Vorwort

Diesem Buch liegt eine Vorlesung über mathematische Logik zugrunde, wie sie in Freiburg regelmäßig für Mathematik- und Informatikstudenten im vierten Semester gehalten wird. Sie bildet den Anfang eines mehrsemestrigen Logikzyklus und verfolgt einerseits das Ziel, jedem Studenten etwas über die grundlegenden Fundamente der Mathematik zu vermitteln. Andererseits zeigt die Vorlesung auch die verschiedenen weiterführenden und eigenständigen Bereiche der Logik auf, insbesondere Modelltheorie, Mengenlehre, Beweistheorie, Rekursionstheorie und theoretische Informatik.

Die Vorlesung hat vier Teile, deren erste beide darstellen, wie sich die Mathematik auf Prädikatenkalkül und Mengenlehre zurückführen läßt. Das erste Kapitel erklärt den Hilbertkalkül, der das formale Beweisen im Hilbertschen Sinne beschreibt. Dieser forderte nämlich, Beweise so zu führen, daß man anstelle von Punkten, Geraden und Ebenen auch Tische, Bänke und Bierseidel einsetzen können müsse, ohne daß die Gültigkeit des Beweises darunter litte. Aus dem Gödelschen Vollständigkeitssatz folgt, daß sich in diesem Kalkül tatsächlich alles, für das es keine Gegenbeispiele gibt, formal beweisen läßt. Damit schafft dieser Satz auch die Grundlagen für die Anfänge der künstlichen Intelligenz. Die Grenzen dieses formalen Beweisens aber werden in den Gödelschen Unvollständigkeitssätzen sichtbar, die am Ende dieses Buches stehen.

Als Vorbereitung auf die Modelltheorie und die theoretische Informatik gehen wir im ersten Kapitel auch auf die Herbrandschen Sätze ein, die eine Art Entscheidbarkeit für die Allgemeingültigkeit von Formeln beschreiben.

Das zweite Kapitel erklärt die Anfänge der axiomatischen Mengenlehre, weit genug, um zu sehen, auf welche Weise sich die gesamte Mathematik in der Mengenlehre entwickeln läßt. Insbesondere zeigen wir, wie sich die natürlichen Zahlen im Rahmen der axiomatischen Mengenlehre beschreiben und charakterisieren lassen. Mathematische Sätze beschreiben nun Eigenschaften des Mengenuniversums, mathematische Beweise sind damit Folgerungen aus den Axiomen der Mengenlehre nach den Schlußregeln des Prädikatenkalküls.

Das dritte Kapitel enthält eine Einführung in die Theorie der berechenbaren Funktionen anhand von sehr einfachen Computermodellen, den Registermaschinen. Diese Theorie ist für die theoretische Informatik wichtig, wird aber hier auch für den vierten Abschnitt verwendet, um den Gödelschen Unvollständigkeitssatz zu beweisen, der schon in einfachen Systemen der Arithmetik gilt.

Die Arithmetik, die Theorie der natürlichen Zahlen als Struktur mit Addition, Multiplikation und Nachfolgeroperation, steht im Zentrum des vierten Kapitels. Diese (vollständige) Theorie wird verglichen mit einem axiomatisierbaren Teil, der sogenannten Peanoarithmetik. Wir werden sehen, daß eine Theorie der natürlichen Zahlen nicht gleichzeitig vollständig und effektiv axiomatisierbar sein kann. In diesem Satz zeigt sich ein unvermeidbares Problem der mathematischen Grundlegung der Mathematik. In diesem letzten Kapitel laufen die Begriffe der vorigen drei Kapitel zusammen: Die Mengenlehre, die es uns erlaubt, die natürlichen Zahlen sauber zu definieren, die Modelltheorie und die Theorie der berechenbaren Funktionen.

Vorbild war das Buch *Mathematical Logic* von J. Shoenfield, [22], das wesentlich tiefer in Mengenlehre, Rekursionstheorie und Beweistheorie eindringt. Das läßt sich im Rahmen einer einsemestrigen Vorlesung nicht verwirklichen, doch sollte dieses Buch ausreichend Material liefern, um sich wenigstens ein erstes Bild dieses wichtigen Gebietes machen zu können.

Ich danke Katrin Tent für ihre unschätzbare Hilfe bei der Endfassung dieses Buches.

Was die Rechtschreibung betrifft, so hat man sich deren bedient, welche jetzo für die beste gehalten wird.

(J.A. Hoffmann, 1735)