtwinkliges Wegenetz eingerichtet ist.

Lösung zur Aufgabenvariante
Der unter den Prämissen günstigste Standort für Maschine 7 ist $(x; y)=(x_9; y_9)=(8;5)$.