

Vorwort V

Dieses Buch bietet eine fotografisch-mathematische Reise in das Reich der Natur mit ihren Phänomenen und den faszinierenden Resultaten der Evolution. Selbst ohne höhere Mathematik, aber mit geschärftem mathematischem Hausverstand und einem fantasievollen Herangehen an die Dinge kann man viele Dinge, die zunächst „einfach nur da sind“, besser verstehen und u. U. Schlüsse daraus ziehen. Den Einleitungstext zu den Kapiteln finden Sie hier im Inhaltsverzeichnis. Das Bild links stellt Zellstrukturen in einem Blatt dar, die man mathematisch gut modellieren kann.

Die positive Spirale VI Mathematik und Naturfotografie VIII

1 Das Wechselspiel mit der Mathematik 1

Mathematik ist mehr als nur „Rechnen“. Sie ist ein vom Menschen künstlich geschaffenes Konstrukt mit strengen Regeln, in der es nur „Schwarz oder Weiß“ bzw. „wahr oder falsch“ gibt. Die Natur scheint da ganz anders zu sein, und dennoch hat die Mathematik wie keine andere Wissenschaft die Fähigkeit, natürliche Prozesse zu modellieren und dabei zu tieferen Einsichten in diese Prozesse zu gelangen. Das Titelbild zeigt eine stehende Welle beim Abfluss eines Teichs. Sogar die Interferenzen der Wellen änderten sich dabei kaum, das Bild war „wiederholbar“ und könnte bei bekannten Parametern vom Computer „nachvollzogen“ werden.

Zebrastreifen und Zahlencodes 2 Das Schildkröten-Paradoxon 8 Seerosen-Vermehrung 14
 Wie aus der Zahl ein Zebra wird 4 Herauslesen aus Fotos 10
 Die Henne und das Ei 6 Wiederholbarkeit von Versuchen 12

2 Der mathematische Blick 17

Die womöglich Jahrtausende alte Felszeichnung wurde von den San (Ureinwohner des südlichen Afrikas) angefertigt und illustriert eine Jagd mit Pfeil und Bogen. Die beim Pfeilflug auftretenden Wurfparabeln wurden (und werden) von den San mit unglaublicher Präzision einkalkuliert, ohne jemals eine Berechnung durchgeführt zu haben. In diesem Kapitel sollen exemplarisch Themen angeschnitten werden, bei denen sich ein Mathematiker vielleicht mehr denkt als ein Nicht-Mathematiker. So geht es z. B. um vermeintliche, aber auch erklärbare Ähnlichkeiten.

Verblüffend ähnlich 18 Zonen mit lauter Rauten 26 Verschiedene Skalen 34
 Assoziationen 20 Netze mit windschiefen Rauten 28 Die Kepler'sche Fassregel 36
 Nicht nur zufällig ähnlich 22 Schiefe Parallelprojektionen 30
 Iterative Formfindung 24 Fibonacci und Wachstum 32

3 Räumliches Sehen 39

In der Nahaufnahme eines hübschen Schmetterlings sind dunkle Punkte in den Komplexaugen zu sehen (Pseudopupillen), die von den Kristallprismen, die in jeder Facette eingebaut sind, erzeugt werden. Das Tier sieht auf kurze Distanzen ausgezeichnet dreidimensional. Warum das so ist, wie Stereo-Sehen und Vergleichbares funktioniert, aber auch sonst einige Regeln über perspektivisches und dreidimensionales Erfassen sind Thema dieses Kapitels. Man erkennt auch, dass wir recht leicht optisch verwirrt werden können, wenn gewisse Bedingungen erfüllt sind.

Tiefenwahrnehmung	40	Phänomen Linsenaug	46	Natürlicher Eindruck beim Foto	52
Phänomen Komplexauge	42	Zielgenauigkeit durch Antennen	48	Quader oder Pyramidenstumpf?	54
Entfernungstabellen	44	Im Schnitt der Sehstrahlen	50	Impossibles	56

4 Astronomisches Sehen 59

Der Blick ins Weltall war immer schon ein menschlicher Traum. Wir müssen uns hier auf unsere Sonne, unseren Mond und das eine oder andere markante Sternbild begrenzen. Viele Phänomene, die mit den Gestirnen zusammenhängen, erwecken das Interesse des Mathematikers. Ein recht einfacher geometrischer Satz über den rechten Winkel gibt uns z. B. Auskunft über durchaus nicht-triviale Fragen zum exakten Frühlingsbeginn bzw. der vermeintlich falschen Mondneigung. Letztere ist auch in dem abgebildeten mittelalterlichen Fresco der St. Laurentzkirche in Požega (Kroatien) „verewigt“.

