

# Inhaltsverzeichnis

<b>0</b>	<b>Einführung</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Zufallsvorgänge und Wahrscheinlichkeiten</b>	<b>5</b>
1.1	Zufallsvorgänge . . . . .	5
1.1.1	Ergebnismengen . . . . .	6
1.1.2	Ereignisse und ihre Verknüpfung . . . . .	7
1.2	Wahrscheinlichkeiten . . . . .	13
1.2.1	Formale Definition der Wahrscheinlichkeit . . . . .	14
1.2.2	Laplace-Experimente . . . . .	17
1.2.3	Anordnung und Auswahl von Objekten (Kombinatorik)	18
1.3	Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit . . . . .	24
1.3.1	Bedingte Wahrscheinlichkeit . . . . .	24
1.3.2	Rechenregeln . . . . .	25
1.3.3	Totale Wahrscheinlichkeit und Formel von Bayes . . . . .	27
1.3.4	Unabhängigkeit von Ereignissen . . . . .	31
1.4	Ergänzungen . . . . .	36
1.4.1	Allgemeiner Additions- und Multiplikationssatz für Wahrscheinlichkeiten . . . . .	36
1.4.2	Subjektive Wahrscheinlichkeit und Wettbegriff . . . . .	38
1.4.3	Praktische Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten . . . . .	39

---

<b>2</b>	<b>Zufallsvariable und Verteilungen</b>	<b>41</b>
2.1	Grundbegriffe . . . . .	42
2.1.1	Verteilungsfunktion . . . . .	44
2.1.2	Quantilfunktion . . . . .	47
2.1.3	Diskrete Zufallsvariable . . . . .	51
2.1.4	Stetige Zufallsvariable . . . . .	53
2.1.5	Affin-lineare Transformation von Zufallsvariablen . . .	58
2.1.6	Unimodalität . . . . .	60
2.1.7	Symmetrie . . . . .	62
2.2	Verteilungsparameter . . . . .	63
2.2.1	Erwartungswert . . . . .	63
2.2.2	Varianz . . . . .	67
2.2.3	Ungleichung von Tschebyscheff . . . . .	70
2.2.4	Schiefe und Wölbung . . . . .	72
2.3	Spezielle diskrete Verteilungen . . . . .	75
2.3.1	Binomialverteilung . . . . .	76
2.3.2	Poisson-Verteilung . . . . .	79
2.3.3	Geometrische Verteilung . . . . .	82
2.3.4	Hypergeometrische Verteilung . . . . .	86
2.4	Spezielle stetige Verteilungen . . . . .	89
2.4.1	Rechteckverteilung . . . . .	90
2.4.2	Exponentialverteilung . . . . .	94
2.4.3	Pareto-Verteilung . . . . .	99
2.4.4	Normalverteilung . . . . .	102
2.4.5	Lognormalverteilung . . . . .	111
2.4.6	Übersicht über einige spezielle Verteilungen . . . . .	114
2.5	Ergänzungen . . . . .	116
2.5.1	Borel-Mengen, Verteilung einer Zufallsvariablen . . . .	116
2.5.2	Erwartungswert einer Wette als subjektive Wahrscheinlichkeit . . . . .	116
2.6	Anhang: Verwendung von Excel/Calc und SPSS . . . . .	118

---

<b>3</b>	<b>Gemeinsame Verteilung und Grenzwertsätze</b>	<b>125</b>
3.1	Gemeinsame Verteilung von Zufallsvariablen . . . . .	126
3.1.1	Gemeinsame Verteilung von zwei Zufallsvariablen . . . . .	126
3.1.2	Gemeinsame Verteilung von $n$ Zufallsvariablen . . . . .	143
3.1.3	Summen von unabhängigen Binomial-, Poisson- und Gauß-Variablen . . . . .	149
3.2	Grenzwertsätze . . . . .	152
3.2.1	Schwaches Gesetz der großen Zahlen . . . . .	153
3.2.2	Wahrscheinlichkeit und relative Häufigkeit . . . . .	155
3.2.3	Konvergenz der empirischen Verteilungsfunktion . . . . .	156
3.2.4	Zentraler Grenzwertsatz . . . . .	158
3.3	Ergänzungen . . . . .	164
3.3.1	Multivariate Normalverteilung . . . . .	164
3.3.2	Poisson-Prozess . . . . .	166
3.3.3	Monte-Carlo-Simulation . . . . .	170
<b>4</b>	<b>Stichproben und Stichprobenfunktionen</b>	<b>173</b>
4.1	Zufallsstichproben und statistisches Schließen . . . . .	174
4.1.1	Zufallsstichproben . . . . .	174
4.1.2	Statistisches Schließen . . . . .	177
4.1.3	Stichproben aus endlichen Grundgesamtheiten . . . . .	180
4.2	Stichprobenfunktionen (Statistiken) . . . . .	182
4.3	Statistiken bei normalverteilter Stichprobe . . . . .	183
4.3.1	Chi-Quadrat-Verteilung . . . . .	184
4.3.2	$t$ -Verteilung . . . . .	185
4.3.3	$F$ -Verteilung . . . . .	187
4.4	Ergänzungen . . . . .	189
4.4.1	Verwendung von Zufallszahlen . . . . .	189
4.4.2	Weitere Verfahren der Stichprobenauswahl . . . . .	189
4.5	Anhang: Verwendung von Excel/Calc und SPSS . . . . .	192

