



Kapitel 8

Haftung und Reibung

8

Haftung (Haftreibung)

Aufgrund der Oberflächenrauigkeit bleibt ein Körper im Gleichgewicht, solange die Haftkraft H kleiner ist als der Grenzwert H_0 . Der Wert H_0 ist proportional zur Normalkraft N :

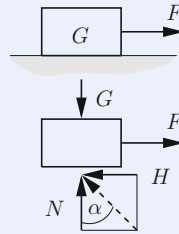
$$|H| < H_0, \quad H_0 = \mu_0 N$$

μ_0 = Haftungskoeffizient.

Die Haftungskraft ist eine *Reaktionskraft*; sie kann bei statisch bestimmten Systemen aus den Gleichgewichtsbedingungen bestimmt werden.

Haftungswinkel: Für die Richtung der Resultierenden aus N und H_0 (Grenzhaftkraft) gilt

$$\tan \rho_0 = \mu_0 = \frac{H_0}{N}, \quad \rho_0 = \text{Haftungswinkel.}$$



Reibung (Gleitreibung)

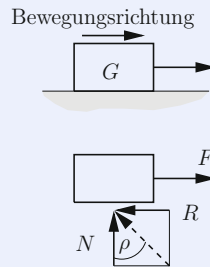
Auf den bewegten Körper wirkt infolge der Oberflächenrauigkeit die Reibkraft R . Die Reibkraft ist eine *eingeprägte Kraft* und proportional zur Normalkraft N (COULOMBSches Reibungsgesetz):

$$R = \mu N$$

μ = Reibungskoeffizient.

Reibungswinkel: Für die Richtung der Resultierenden aus N und R gilt:

$$\tan \rho = \mu = \frac{R}{N}, \quad \rho = \text{Reibungswinkel.}$$



Problemtypen:

1. Haftung: $H < \mu_0 N$
2. Haftgrenzfall: $H = \mu_0 N$
3. Reibung: $R = \mu N$

Anmerkungen:

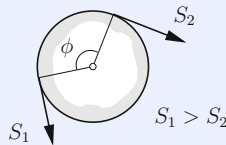
- Die Reibkraft (Haftkraft) wirkt in der Berührungsebene der Körper.
- Die Richtung der Reibkraft (Haftkraft) ist entgegengesetzt zur Richtung der Relativbewegung (die entstünde, wenn diese nicht durch Haftung verhindert würde).
- Die Größe der Reibkraft (Haftkraft) ist unabhängig von der Berührungsfläche.
- Bei Haftung liegt die Resultierende aus N und H innerhalb des *Haftungskegels* mit dem Öffnungswinkel ρ_0 ($\alpha < \rho_0$).
- Der Haftungskoeffizient ist in der Regel größer als der Reibungskoeffizient.
- Haftungs- und Reibungskoeffizienten (ungefähr) für trockene Materialien:

Material	μ_0	μ
Stahl auf Stahl	0,15 - 0,5	0,1 - 0,4
Stahl auf Teflon	0,04	0,04
Holz auf Holz	0,5	0,3
Leder auf Metall	0,4	0,3
Autoreifen auf Straße	0,7 - 0,9	0,5 - 0,8

Seilhaftung und Seilreibung:

Haftung: $S_1 \leq S_2 e^{\mu_0 \phi}$

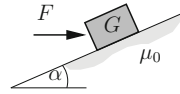
Reibung: $S_1 = S_2 e^{\mu \phi}$



A8.1

Aufgabe 8.1 Ein Körper vom Gewicht G befindet sich auf einer rauhen schiefen Ebene.

In welchen Grenzen muss die angreifende Kraft F liegen, damit der Körper in Ruhe bleibt?



Lösung Aus den Gleichgewichtsbedingungen

$$\nearrow : F \cos \alpha - G \sin \alpha - H = 0,$$

$$\searrow : -F \sin \alpha - G \cos \alpha + N = 0$$

folgen

$$H = F \cos \alpha - G \sin \alpha, \quad N = F \sin \alpha + G \cos \alpha.$$

Eine *Aufwärtsbewegung* wird verhindert, wenn

$$H < \mu_0 N$$

ist. Einsetzen liefert

$$F < G \frac{\sin \alpha + \mu_0 \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu_0 \sin \alpha}$$

oder mit $\mu_0 = \tan \rho_0$ und den Additionstheoremen

$$F < G \tan(\alpha + \rho_0).$$

Bei verhinderter *Abwärtsbewegung* kehrt sich die Richtung von H um. In diesem Fall lautet die Haftbedingung

$$-H < \mu_0 N.$$

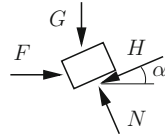
Hieraus ergibt sich

$$F > G \frac{\sin \alpha - \mu_0 \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu_0 \sin \alpha} \quad \leadsto \quad F > G \tan(\alpha - \rho_0).$$

Damit erhält man das Ergebnis

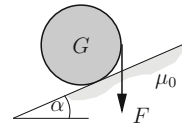
$$\underline{\underline{\tan(\alpha - \rho_0) < \frac{F}{G} < \tan(\alpha + \rho_0)}}.$$

Anmerkung: Die beiden Haftbedingungen lassen sich zu $|H| < \mu_0 N$ zusammenfassen.



