

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>3</b>
<b>1 Grundlagen</b>	<b>9</b>
1.1 Mengen	10
1.2 Komplexe Zahlen	13
1.3 Vollständige Induktion	19
1.4 Relationen, Zornsches Lemma	26
1.5 Funktionen	35
1.6 Binäre Verknüpfungen	41
1.7 Partitionen und Äquivalenzrelationen	45
1.8 Kongruenzrelationen	52
<b>2 Ganze Zahlen</b>	<b>57</b>
2.1 Teilbarkeit	57
2.2 Ideale im Ring $\mathbb{Z}$	65
2.3 Der Körper der rationalen Zahlen	72
2.4 Diophantische Gleichungen	76
2.5 Rechnen mit Kongruenzen	82
2.6 Die Restklassenringe $\mathbb{Z}_n$	90
2.7 Die Eulersche $\varphi$ -Funktion, prime Restklassen modulo $n$	99
2.8 Kodierung mit großen Primzahlen	103
<b>3 Gruppen</b>	<b>108</b>
3.1 Halbgruppen, Monoide, Gruppenaxiome	109
3.2 Untergruppen	122
3.3 Homomorphismen und Isomorphismen	141
3.4 Beispiele für Gruppen	151
3.4.1 Matrizengruppen	151
3.4.2 Zyklische Gruppen	156

3.4.3	Permutationsgruppen . . . . .	160
3.4.4	Isometriegruppen . . . . .	177
3.4.5	Diedergruppen . . . . .	181
3.4.6	Drehgruppen im $\mathbb{R}^3$ . . . . .	187
3.5	Normalteiler und Faktorgruppen . . . . .	194
3.6	Der Homomorphiesatz . . . . .	207
3.7	Korrespondenzsatz und Isomorphiesätze . . . . .	213
3.8	Operationen von Gruppen auf Mengen . . . . .	218
3.9	Gruppen kleiner Ordnung . . . . .	226
3.10	Endliche abelsche Gruppen . . . . .	231
3.11	Zentralisator, Normalisator, Klassengleichung . . . . .	240
3.12	Die Sylow-Sätze . . . . .	251
3.13	Auflösbare Gruppen . . . . .	264
<b>4</b>	<b>Ringe</b>	<b>272</b>
4.1	Grundlegende Definitionen, Ideale, Teilbarkeit . . . . .	273
4.2	Polynomringe . . . . .	292
4.3	Faktorringe und Homomorphiesatz . . . . .	304
4.4	Polynomringe in mehreren Variablen . . . . .	318
4.5	Quotientenkörper, Lokalisierungen . . . . .	324
4.6	Primfaktorzerlegung in Ringen . . . . .	330
4.7	Nullstellen und Irreduzibilität von Polynomen . . . . .	336
4.8	Symmetrische Polynome . . . . .	346
4.9	Diskriminante und Resultante von Polynomen . . . . .	352
4.10	Ganzheitsringe, euklidische Ringe . . . . .	358
4.11	Noethersche Ringe . . . . .	364
<b>5</b>	<b>Körper</b>	<b>367</b>
5.1	Unterkörper, Primkörper, Charakteristik . . . . .	367
5.2	Algebraische Körpererweiterungen, Minimalpolynom . . . . .	374
5.3	Grad einer Körpererweiterung, Gradformel . . . . .	381
5.4	Konstruktionen mit Zirkel und Lineal . . . . .	391
5.5	Einfache algebraische Körpererweiterungen . . . . .	399
5.6	Transzendente Körpererweiterungen . . . . .	406
5.7	Zerfallungskörper, algebraisch abgeschlossene Körper . . . . .	414
5.8	Fortsetzungen von Körperhomomorphismen . . . . .	426
5.9	Separable Körpererweiterungen . . . . .	436

5.10	Endliche Körper . . . . .	442
5.11	Einheitswurzeln und Kreisteilungspolynome . . . . .	450
<b>6</b>	<b>Galoistheorie</b>	<b>459</b>
6.1	Normale und galoissche Körpererweiterungen . . . . .	461
6.2	Galoisgruppen und Fixkörper . . . . .	466
6.3	Der Hauptsatz der Galoistheorie . . . . .	475
6.4	Die Galoisgruppe eines Polynoms . . . . .	483
6.5	Konstruktion von regelmäßigen $n$ -Ecken . . . . .	491
6.6	Gleichungen dritten und vierten Grades . . . . .	500
6.7	Aufösbarkeit durch Radikale . . . . .	512
	<b>Literatur</b> . . . . .	<b>521</b>
	<b>Symbolverzeichnis</b> . . . . .	<b>522</b>
	<b>Index</b> . . . . .	<b>524</b>