Vorwort

Mit diesem Buch wollen die Autoren den Studierenden in den Masterstudiengängen für Mathematik, Natur- und Ingenieurwissenschaften ein solides mathematisches Wissen zur Theorie und Numerik dynamischer Systeme vermitteln. Viele Prozesse in Physik, Chemie, Biologie, Medizin und in den Ingenieur- und Wirtschaftswissenschaften werden durch parameterabhängige nichtlineare Differenzialgleichungen beschrieben. Deshalb sind Differenzialgleichungen und dynamische Systeme als zentrale Gebiete der Mathematik auch weiterhin in ständiger Entwicklung begriffen. Die Idee zu diesem Buch entstand aus unserer langjährigen Vorlesungstätigkeit für Studierende der Mathematik, der Technischen Physik, des Maschinenbaus, der Elektrotechnik und der Informatik, sowie auf der Basis unserer wissenschaftlichen Kooperation mit Ingenieuren an der TU Ilmenau.

An die aktuelle Mathematik in den Natur- und Ingenieurwissenschaften werden Fragen von großer Komplexität gestellt, die nur durch das Ineinandergreifen sehr unterschiedlicher Gebiete erfolgreich in Angriff genommen werden können. Dies führt in wachsendem Maße zum Zusammenführen von reiner und angewandter Mathematik. Diese Entwicklungstendenzen werden sich auch auf Grund des Auftretens neuer Ideen und Methoden in Zukunft fortsetzen. Wir halten es deshalb für unabdingbar, wesentliche Begriffe und Denkweisen der Funktionalanalysis einerseits und der Numerischen Analysis andererseits einzuführen, um den Einsatz moderner mathematischer Verfahren des Wissenschaftlichen Rechnens zu unterstützen.

In der Stoffauswahl und -anordnung haben wir auf ausführliche Motivation und Erläuterung der Grundideen, auf leichte Fasslichkeit, Anschaulichkeit und Übersichtlichkeit Wert gelegt. Der mit der Thematik bereits vertraute Leser möge Verständnis aufbringen, wenn an geeigneter Stelle ihm bekannte Grundbegriffe und -aussagen definiert werden. Damit wollen wir erreichen, dass das mühevolle Zusammensuchen von Begriffen und Aussagen weitgehend entfällt und für alle Leser des Buches gleiche Bedingungen geboten werden, um den Einstieg in das umfangreiche Gebiet zu erleichtern. Wo es die Stoffauswahl zulässt, wird auch ein Praxisbezug hergestellt. Wir werden allerdings nicht in jedem Kapitel erläutern, wofür ein mathematischer Begriff oder Sachverhalt „nützlich“ ist, denn erst das Zusammenspiel der verschiedenen Begriffsbildungen und der daraus resultierenden Sätze führt zu sinnvollen Anwendungen. Von der Behandlung chaotischer Lösungen und Attraktoren fraktaler Dimension mussten wir in Anbetracht des Buchumfanges Abstand nehmen, zumal sich das erforderliche mathematische Instrumentarium teilweise stark vom übrigen Buch unterscheidet und deshalb gesondert vorgestellt werden soll.

Das Buch ist so aufgebaut, dass zunächst im *ersten Kapitel* einige Grundtatsachen aus dem Gebiet der Funktionalanalysis aufgeschrieben sind. Die gesamte moderne Analysis basiert heute auf der Funktionalanalysis. Sie stellt als elegante mathematische Theorie allgemeine Hilfsmittel bereit, um mathematische Aufgabenstellungen, wie gewöhnliche und partielle Differenzialgleichungen, Integralgleichungen und Extremalprobleme in übersichtlicher und einheitlicher Weise zu lösen. Gemeinsame Merkmale, die bei der Lösung dieser Aufgabenstellungen auftreten, werden auf allgemein gültige Prinzipien zurückgeführt. Darüber hinaus kann man die Struktur und Konvergenz von Näherungsverfahren in einheitlicher Weise untersuchen. Der Mehraufwand zur Einarbeitung in dieses Kapitel wird dadurch abgegolten, dass scheinbar sehr unterschiedliche Aufgabenstellungen, wie sie in der Praxis auftreten, mit Hilfe der gleichen abstrakten mathematischen Methode gelöst werden können.