Aufgabe 8.2 Die Walze vom Gewicht G soll auf der unter dem Winkel α geneigten Ebene ruhen.

Wie groß müssen die Kraft F und der Haftungskoeffizient μ_0 sein?

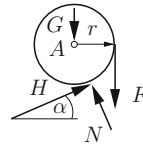


Lösung Aus den Gleichgewichtsbedingungen

$$\nearrow : N - (G + F) \cos \alpha = 0,$$

$$\nearrow : H - (G + F) \sin \alpha = 0,$$

$$\widehat{A} : Fr - Hr = 0$$



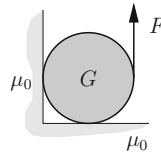
und der Haftbedingung

$$H < \mu_0 N$$

ergeben sich

$$\underline{\underline{F = G \frac{\sin \alpha}{1 - \sin \alpha}}}, \quad \underline{\underline{\mu_0 > \tan \alpha}}.$$

Aufgabe 8.3 Wie groß muss die Kraft F sein, damit die Walze vom Gewicht G in Bewegung gesetzt wird? Der Haftungskoeffizient μ_0 sei an beiden Berührungspunkten gleich.

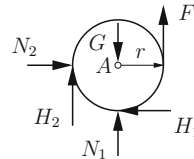


Lösung Die Gleichgewichtsbedingungen

$$\rightarrow : N_2 - H_1 = 0,$$

$$\uparrow : N_1 + H_2 + F - G = 0,$$

$$\widehat{A} : H_1 r + H_2 r - Fr = 0$$



und die Haftgrenzbedingungen

$$H_1 = \mu_0 N_1, \quad H_2 = \mu_0 N_2$$

liefern

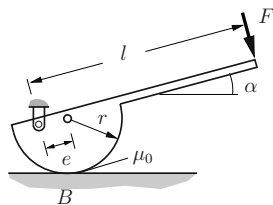
$$\underline{\underline{F = G \frac{\mu_0(1 + \mu_0)}{1 + \mu_0 + 2\mu_0^2}}}.$$

Beachte: -Das System ist statisch unbestimmt,
-Im Haftgrenzfall müssen die Kräfte H_1 , H_2 entgegen der einsetzenden Bewegung eingezeichnet werden.

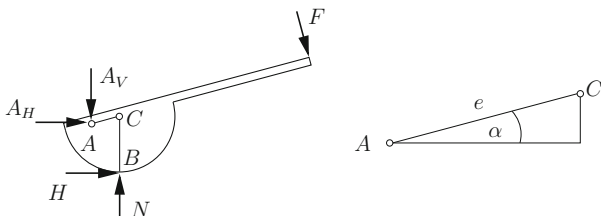
A8.4

Aufgabe 8.4 Ein Spannexzenter mit den Abmessungen l und r wird in der Lage mit der Neigung α durch die Kraft F belastet.

Wie groß muss bei gegebener Haftungsahl μ_0 die Exzentrizität e sein, damit im Berührungspunkt B die Anpreßkraft N erreicht wird?



Lösung Wir skizzieren das Freikörperbild:



Aus den Gleichgewichtsbedingungen

$$\rightarrow: A_H + H + F \sin \alpha = 0,$$

$$\uparrow: -A_V + N - F \cos \alpha = 0,$$

$$\widehat{C}: F(l - e) - A_H e \sin \alpha - A_V e \cos \alpha - Hr = 0$$

ergibt sich durch Elimination von A_H und A_V

$$H = \frac{Fl - Ne \cos \alpha}{r - e \sin \alpha}.$$

Durch Einsetzen in die Haftbedingung

$$|H| < \mu_0 N$$

folgt

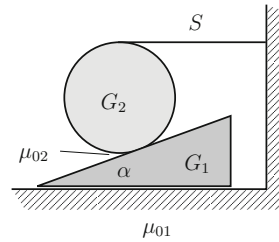
$$Fl - Ne \cos \alpha < \mu_0 N(r - e \sin \alpha).$$

Auflösen nach e liefert

$$e > \frac{l \frac{F}{N} - \mu_0 r}{\cos \alpha - \mu_0 \sin \alpha}.$$

Aufgabe 8.5 Ein Keil vom Gewicht und dem Öffnungswinkel α ruht auf einer horizontalen Ebene. Auf dem Keil befindet sich eine kreiszylindrische Walze vom Gewicht G_2 , die durch das Seil S gehalten wird.

