

**Vorwort** ..... V

Dieses Buch bietet eine fotografisch-mathematische Reise in das Reich der Natur mit ihren Phänomenen und den faszinierenden Resultaten der Evolution. Selbst ohne höhere Mathematik, aber mit geschärftem mathematischem Hausverstand und einem fantasievollen Herangehen an die Dinge kann man viele Dinge, die zunächst „einfach nur da sind“, besser verstehen und u. U. Schlüsse daraus ziehen. Den Einleitungstext zu den Kapiteln finden Sie hier im Inhaltsverzeichnis. Das Bild links stellt Zellstrukturen in einem Blatt dar, die man mathematisch gut modellieren kann.

Die positive Spirale ..... VI    Mathematik und Naturfotografie ..... VIII

**1 Das Wechselspiel mit der Mathematik** ..... 1

Mathematik ist mehr als nur „Rechnen“. Sie ist ein vom Menschen künstlich geschaffenes Konstrukt mit strengen Regeln, in der es nur „Schwarz oder Weiß“ bzw. „wahr oder falsch“ gibt. Die Natur scheint da ganz anders zu sein, und dennoch hat die Mathematik wie keine andere Wissenschaft die Fähigkeit, natürliche Prozesse zu modellieren und dabei zu tieferen Einsichten in diese Prozesse zu gelangen. Das Titelbild zeigt eine stehende Welle beim Abfluss eines Teichs. Sogar die Interferenzen der Wellen änderten sich dabei kaum, das Bild war „wiederholbar“ und könnte bei bekannten Parametern vom Computer „nachvollzogen“ werden.

Zebrastreifen und Zahlencodes ..... 2    Das Schildkröten-Paradoxon ..... 8    Seerosen-Vermehrung ..... 14  
 Wie aus der Zahl ein Zebra wird ..... 4    Herauslesen aus Fotos ..... 10  
 Die Henne und das Ei ..... 6    Wiederholbarkeit von Versuchen ..... 12

**2 Der mathematische Blick** ..... 17

Die womöglich Jahrtausende alte Felszeichnung wurde von den San (Ureinwohner des südlichen Afrikas) angefertigt und illustriert eine Jagd mit Pfeil und Bogen. Die beim Pfeilflug auftretenden Wurfparabeln wurden (und werden) von den San mit unglaublicher Präzision einkalkuliert, ohne jemals eine Berechnung durchgeführt zu haben. In diesem Kapitel sollen exemplarisch Themen angeschnitten werden, bei denen sich ein Mathematiker vielleicht mehr denkt als ein Nicht-Mathematiker. So geht es z. B. um vermeintliche, aber auch erklärbare Ähnlichkeiten.

Verblüffend ähnlich ..... 18    Zonen mit lauter Rauten ..... 26    Verschiedene Skalen ..... 34  
 Assoziationen ..... 20    Netze mit windschiefen Rauten ..... 28    Die Kepler'sche Fassregel ..... 36  
 Nicht nur zufällig ähnlich ..... 22    Schiefe Parallelprojektionen ..... 30  
 Iterative Formfindung ..... 24    Fibonacci und Wachstum ..... 32

### 3 Räumliches Sehen ..... 39

In der Nahaufnahme eines hübschen Schmetterlings sind dunkle Punkte in den Komplexaugen zu sehen (Pseudopupillen), die von den Kristallprismen, die in jeder Facette eingebaut sind, erzeugt werden. Das Tier sieht auf kurze Distanzen ausgezeichnet dreidimensional. Warum das so ist, wie Stereo-Sehen und Vergleichbares funktioniert, aber auch sonst einige Regeln über perspektivisches und dreidimensionales Erfassen sind Thema dieses Kapitels. Man erkennt auch, dass wir recht leicht optisch verwirrt werden können, wenn gewisse Bedingungen erfüllt sind.