Das *zweite Kapitel* beschäftigt sich weniger mit Methoden der Berechnung der Lösungen von Differenzialgleichungen, sondern mehr mit strukturellen und qualitativen Aussagen. Wir haben dieser Sichtweise den Vorzug gegenüber der traditionellen, an Lösungstechniken und der linearen Theorie ausgerichteten Betrachtungsweise gegeben. Dieser Aspekt erscheint wichtig, um numerische und grafische Lösungsapproximationen beurteilen zu können.

Im *Kapitel 3* wird der Leser an den Begriff der Lösungsbifurkation bei Differenzialgleichungen behutsam herangeführt. Dieser Abschnitt beschreibt die ersten Schritte in Richtung einer zeitgemäßen Fortführung der elementaren Theorie autonomer Systeme. Es werden die drei Grundtypen Sattel-Knoten-Bifurkation, transkritische Bifurkation und die Pitchfork-Bifurkation behandelt. Den Abschluss bilden die Resultate über die Verzweigung von Ruhelagen und geschlossenen Orbits (Hopf-Bifurkation).

Das *Kapitel 4* über analytische Bifurkationstheorie kann als Brücke zwischen der elementaren Theorie gewöhnlicher Differenzialgleichungen und den Anfängen der so genannten nichtlinearen Dynamik verstanden werden. Neben verschiedenen Themen der klassischen statischen Bifurkationstheorie haben wir auf unterschiedlichem mathematischen Niveau einige grundlegende Probleme der modernen dynamischen Verzweigungstheorie vorgestellt, die in den üblichen Büchern über Differenzialgleichungen in dieser Form nicht behandelt werden. Die Gewinnung der Aussagen in diesem Abschnitt erfolgt wieder vorwiegend auf der Basis der in Kapitel 1 dargelegten Funktionalanalysis.

Die Numerik nimmt – beginnend mit *Kapitel 5* – bei der Entwicklung und Analyse leistungsfähiger Näherungsverfahren einen relativ großen Umfang ein. Wegen der Nichtlinearität der mathematischen Modelle können dynamische Systeme aus der Praxis ohne leistungsfähige numerische Verfahren zukünftig nicht erfolgreich analysiert werden. Deshalb sind Naturwissenschaftler und Ingenieure auf effiziente Algorithmen und Computer bei der Erforschung der Modelle ihres Fachgebietes angewiesen. Für umfangreiche Computersimulationen realer Prozesse werden schnelle und zuverlässige numerische Verfahren benötigt, deren grundlegendes Verständnis und Einordnung in zunehmendem Maße Bestandteil der mathematischen Ausbildung werden sollte. Das Wissenschaftliche Rechnen (Scientific Computing) in Mathematik, Natur- und Ingenieurwissenschaften nutzt effiziente analytische und numerische Verfahren besonders für nichtlineare und großdimensionale Probleme. Deshalb werden in den *Kapiteln 5 und 6* aktuelle Näherungsverfahren zur Lösungsverfolgung von Gleichgewichtslagen und periodischen Schwingungen einschließlich ihrer programmierbaren Algorithmen vorgestellt und beispielhaft durch die Verzweigungsanalyse eines 9-dimensionalen Modells aus der Ingenieurspraxis illustriert.

Das *Kapitel 7* ist quasi-periodischen Bewegungen mit mehreren Basisfrequenzen gewidmet. Diese multifrequentiellen Schwingungen treten insbesondere bei gekoppelten DGL-Systemen, z.B. in elektrischen Dreiphasen-Systemen der Energietechnik auf und bilden ein kompliziertes und sensitives Studienobjekt. Invariante Tori als Träger dieser quasi-periodischen Bewegungen können jedoch durch die vorgestellten aktuellen numerischen Zugänge (Finite-Differenzen-Verfahren, Fourier-Galerkin-Verfahren) als Lösung der sie beschreibenden partiellen Differenzialgleichungen approximiert und untersucht werden. Konkrete Anwendungen demonstrieren den erfolgreichen Einsatz dieser Verfahren.