Wie groß müssen die Haftungskoeffizienten μ_{01} (zwischen Keil und Ebene) und μ_{02} (zwischen Walze und Ebene) sein, damit an keiner Stelle Rutschen eintritt?



Lösung Aus den Gleichgewichtsbedingungen für die Walze

$$\rightarrow: S + H_2 \cos \alpha - N_2 \sin \alpha = 0,$$

$$\uparrow: -G_2 + H_2 \sin \alpha + N_2 \cos \alpha = 0,$$

$$\overset{\curvearrowright}{A}: S r - H_2 r = 0$$

und den Keil

$$\uparrow: -G_1 + N_1 - H_2 \sin \alpha - N_2 \cos \alpha = 0,$$

$$\rightarrow: -H_1 - H_2 \cos \alpha + N_2 \sin \alpha = 0$$

folgen die Kräfte an den Berührstellen

$$N_2 = G_2, \quad H_2 = G_2 \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha},$$

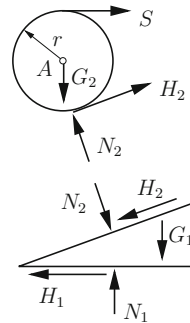
$$N_1 = G_1 + G_2, \quad H_1 = G_2 \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}.$$

Einsetzen in die Haftbedingungen

$$H_1 < \mu_{01} N_1, \quad H_2 < \mu_{02} N_2$$

liefert die erforderlichen Haftungskoeffizienten:

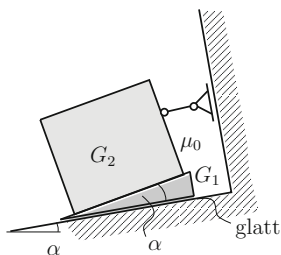
$$\underline{\underline{\mu_{01} > \frac{G_2 \sin \alpha}{(G_1 + G_2)(1 + \cos \alpha)}}, \quad \underline{\underline{\mu_{02} > \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}}}.$$



A8.6

Aufgabe 8.6 Eine Kiste vom Gewicht G_2 wird auf einer *glatten* schiefen Ebene durch ein Seil gehalten. Zwischen Kiste und Ebene ist ein *rauh* Keil geschoben (Haftungskoeffizient μ_0).

- a) Wie groß sind die Seilkraft S und die Kraft N_1 auf die schiefe Ebene?
 b) Wie groß muss der Haftungskoeffizient μ_0 sein, damit das System in Ruhe bleibt?



Lösung a) Die Gleichgewichtsbedingungen für das Gesamtsystem liefern

$$\nearrow: \underline{\underline{S = (G_1 + G_2) \sin \alpha}},$$

$$\searrow: \underline{\underline{N_1 = (G_1 + G_2) \cos \alpha}}.$$

b) Aus den Gleichgewichtsbedingungen für den Keil

$$\nearrow: H_2 - G_1 \sin 2\alpha + N_1 \sin \alpha = 0,$$

$$\searrow: -N_2 - G_1 \cos 2\alpha + N_1 \cos \alpha = 0$$

folgt durch Einsetzen von N_1 :

$$H_2 = G_1 \sin 2\alpha - (G_1 + G_2) \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2}(G_1 - G_2) \sin 2\alpha,$$

$$N_2 = (G_1 + G_2) \cos^2 \alpha - G_1 \cos 2\alpha = \frac{1}{2}(G_1 + G_2) - \frac{1}{2}(G_1 - G_2) \cos 2\alpha.$$

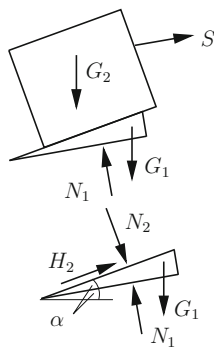
Aus der Haftbedingung

$$|H_2| < \mu_0 N_2$$

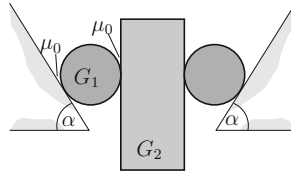
ergibt sich damit der erforderliche Haftungskoeffizient

$$\underline{\underline{\mu_0 > \frac{|G_1 - G_2| \sin 2\alpha}{G_1 + G_2 - (G_1 - G_2) \cos 2\alpha}}}.$$

Anmerkung: Je nach Werten von G_1 , G_2 und α rutscht bei Verletzung dieser Bedingung der Keil nach unten oder nach oben.



Aufgabe 8.7 Eine Klemmvorrichtung besteht aus zwei festen, unter dem Winkel α geneigten Klemmbanken, zwei losen Klemmrollen vom Gewicht G_1 und dem Klemmgut. Alle Oberflächen seien rau und haben den Haftungskoeffizient μ_0 .