<b>5</b>	<b>Schätzverfahren für Parameter</b>	<b>195</b>
5.1	Punktschätzung . . . . .	195
5.1.1	Unverzerrtheit und Konsistenz . . . . .	197
5.1.2	Schätzung von Erwartungswerten . . . . .	198
5.1.3	Schätzung von Wahrscheinlichkeiten und Anteilswerten	199
5.1.4	Schätzung von Varianzen und Standardabweichungen	201
5.1.5	Schätzung von Quantilen . . . . .	203
5.1.6	Schätzung von Korrelationskoeffizienten . . . . .	203
5.2	Konstruktionsprinzipien für Punktschätzer . . . . .	204
5.2.1	Momentenschätzer . . . . .	204
5.2.2	Maximum-Likelihood-Schätzer . . . . .	206
5.2.3	ML-Schätzer bei speziellen Verteilungen . . . . .	208
5.2.4	Eigenschaften von ML- und Momentenschätzern . . .	211
5.3	Intervallschätzung . . . . .	212
5.3.1	Konfidenzintervalle . . . . .	213
5.3.2	Intervall für $\mu$ einer Normalverteilung, $\sigma^2$ bekannt . .	214
5.3.3	Intervall für $\mu$ einer beliebigen Verteilung, $\sigma^2$ bekannt	215
5.3.4	Intervall für $\mu$ einer Normalverteilung, $\sigma^2$ unbekannt .	217
5.3.5	Intervall für $\mu$ einer beliebigen Verteilung, $\sigma^2$ unbekannt	218
5.3.6	Intervall für $\sigma^2$ einer Normalverteilung . . . . .	218
5.3.7	Intervall für eine Wahrscheinlichkeit oder einen Anteilswert . . . . .	219
5.3.8	Wahl des Stichprobenumfangs . . . . .	221
5.3.9	Intervall für $\rho$ bei Normalverteilung . . . . .	224
5.4	Beispiel: Schätzung bei Aktienrenditen . . . . .	224
5.5	Ergänzungen . . . . .	228
5.5.1	Beste lineare Schätzung eines Erwartungswerts . . . . .	228
5.5.2	Effizienz von Punktschätzern . . . . .	230
5.5.3	Robuste Schätzung . . . . .	230
5.5.4	Bayes-Schätzer . . . . .	231
5.6	Anhang: Verwendung von Excel/Calc und SPSS . . . . .	234

---

<b>6</b>	<b>Hypothesentests</b>	<b>237</b>
6.1	Grundbegriffe . . . . .	238
6.2	Tests für Erwartungswerte . . . . .	243
6.2.1	Tests für einen Erwartungswert . . . . .	244
6.2.2	Vergleich zweier Erwartungswerte . . . . .	252
6.2.3	Vergleich von Erwartungswerten bei verbundener Stich- probe . . . . .	257
6.3	Tests für Varianzen . . . . .	261
6.3.1	Tests für eine Varianz . . . . .	261
6.3.2	Vergleich zweier Varianzen . . . . .	262
6.4	Tests für Wahrscheinlichkeiten und Anteilswerte . . . . .	265
6.4.1	Tests für eine Wahrscheinlichkeit . . . . .	266
6.4.2	Vergleich zweier Wahrscheinlichkeiten . . . . .	267
6.5	Anpassungs- und Unabhängigkeitstests . . . . .	269
6.5.1	$\chi^2$ -Statistik . . . . .	270
6.5.2	$\chi^2$ -Anpassungstests . . . . .	271
6.5.3	$\chi^2$ -Unabhängigkeitstests . . . . .	275
6.6	Ergänzungen . . . . .	281
6.6.1	Vergleich mehrerer Erwartungswerte (einfache Varianz- analyse) . . . . .	281
6.6.2	Vergleich mehrerer Varianzen . . . . .	283
6.6.3	Vergleich mehrerer Wahrscheinlichkeiten . . . . .	285
6.7	Anhang: Verwendung von Excel/Calc und SPSS . . . . .	287
<b>7</b>	<b>Lineare Regression</b>	<b>291</b>
7.1	Lineare Einfachregression . . . . .	291
7.1.1	Das Modell der linearen Einfachregression . . . . .	292
7.1.2	Punktschätzung der Koeffizienten . . . . .	294
7.2	Intervallschätzung und Tests . . . . .	299
7.2.1	Intervallschätzung der Parameter . . . . .	300

7.2.2	Tests für die Parameter . . . . .	301
7.3	Prognose bei Einfachregression . . . . .	304
7.4	Lineare Mehrfachregression . . . . .	306
7.5	Ergänzungen . . . . .	310
7.5.1	ML-Schätzung einer linearen Einfachregression . . . . .	310
7.5.2	Eigenschaften der Schätzer . . . . .	311
7.5.3	Lineare Mehrfachregression in Matrizendarstellung . . . . .	313
7.6	Anhang: Verwendung von Excel/Calc und SPSS . . . . .	316
	<b>Tabellenanhang</b>	<b>319</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>337</b>
	<b>Index</b>	<b>343</b>