Phänomen Sonnenuntergang	60	Der Skarabäus und die Sonne	68	Die Sonne im Zenit	76
Phänomen Sonnenfinsternis	62	Satz vom rechten Winkel	70	Der südliche Sternenhimmel	78
Wenn die Sonne tief steht	64	Wann beginnt der Frühling?	72		
Fata Morgana	66	Die „falsche“ Mondneigung	74		

5 Schraubung und Spiraltung 81

Noch bevor wir verschiedene Typen von Kurven und Flächen betrachten, wollen wir die Schraubung und Spiraltung unter die Lupe nehmen. Erstere spielt in vielen technischen Anwendungen eine zentrale Rolle (als Symbol dafür ist ein Schraubengewinde samt Schraubenmutter abgebildet). Die Spiraltung ist in der Kunst, vor allem aber in der Natur omnipräsent und besonders schön bei Schneckenhäusern, Muscheln (Foto links) und Tierhörnern manifestiert. Hier spielen exponentielles oder lineares Wachstum und Rotation zusammen.

Wendelflächen	82	Faszination Spirale	86	Helispiralen	90
Schub oder Hub?	84	Durch Spiegelung zum König	88		

6 Spezielle Kurven 93

Kurven wie z. B. die Kettenlinie können in einer Ebene liegen oder auch „echte Raumkurven“ sein, wie der abgebildete Trieb einer Kletterpflanze – ganz untypisch für unsere Vorstellung von Pflanzen – durch Drehen und Wippen versucht, ihre räumliche Umgebung zu erfassen und irgendwo Halt zu finden. Die Kegelschnitte sind zu Recht die berühmtesten Kurven: Sie finden sich in der Natur zuhauf (die Bahnen der Planeten sind Ellipsen, die Wurfbahnen von Objekten sind Parabeln, Schatten und perspektivische Bilder von Kreisen sind oft Hyperbeln).

Die Kettenlinie	94	Faszination Parabel	98	Umriss-Spitzen	102
Invarianz bei Zentralprojektion	96	Knoten	100	Geodätische Geschenke	104

7 Besondere Flächen 107

Noch viel größer als die Vielfalt der Kurven ist jene der gekrümmten Flächen. Die Kugel übt wegen ihrer unendlichfachen Symmetrie große Faszination auf uns aus. Ihre Oberfläche ist doppelt gekrümmt und damit nicht ohne Dehnungen und Stauchungen in die Ebene auszubreiten. Jene Flächenteile, welche bei der abgebildeten Lampe in Summe eine Kugel annähern, entstehen durch Verbiegen von ebenen rautenförmigen Streifen und sind damit nur einfach gekrümmt. Oberflächen, die sich in einem Spannungsgleichgewicht befinden, sind (doppelt gekrümmte) Minimalflächen.

Faszination Kugel	108	Biigsam und vielseitig	114	Minimierte Oberflächenspannung	120
Der Umriss einer Kugel	110	Aufwicklungen	116	Minimalflächen	122
Krumme Flächen annähern	112	Stabil und einfach zu bauen	118	Seifenblasen	124

8 Spiegelung und Brechung 127

Spiegelung und Brechung gehören eng zusammen: Wenn z. B. die Sonne an der Wasseroberfläche reflektiert, gelangt – je nach Einfallswinkel – ein Teil des Lichts in das Wasser. Die Umkehrung ist nicht mehr so selbstverständlich: Flach von unten auf die Wasseroberfläche treffendes Licht wird zur Gänze reflektiert. Der winzige Gecko auf der Glasscheibe erscheint doppelt reflektiert: einmal an der Oberseite der Scheibe, das andere Mal auf der Rückseite. Die dazwischen stattgefundene doppelte Brechung an der Vorderseite „hebt sich auf“.

Kugel-Spiegelung	128	Das optische Prisma	140	Fischaugenperspektive	152
Spiegelsymmetrie	130	Die Theorie zum Regenbogen	142	Die Bildanhebung	154
Spiegelung	132	Am Fuß des Regenbogens	144	Totalreflexion und Bildanhebung	156
Das Pentaprisma	134	Über den Wolken	146	Einmal Fischaug und zurück!	158
Der Billard - Effekt	136	Spektralfarben unter Wasser	148		
Schalldämmende Pyramiden	138	Farbpigmente oder Schillerfarben? ..	150		

9 Verteilungsprobleme 161

Sehr oft tritt das Problem auf, möglichst viele Elemente auf möglichst kleinem Raum sinnvoll so zu verteilen. Die jungen Nilkrokodile am Bild sollen symbolisch dieses Problem veranschaulichen. Da ist etwa die vermeintlich einfache Frage, wie man eine vorgegebene Anzahl von Punkten auf einer Kugel verteilt. In der Natur will z. B. ein Seeigel seine Stacheln optimal auf seiner Kalkhülle verteilen. Hier gibt es mathematisch-physikalische Algorithmen, die das Problem durch Simulation von Abstoßung der einzelnen Teilchen hervorragend bewältigen.