Wie groß darf das Gewicht G_2 des Klemmgutes sein, damit kein Rutschen eintritt?

Lösung Die Gleichgewichtsbedingungen für das Klemmgut

$$\uparrow: 2H_2 - G_2 = 0$$

und für eine Klemmrolle

$$\uparrow: N_1 \cos \alpha - H_2 - H_1 \sin \alpha - G_1 = 0,$$

$$\rightarrow: N_1 \sin \alpha + H_1 \cos \alpha - N_2 = 0,$$

$$\widehat{A}: H_2 r - H_1 r = 0$$

liefern

$$H_1 = H_2 = \frac{G_2}{2},$$

$$N_1 = \frac{G_2(1 + \sin \alpha) + 2G_1}{2 \cos \alpha},$$

$$N_2 = \frac{G_2(1 + \sin \alpha) + 2G_1 \sin \alpha}{2 \cos \alpha}.$$

Einsetzen in die Haftbedingungen

$$H_1 < \mu_0 N_1, \quad H_2 < \mu_0 N_2$$

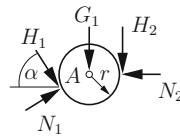
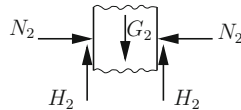
ergibt

$$G_2 < \frac{2\mu_0}{\cos \alpha - \mu_0(1 + \sin \alpha)} G_1, \quad G_2 < \frac{2\mu_0 \sin \alpha}{\cos \alpha - \mu_0(1 + \sin \alpha)} G_1.$$

Wegen $\sin \alpha \leq 1$ folgt daraus

$$\underline{\underline{G_2 < \frac{2\mu_0 \sin \alpha}{\cos \alpha - \mu_0(1 + \sin \alpha)} G_1.}}$$

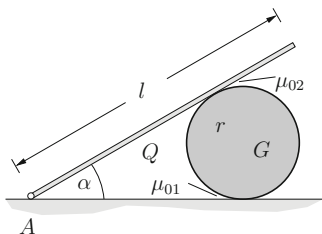
Anmerkung: Für $\mu_0 = \cos \alpha / (1 + \sin \alpha)$ geht die rechte Seite gegen Unendlich. Überschreitet μ_0 diesen Wert, so liegt *Selbsthemmung* vor.



A8.8

Aufgabe 8.8 Eine in A gelagerte Stange (Länge l , Gewicht Q) lehnt unter dem Winkel α gegen eine Walze (Gewicht G , Radius r).

Wie groß müssen die Haftkoeffizienten μ_{01} und μ_{02} sein, damit das System im Gleichgewicht ist?

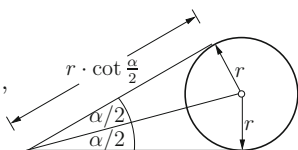


Lösung Die Gleichgewichtsbedingungen für die Walze

$$\rightarrow: -H_1 + N_2 \sin \alpha - H_2 \cos \alpha = 0,$$

$$\uparrow: N_1 - G - N_2 \cos \alpha - H_2 \sin \alpha = 0,$$

$$\curvearrowright_B: H_1 r - H_2 r = 0$$



und für den Stab

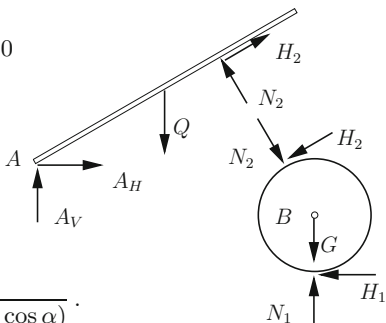
$$\curvearrowright_A: Q \frac{l}{2} \cos \alpha - N_2 r \cot \frac{\alpha}{2} = 0$$

liefern

$$N_1 = G + Q \frac{l}{2r} \frac{\cos \alpha}{\cot(\alpha/2)},$$

$$N_2 = Q \frac{l}{2r} \frac{\cos \alpha}{\cot(\alpha/2)},$$

$$H_1 = H_2 = Q \frac{l}{2r} \frac{\sin \alpha}{\cot(\alpha/2) (1 + \cos \alpha)}.$$



Einsetzen in die Haftbedingungen

$$H_1 < \mu_{01} N_1, \quad H_2 < \mu_{02} N_2$$

ergibt mit

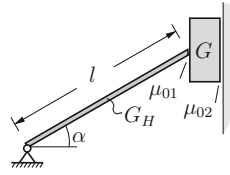
$$\cot \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

die Ergebnisse

$$\underline{\underline{\mu_{01} > \frac{1}{\frac{G}{Q} \frac{2r}{l} \cot^2(\alpha/2) + \cos \alpha \cot(\alpha/2)}}}, \quad \underline{\underline{\mu_{02} > \frac{1}{\cot(\alpha/2) \cos \alpha}}}.$$

Aufgabe 8.9 Durch einen Hebel vom Gewicht G_H wird ein rauher Klotz an einer Wand eingeklemmt. Die Haftungskoeffizienten an den Berührungstellen seien μ_{01} bzw. μ_{02} .