Tiefenwahrnehmung .....	40	Phänomen Linsenaug	46	Natürlicher Eindruck beim Foto .....	52
Phänomen Komplexauge .....	42	Zielgenauigkeit durch Antennen .....	48	Quader oder Pyramidenstumpf? .....	54
Entfernungstabellen .....	44	Im Schnitt der Sehstrahlen .....	50	Impossibles .....	56

### 4 Astronomisches Sehen ..... 59

Der Blick ins Weltall war immer schon ein menschlicher Traum. Wir müssen uns hier auf unsere Sonne, unseren Mond und das eine oder andere markante Sternbild begrenzen. Viele Phänomene, die mit den Gestirnen zusammenhängen, erwecken das Interesse des Mathematikers. Ein recht einfacher geometrischer Satz über den rechten Winkel gibt uns z. B. Auskunft über durchaus nicht-triviale Fragen zum exakten Frühlingsbeginn bzw. der vermeintlich falschen Mondneigung. Letztere ist auch in dem abgebildeten mittelalterlichen Fresco der St. Laurentzkirche in Požega (Kroatien) „verewigt“.

Phänomen Sonnenuntergang .....	60	Der Skarabäus und die Sonne .....	68	Die Sonne im Zenit .....	76
Phänomen Sonnenfinsternis .....	62	Satz vom rechten Winkel .....	70	Der südliche Sternenhimmel .....	78
Wenn die Sonne tief steht .....	64	Wann beginnt der Frühling? .....	72		
Fata Morgana .....	66	Die „falsche“ Mondneigung .....	74		

### 5 Schraubung und Spiraltung ..... 81

Noch bevor wir verschiedene Typen von Kurven und Flächen betrachten, wollen wir die Schraubung und Spiraltung unter die Lupe nehmen. Erstere spielt in vielen technischen Anwendungen eine zentrale Rolle (als Symbol dafür ist ein Schraubengewinde samt Schraubenmutter abgebildet). Die Spiraltung ist in der Kunst, vor allem aber in der Natur omnipräsent und besonders schön bei Schneckenhäusern, Muscheln (Foto links) und Tierhörnern manifestiert. Hier spielen exponentielles oder lineares Wachstum und Rotation zusammen.

Wendelflächen .....	82	Faszination Spirale .....	86	Helispiralen .....	90
Schub oder Hub? .....	84	Durch Spiegelung zum König .....	88		

## 6 Spezielle Kurven ..... 93

Kurven wie z. B. die Kettenlinie können in einer Ebene liegen oder auch „echte Raumkurven“ sein, wie der abgebildete Trieb einer Kletterpflanze – ganz untypisch für unsere Vorstellung von Pflanzen – durch Drehen und Wippen versucht, ihre räumliche Umgebung zu erfassen und irgendwo Halt zu finden. Die Kegelschnitte sind zu Recht die berühmtesten Kurven: Sie finden sich in der Natur zuhauf (die Bahnen der Planeten sind Ellipsen, die Wurfbahnen von Objekten sind Parabeln, Schatten und perspektivische Bilder von Kreisen sind oft Hyperbeln).

Die Kettenlinie .....	94	Faszination Parabel .....	98	Umriss-Spitzen .....	102
Invarianz bei Zentralprojektion .....	96	Knoten .....	100	Geodätische Geschenke .....	104

## 7 Besondere Flächen ..... 107

Noch viel größer als die Vielfalt der Kurven ist jene der gekrümmten Flächen. Die Kugel übt wegen ihrer unendlichfachen Symmetrie große Faszination auf uns aus. Ihre Oberfläche ist doppelt gekrümmt und damit nicht ohne Dehnungen und Stauchungen in die Ebene auszubreiten. Jene Flächenteile, welche bei der abgebildeten Lampe in Summe eine Kugel annähern, entstehen durch Verbiegen von ebenen rautenförmigen Streifen und sind damit nur einfach gekrümmt. Oberflächen, die sich in einem Spannungsgleichgewicht befinden, sind (doppelt gekrümmte) Minimalflächen.