Die Darstellung des Stoffes ist weit davon entfernt, eine bloße Sammlung von „Kochrezepten“ zu sein. Gerade die mathematisch strenge Herleitung zentraler Ideen und durchgehend präzise Formulierungen und Darstellungen fördern entscheidend Verständnis und Durchblick und geben so erst die gewünschte Sicherheit bei den Anwendungen. Falls uns ein vollständiger Beweis nicht ratsam erschien, wird in der Regel ein Literaturverweis angegeben. Unseren Beitrag sehen wir darin, durch Klarheit, Transparenz und Konzentration auf das Wesentliche, den Leser auch an die moderneren Inhalte der Mathematik heranzuführen. Es ist uns ein Anliegen zu demonstrieren, dass die Mathematik nicht nur Eleganz und innere Schönheit besitzt, sondern auch effektive Methoden zur Lösung konkreter Fragestellungen zur Verfügung stellt. Wir wollen uns bemühen, mit diesem Buch ein solides Fundament zu legen, das dem Leser später auch bei weitergehender Beschäftigung mit Mathematik und deren Anwendung zu gute kommt.

Schließlich möchten wir die Aufmerksamkeit auch auf die Übungsaufgaben richten, die am Schluß eines jeden Kapitels zu finden sind. Die Beschäftigung mit diesen Aufgaben ist eine wichtige Voraussetzung für ein vertiefendes Verständnis des Stoffes. Die Darstellung der numerischen Verfahren als Algorithmen im Pseudocode bietet Musterlösungen für eigene Verfahrensentwicklungen der Leser und soll zu einer kritischen Bewertung der Näherungsverfahren anleiten. Sämtliche mit dem Computer gerechneten Anwendungsbeispiele benutzen automatisch die im wissenschaftlichen Bereich international übliche Notation von Gleitpunktzahlen mittels des Dezimalpunktes. Wir haben uns entschlossen, die Dezimalpunkt-Darstellung durchgehend zu verwenden, zumal damit die Lesbarkeit von Zahlenfolgen und -vektoren verbessert wird. Für sehr häufig wiederkehrende mathematische Begriffe wie „Differenzialgleichung“ werden allgemein übliche Abkürzungen wie „DGL“ an entsprechender Stelle eingeführt und undekliniert im gesamten Text benutzt.

Zwar ist das Buch primär an Studenten im Master-Studium der Mathematik, der Natur- und Ingenieurwissenschaften und Informatik gerichtet, kann aber auch von Doktoranden mit Gewinn genutzt werden. Auch Forschungsingenieuren und Anwendern dürfte das Buch neue Elemente der Mathematik bieten. Die vorgestellten Anwendungen wurden größtenteils mit Computerprogrammen gerechnet, die von Studierenden und Doktoranden gemeinsam mit den Autoren an der TU Ilmenau entwickelt wurden. Deshalb gilt unser Dank Frau Dr. K. Bernet und den Herren Dr. F. Schilder, Dr. S. Schreiber, Dr. D. Peterseim und Dipl.-Math. M. Ernst, die mit ihrer zeitaufwändigen Leistung zum Gelingen des Buches beigetragen haben.
Als jederzeit kompetente und freundlich nachsichtige Ansprechpartner standen uns seitens des Spektrum-Verlages Herr Dr. Andreas Rüdinger und Frau Sabine Bartels stets hilfreich zur Seite. Die Autoren danken ihnen insbesondere für die wertvolle Unterstützung während der gesamten Fertigstellung des Buches.

Ilmenau, im September 2010

Bernd Marx
Werner Vogt