Wie groß darf das Gewicht G des Klotzes sein, damit er nicht rutscht?

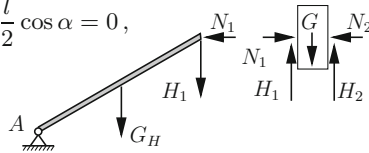


Lösung Aus den Gleichgewichtsbedingungen für den Hebel und für den Klotz

$$\overset{\curvearrowright}{A} : N_1 l \sin \alpha - H_1 l \cos \alpha - G_H \frac{l}{2} \cos \alpha = 0,$$

$$\uparrow : H_1 + H_2 - G = 0,$$

$$\rightarrow : N_1 - N_2 = 0$$



und den Haftbedingungen

$$H_1 < \mu_{01} N_1, \quad H_2 < \mu_{02} N_2$$

ergeben sich durch Eliminieren von H_1 , H_2 und N_2 und der Annahme $\mu_{01} < \tan \alpha$ die beiden Ungleichungen

$$N_1 < \frac{G_H}{2(\tan \alpha - \mu_{01})}, \quad \frac{2G + G_H}{2(\tan \alpha + \mu_{02})} < N_1.$$

Hieraus folgt

$$\frac{2G + G_H}{2(\tan \alpha + \mu_{02})} < \frac{G_H}{2(\tan \alpha - \mu_{01})}$$

bzw.

$$\underline{\underline{G < \frac{G_H}{2} \frac{\mu_{01} + \mu_{02}}{\tan \alpha - \mu_{01}}.}}$$

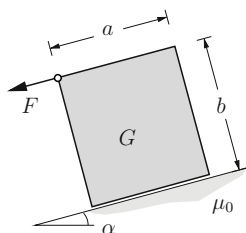
Anmerkungen:

- Für $\mu_{01} = \tan \alpha$ verschwindet der Nenner. Dann kann G beliebig groß werden. Allgemein liegt für $\mu_{01} \geq \tan \alpha$ unabhängig von G_H *Selbsthemmung* vor.
- Das System ist statisch unbestimmt. Daher können die Kräfte H_i , N_i nicht bestimmt werden.
- Setzt man den Haftgrenzfall mit $H_1 = \mu_{01} N_1$ und $H_2 = \mu_{02} N_2$ voraus, so ist im Endergebnis das „<“-Zeichen durch das „=“-Zeichen zu ersetzen.

A8.10

Aufgabe 8.10 Ein homogener Quader vom Gewicht G ruht auf einer rauhen schiefen Ebene.

Wie groß müssen die Kraft F und der Haftungskoeffizient μ_0 sein, damit die Bewegung in Form von Rutschen bzw. in Form von Kippen einsetzt?

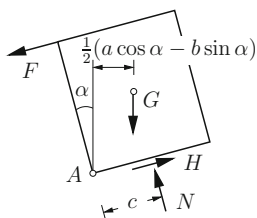


Lösung Aus den Gleichgewichtsbedingungen

$$\nearrow : H - F - G \sin \alpha = 0,$$

$$\searrow : N - G \cos \alpha = 0,$$

$$\curvearrowright A : \frac{G}{2} (a \cos \alpha - b \sin \alpha) - Fb - Nc = 0$$



ergibt sich für die Kräfte in der Kontaktfläche und für die Lage von N

$$H = F + G \sin \alpha, \quad N = G \cos \alpha, \quad c = \frac{1}{2}(a - b \tan \alpha) - \frac{Fb}{G \cos \alpha}.$$

Damit *Rutschen* einsetzt, muss gelten

$$H = H_0 = \mu_0 N, \quad c > 0.$$

Daraus folgen

$$\underline{\underline{F = G(\mu_0 \cos \alpha - \sin \alpha)}}, \quad \underline{\underline{\mu_0 < \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + \tan \alpha\right)}}.$$

Damit *Kippen* um den Punkt A einsetzt, muss gelten

$$c = 0, \quad H < \mu_0 N.$$

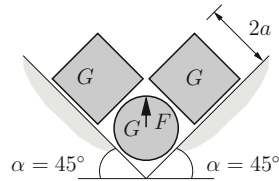
Dies liefert

$$\underline{\underline{F = G \frac{a \cos \alpha - b \sin \alpha}{2b}}}, \quad \underline{\underline{\mu_0 > \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + \tan \alpha\right)}}.$$

D.h. Kippen erfolgt nur bei hinreichend rauher Unterlage.