Faszination Kugel .....	108	Biigsam und vielseitig .....	114	Minimierte Oberflächenspannung ....	120
Der Umriss einer Kugel .....	110	Aufwicklungen .....	116	Minimalflächen .....	122
Krumme Flächen annähern .....	112	Stabil und einfach zu bauen .....	118	Seifenblasen .....	124

## 8 Spiegelung und Brechung ..... 127

Spiegelung und Brechung gehören eng zusammen: Wenn z. B. die Sonne an der Wasseroberfläche reflektiert, gelangt – je nach Einfallswinkel – ein Teil des Lichts in das Wasser. Die Umkehrung ist nicht mehr so selbstverständlich: Flach von unten auf die Wasseroberfläche treffendes Licht wird zur Gänze reflektiert. Der winzige Gecko auf der Glasscheibe erscheint doppelt reflektiert: einmal an der Oberseite der Scheibe, das andere Mal auf der Rückseite. Die dazwischen stattgefunden doppelte Brechung an der Vorderseite „hebt sich auf“.

Kugel-Spiegelung .....	128	Das optische Prisma .....	140	Fischaugenperspektive .....	152
Spiegelsymmetrie .....	130	Die Theorie zum Regenbogen .....	142	Die Bildanhebung .....	154
Spiegelung .....	132	Am Fuß des Regenbogens .....	144	Totalreflexion und Bildanhebung .....	156
Das Pentaprisma .....	134	Über den Wolken .....	146	Einmal Fischauge und zurück! .....	158
Der Billard - Effekt .....	136	Spektralfarben unter Wasser .....	148		
Schalldämmende Pyramiden .....	138	Farbpigmente oder Schillerfarben? ..	150		

## 9 Verteilungsprobleme ..... 161

Sehr oft tritt das Problem auf, möglichst viele Elemente auf möglichst kleinem Raum sinnvoll so zu verteilen. Die jungen Nilkrokodile am Bild sollen symbolisch dieses Problem veranschaulichen. Da ist etwa die vermeintlich einfache Frage, wie man eine vorgegebene Anzahl von Punkten auf einer Kugel verteilt. In der Natur will z. B. ein Seeigel seine Stacheln optimal auf seiner Kalkhülle verteilen. Hier gibt es mathematisch-physikalische Algorithmen, die das Problem durch Simulation von Abstoßung der einzelnen Teilchen hervorragend bewältigen.

Gleichverteilung auf Flächen .....	162	Stachelige Gleichverteilung .....	170	Artefakte am Bildschirm .....	178
Tautropfenverteilung .....	164	Oberflächen unter Zugzwang .....	172	Gewichtsschwankungen .....	180
Berührungsprobleme .....	166	Nicht ungefährlich .....	174		
Eine platonische Lösung .....	168	Druckverteilung .....	176		

## 10 Einfache physikalische Phänomene ..... 183

Mathematik und Physik haben in vielen Teilen Überlappungen. Die Fragen, auf welchem Anlauf ein Schispringer zum besten Sprung ansetzt oder wie weit sich ein Motorrad in die Kurve legen muss, gehören zweifellos in so eine Nische. Schon deutlich physikalischer ist die Frage, warum Tiere wie die abgebildeten Enten oder aber Flugzeuge fliegen können oder welche Wellenformationen bei bewegten Erregerquellen entstehen.

Die Newton'schen Axiome .....	184	Das aerodynamische Paradoxon .....	192	Interferenzen .....	200
Rückstoß und Saugwirkung .....	186	Der schnellste Weg .....	194	Doppler-Effekt und Mach-Kegel .....	202
Selektive Farbauslöschung .....	188	Extreme Kurvenlage .....	196	Schallwellen auf seltsamen Wegen .....	204
Relativgeschwindigkeiten .....	190	Mathematisches über Bienen .....	198		

## 11 Zellenanordnungen ..... 207

Wenn ein Mathematiker die Anordnung der Schuppen auf einem Reptil wie dem abgebildeten jungen Nilkrokodil betrachtet, assoziiert er damit sofort sogenannte Voronoi-Diagramme. Inwieweit hier ein Zusammenhang besteht und ob womöglich auch das Stützgerüst in Libellenflügeln oder Blättern von Grönpflanzen oder gar die Risse in trocknendem Schlamm solche Strukturen enthalten, sind Themen dieses Kapitels, ebenso warum man auf Gänseblümchen, Sonnenblumen oder Pinienzapfen Spiralen zu erkennen glaubt.