Gleichverteilung auf Flächen	162	Stachelige Gleichverteilung	170	Artefakte am Bildschirm	178
Tautropfenverteilung	164	Oberflächen unter Zugzwang	172	Gewichtsschwankungen	180
Berührungsprobleme	166	Nicht ungefährlich	174		
Eine platonische Lösung	168	Druckverteilung	176		

10 Einfache physikalische Phänomene 183

Mathematik und Physik haben in vielen Teilen Überlappungen. Die Fragen, auf welchem Anlauf ein Schispringer zum besten Sprung ansetzt oder wie weit sich ein Motorrad in die Kurve legen muss, gehören zweifellos in so eine Nische. Schon deutlich physikalischer ist die Frage, warum Tiere wie die abgebildeten Enten oder aber Flugzeuge fliegen können oder welche Wellenformationen bei bewegten Erregerquellen entstehen.

Die Newton'schen Axiome	184	Das aerodynamische Paradoxon	192	Interferenzen	200
Rückstoß und Saugwirkung	186	Der schnellste Weg	194	Doppler-Effekt und Mach-Kegel	202
Selektive Farbauslöschung	188	Extreme Kurvenlage	196	Schallwellen auf seltsamen Wegen	204
Relativgeschwindigkeiten	190	Mathematisches über Bienen	198		

11 Zellenanordnungen 207

Wenn ein Mathematiker die Anordnung der Schuppen auf einem Reptil wie dem abgebildeten jungen Nilkrokodil betrachtet, assoziiert er damit sofort sogenannte Voronoi-Diagramme. Inwieweit hier ein Zusammenhang besteht und ob womöglich auch das Stützgerüst in Libellenflügeln oder Blättern von Grünpflanzen oder gar die Risse in trocknendem Schlamm solche Strukturen enthalten, sind Themen dieses Kapitels, ebenso warum man auf Gänseblümchen, Sonnenblumen oder Pinienzapfen Spiralen zu erkennen glaubt.

Vermehrung der Gänseblümchen	208	Voronoi-Diagramme	214	Fraktale Kugelpackungen	220
Spiralen oder keine Spiralen?	210	Iterierte Voronoi-Strukturen	216		
Berechnende Rotation	212	Wickelkurven	218		

12 Wie im Kleinen, so nicht im Großen 223

Dieses Kapitel widmet sich der spannenden Frage, warum Dinge, die man im Großen beobachtet, in der Welt der Kleinstlebewesen ganz anders sind (die beiden Fotos eines Elefanten und einer Ameise sind stellvertretend dafür zu sehen). So scheint bei den Insekten die Schwerkraft kaum eine Rolle zu spielen, die Tiere scheinen verhältnismäßig viel mehr Kraft zu besitzen und können fast alle fliegen. Dafür gibt es eine ganz einleuchtende mathematische Erklärung: Bei ähnlichen Objekten ist das Verhältnis von Oberfläche zu Volumen von der absoluten Größe abhängig.

Zehnerpotenzen im Tierreich	224	Riesige Elefantenohren	234	Fluide	244
150 Millionen Jahre unverändert	226	Schwimmende Münzen	236	Bruchteile einer Millisekunde	246
Legendäre Kraft	228	Modell und Realität	238	Biegsame Strohhalme	248
Wo bleibt die Erdanziehung?	230	Skalenunabhängige Schärfentiefe	240		
Fäden aus Eiweiß	232	Einfach wegblenden	242		

13 Baumstrukturen und Fraktale 251

Verästelungen wie bei Bäumen (im Bild eine Schirmakazie) und Flüssen treten auch bei kleinen Gebilden wie Korallen oder Wurzeln kleiner Pflanzen auf. Oft ist die Auflösung eines klaren Umrisses so weit fortgeschritten, dass wir von einem Fraktal sprechen. Wolkenfelder, Farne, Schichtenlinien von Landschaften (insbesondere auch Umrisse von Inseln) sind typische Beispiele. Weil sich die Computergrafik naturgemäß viel mit Baumstrukturen und rekursiven Algorithmen beschäftigt, gibt es hier eine besonders schöne Überschneidung mit Strukturen aus der Natur.

Die Summe der Querschnitte	252	Fraktale Konturen	258	Fraktale Ausbreitung	264
Wirrwarr mit System?	254	Fraktale Pyramiden	260	Schichtenlinien	266
Verästelungen	256	Mathematische Farne	262	Vom Oktaeder zur Schneeflocke	268

14 Gezielte Bewegungen 271

Wie können und sollen sich die winzigen Raupen auf einem Blatt bewegen, damit sie in möglichst großer Anzahl möglichst rationell ein Blatt in ihren Mägen verschwinden lassen können? Kann ein Affe seinen Sprung von einem Baum auf den anderen nach dem Absprung noch beeinflussen? Solchen Überlegungen stehen viele schöne Anwendungen aus der sogenannten Kinematik (Geometrie der Bewegung) gegenüber, von denen einige in diesem Kapitel erörtert werden.

Unrunde Zahnräder	272	Lissajous-Figuren	278	Mit Keule und Kavitation	284
Die Übersetzung ist entscheidend	274	Leichtfüßigkeit und Reaktionszeit	280	Flugakrobatik	286
Robust und effizient	276	Die Wurfparabel	282		