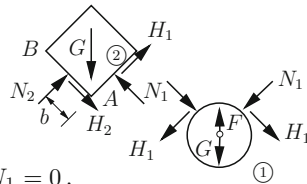
Aufgabe 8.11 Zwischen zwei schiefen Ebenen ruhen zwei Würfel und eine Walze jeweils vom Gewicht G . An allen Berührungsfächen herrsche der Haftungskoeffizient μ_0 .

Wie groß ist die erforderliche Kraft F , um die Walze nach oben herauszuziehen? Welcher Bedingung muss μ_0 genügen, damit die Würfel dabei nicht kippen?



Lösung Die Gleichgewichtsbedingungen lauten mit $\sin \alpha = \cos \alpha = \sqrt{2}/2$ unter Beachtung der Symmetrie

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \uparrow: & F - G - 2 \frac{\sqrt{2}}{2} N_1 - 2 \frac{\sqrt{2}}{2} H_1 = 0, \\ \textcircled{2} \rightarrow: & \frac{\sqrt{2}}{2} N_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} H_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} H_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} N_1 = 0, \\ & \uparrow: \frac{\sqrt{2}}{2} N_2 - \frac{\sqrt{2}}{2} H_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} H_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} N_1 - G = 0, \\ \overset{\curvearrowright}{A}: & N_2 b - N_1 a = 0. \end{aligned}$$



Um die Haftung zu überwinden, muss gelten

$$H_1 = \mu_0 N_1, \quad H_2 = \mu_0 N_2.$$

Damit ergibt sich aus den ersten drei Gleichgewichtsbedingungen

$$\underline{\underline{F = 2G \frac{1 + \mu_0 + \mu_0^2}{1 + \mu_0^2}}}$$

Die vierte Gleichgewichtsbedingung liefert

$$b = a \frac{1 + \mu_0}{1 - \mu_0}.$$

Damit kein Kippen um den Punkt B eintritt, muss

$$b < 2a$$

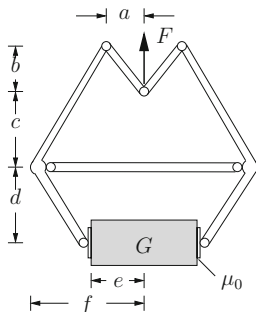
sein. Daraus folgt

$$\underline{\underline{\frac{1 + \mu_0}{1 - \mu_0} < 2 \quad \rightsquigarrow \quad \mu_0 < \frac{1}{3}}}$$

Beachte: Beim Anheben verschwinden die Kontaktkräfte zwischen der Walze und den schiefen Ebenen. Die Haftkräfte müssen richtig (der einsetzenden Bewegung entgegengerichtet) eingezeichnet werden.

A8.12

Aufgabe 8.12 Wie groß muss bei der Steinzange der Haftungskoeffizient μ_0 sein, damit die Last G gehalten werden kann?



Lösung Die Gleichgewichtsbedingungen am Gesamtsystem

$$\uparrow: F - G = 0,$$

am Punkt A

$$\uparrow: F - 2S_V = 0,$$

den Körper ①

$$\uparrow: 2H - G = 0$$

und den Körper ②

$$\widehat{C}: Nd + H(f - e) - S_V(f - a) - S_H(b + c) = 0$$

ergeben mit

$$\frac{S_H}{S_V} = \frac{a}{b}$$

für die Kräfte H und N :

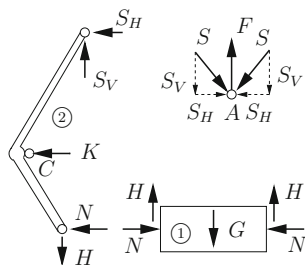
$$H = \frac{G}{2}, \quad N = \frac{G}{2} \frac{ac + be}{bd}.$$

Einsetzen in die Haftbedingung

$$H < \mu_0 N$$

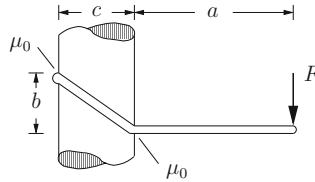
liefert

$$\underline{\underline{\mu_0 > \frac{bd}{ac + be}}}.$$



Aufgabe 8.13 Ein Steigeisen ist an einem Mast eingeklemmt und wird durch die Kraft F belastet.

Wie groß muss μ_0 sein, damit das Steigeisen nicht rutscht?