Vermehrung der Gänseblümchen .....	208	Voronoi-Diagramme .....	214	Fraktale Kugelpackungen .....	220
Spiralen oder keine Spiralen? .....	210	Iterierte Voronoi-Strukturen .....	216		
Berechnende Rotation .....	212	Wickelkurven .....	218		

## 12 Wie im Kleinen, so nicht im Großen ..... 223

Dieses Kapitel widmet sich der spannenden Frage, warum Dinge, die man im Großen beobachtet, in der Welt der Kleinstlebewesen ganz anders sind (die beiden Fotos eines Elefanten und einer Ameise sind stellvertretend dafür zu sehen). So scheint bei den Insekten die Schwerkraft kaum eine Rolle zu spielen, die Tiere scheinen verhältnismäßig viel mehr Kraft zu besitzen und können fast alle fliegen. Dafür gibt es eine ganz einleuchtende mathematische Erklärung: Bei ähnlichen Objekten ist das Verhältnis von Oberfläche zu Volumen von der absoluten Größe abhängig.

Zehnerpotenzen im Tierreich .....	224	Riesige Elefantenohren .....	234	Fluide .....	244
150 Millionen Jahre unverändert .....	226	Schwimmende Münzen .....	236	Bruchteile einer Millisekunde .....	246
Legendäre Kraft .....	228	Modell und Realität .....	238	Biegsame Strohhalme .....	248
Wo bleibt die Erdanziehung? .....	230	Skalenunabhängige Schärfentiefe .....	240		
Fäden aus Eiweiß .....	232	Einfach wegblenden .....	242		

## 13 Baumstrukturen und Fraktale ..... 251

Verästelungen wie bei Bäumen (im Bild eine Schirmakazie) und Flüssen treten auch bei kleinen Gebilden wie Korallen oder Wurzeln kleiner Pflanzen auf. Oft ist die Auflösung eines klaren Umrisses so weit fortgeschritten, dass wir von einem Fraktal sprechen. Wolkenfelder, Farne, Schichtenlinien von Landschaften (insbesondere auch Umrisse von Inseln) sind typische Beispiele. Weil sich die Computergrafik naturgemäß viel mit Baumstrukturen und rekursiven Algorithmen beschäftigt, gibt es hier eine besonders schöne Überschneidung mit Strukturen aus der Natur.

Die Summe der Querschnitte .....	252	Fraktale Konturen .....	258	Fraktale Ausbreitung .....	264
Wirrwarr mit System? .....	254	Fraktale Pyramiden .....	260	Schichtenlinien .....	266
Verästelungen .....	256	Mathematische Farne .....	262	Vom Oktaeder zur Schneeflocke .....	268

## 14 Gezielte Bewegungen ..... 271

Wie können und sollen sich die winzigen Raupen auf einem Blatt bewegen, damit sie in möglichst großer Anzahl möglichst rationell ein Blatt in ihren Mägen verschwinden lassen können? Kann ein Affe seinen Sprung von einem Baum auf den anderen nach dem Absprung noch beeinflussen? Solchen Überlegungen stehen viele schöne Anwendungen aus der sogenannten Kinematik (Geometrie der Bewegung) gegenüber, von denen einige in diesem Kapitel erörtert werden.

Unrunde Zahnräder .....	272	Lissajous-Figuren .....	278	Mit Keule und Kavitation .....	284
Die Übersetzung ist entscheidend .....	274	Leichtfüßigkeit und Reaktionszeit .....	280	Flugakrobatik .....	286
Robust und effizient .....	276	Die Wurfparabel .....	282		