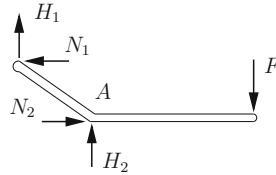


Lösung Aus den Gleichgewichtsbedingungen

$$\rightarrow : N_2 - N_1 = 0,$$

$$\uparrow : H_1 + H_2 - F = 0,$$

$$\overset{\curvearrowright}{A} : Fa + H_1c - N_1b = 0$$



folgen

$$N_2 = N_1, \quad H_1 = N_1 \frac{b}{c} - F \frac{a}{c}, \quad H_2 = F \left(1 + \frac{a}{c}\right) - N_1 \frac{b}{c}.$$

Einsetzen in die Haftbedingungen

$$H_1 < \mu_0 N_1, \quad H_2 < \mu_0 N_2$$

liefert

$$N_1 \frac{b - c\mu_0}{a} < F \quad \text{und} \quad F < N_1 \frac{b + c\mu_0}{c + a}$$

bzw.

$$\frac{b - c\mu_0}{a} < \frac{b + c\mu_0}{c + a}.$$

Auflösen ergibt für den erforderlichen Haftkoeffizienten

$$\underline{\underline{\mu_0 > \frac{b}{c + 2a}}}.$$

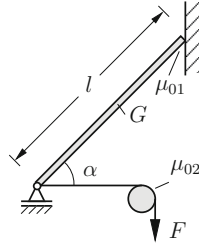
Anmerkungen:

- Die Kräfte N_1 , N_2 , H_1 , H_2 können nicht bestimmt werden, da das System statisch unbestimmt ist!
- Die Aufgabe kann auch gelöst werden, indem man den Haftgrenzfall betrachtet. Die Ungleichungen werden dann zu Gleichungen, und die Lösung μ_0^* ist die untere Grenze für den Haftkoeffizienten.

A8.14

Aufgabe 8.14 Ein Stab der Länge l und vom Gewicht G lehnt unter dem Winkel α gegen eine raue Wand. Am unteren Ende wird er durch ein Seil, das über einen rauhen Zapfen läuft, gehalten.

In welchen Grenzen muss die Kraft F liegen, damit das System im Gleichgewicht ist?



Lösung Aus den Gleichgewichtsbedingungen

$$\rightarrow: S - N_2 = 0,$$

$$\uparrow: N_1 + H_2 - G = 0,$$

$$\curvearrow A: N_1 l \cos \alpha - S l \sin \alpha - G \frac{l}{2} \cos \alpha = 0$$

ergeben sich

$$H_2 = \frac{G}{2} - S \tan \alpha, \quad N_2 = S.$$

Einsetzen in die Haftbedingung

$$|H_2| < \mu_{01} N_2$$

liefert je nach Richtung von H_2

$$\frac{G}{2} - S \tan \alpha < \mu_{01} S \quad \text{bzw.} \quad -\frac{G}{2} + S \tan \alpha < \mu_{01} S.$$

Hieraus folgt

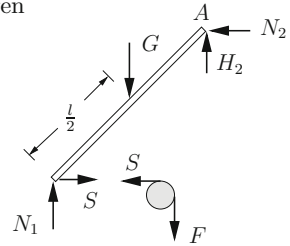
$$\frac{G}{2(\tan \alpha + \mu_{01})} < S < \frac{G}{2(\tan \alpha - \mu_{01})}.$$

Seilhaftung am Zapfen liegt vor, wenn gilt

$$S e^{-\mu_{02} \pi/2} < F < S e^{+\mu_{02} \pi/2}.$$

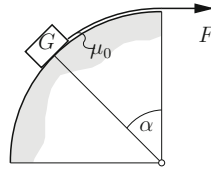
Durch Einsetzen der unteren (oberen) Schranke von S in die linke (rechte) Seite folgt

$$\underline{\underline{\frac{e^{-\mu_{02} \pi/2}}{2(\tan \alpha + \mu_{01})} < \frac{F}{G} < \frac{e^{+\mu_{02} \pi/2}}{2(\tan \alpha - \mu_{01})}}}}$$



Aufgabe 8.15 Der Körper vom Gewicht G wird durch ein Seil gehalten. Zwischen dem Körper bzw. dem Seil und der Fläche herrsche der Haftungskoeffizient μ_0 .

In welchen Grenzen muss F liegen, damit der Körper in Ruhe bleibt?



Lösung Aus den Gleichgewichtsbedingungen

$$\nwarrow : N - G \cos \alpha = 0,$$

$$\nearrow : H + S - G \sin \alpha = 0$$

ergeben sich

$$N = G \cos \alpha, \quad H = G \sin \alpha - S.$$

Einsetzen in die Haftbedingung

$$|H| < \mu_0 N$$

liefert

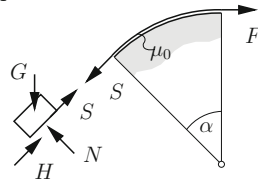
$$G(\sin \alpha - \mu_0 \cos \alpha) < S < G(\sin \alpha + \mu_0 \cos \alpha).$$

Mit der Haftbedingung für das Seil

$$S e^{-\mu_0 \alpha} < F < S e^{\mu_0 \alpha}$$

folgt

$$\underline{\underline{e^{-\mu_0 \alpha} (\sin \alpha - \mu_0 \cos \alpha) < \frac{F}{G} < e^{\mu_0 \alpha} (\sin \alpha + \mu_0 \cos \alpha)}}.$$



Aufgabe 8.16 Welche Strecke x darf das schwere Seil der Länge l herunterhängen, ohne dass es rutscht?

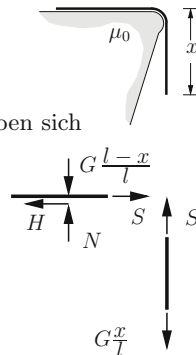
Lösung Aus den Gleichgewichtsbedingungen ergeben sich

$$N = G \frac{l-x}{l}, \quad H = S = G \frac{x}{l}.$$

Einsetzen in die Haftbedingung $H < \mu_0 N$

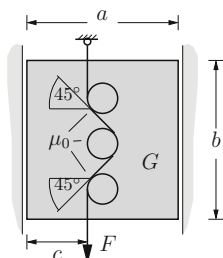
liefert

$$\underline{\underline{\frac{x}{l} < \frac{\mu_0}{1 + \mu_0}}}.$$



A8.17 **Aufgabe 8.17** Ein zwischen glatten Wänden befindlicher Block vom Gewicht G wird durch ein Seil gehalten, das über drei rauhe Bolzen geführt ist.

Wie groß muss die Kraft F sein, damit der Block nicht rutscht? Wie groß sind die Kräfte, die von den Wänden auf den Block ausgeübt werden?



Lösung Gleichgewicht am Gesamtsystem

$$\uparrow: S_3 - G - F = 0,$$

$$\rightarrow: N_1 - N_2 = 0.$$

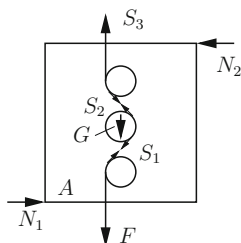
$$\curvearrowright A: G \frac{1}{2}a + Fc - S_3c - N_2b = 0$$

und die Haftbedingungen

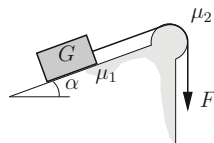
$$S_1 < F e^{\mu_0 \pi/4}, \quad S_2 < S_1 e^{\mu_0 \pi/2}, \quad S_3 < S_2 e^{\mu_0 \pi/4}$$

liefern

$$\underline{\underline{F > \frac{G}{e^{\mu_0 \pi} - 1}}}, \quad \underline{\underline{N_1 = N_2 = G \frac{a - 2c}{2b}}}.$$



A8.18 **Aufgabe 8.18** Wie groß muss die Kraft F sein, damit der Körper vom Gewicht G mit gleichförmiger Geschwindigkeit emporgezogen werden kann? Die Ebene und der Umlenkzapfen seien rau.



Lösung Aus den Gleichgewichtsbedingungen

$$\nearrow: N - G \cos \alpha = 0,$$

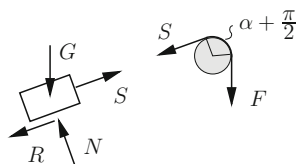
$$\nearrow: S - R - G \sin \alpha = 0$$

und den Reibgesetzen

$$R = \mu_1 N, \quad F = S e^{\mu_2(\alpha + \pi/2)}$$

folgt

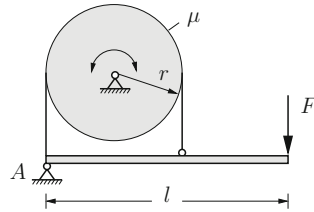
$$\underline{\underline{F = G e^{\mu_2(\alpha + \pi/2)} (\sin \alpha + \mu_1 \cos \alpha)}}.$$



Aufgabe 8.19 Durch die Bandbremse soll auf eine sich drehende Welle das Bremsmoment M_B ausgeübt werden.

Wie groß ist die dazu erforderliche Kraft F , wenn sich die Welle bei bekanntem Reibungskoeffizient μ

- rechtsherum oder
- linksherum dreht?



Lösung Gleichgewicht für den Hebel

$$\overset{\curvearrowright}{A} : -S_2 2r + Fl = 0$$

liefert

$$S_2 = F \frac{l}{2r}.$$

Für Rechtsdrehung lautet das Reibungsgesetz

$$S_1 = S_2 e^{\mu\pi},$$

und das Bremsmoment wird

$$M_B = S_1 r - S_2 r = S_2 r (e^{\mu\pi} - 1).$$

Einsetzen von S_2 ergibt

$$\underline{\underline{F_R = \frac{2M_B}{l(e^{\mu\pi} - 1)}}}.$$

Für Linksdrehung folgt aus dem Reibungsgesetz

$$S_2 = S_1 e^{\mu\pi}$$

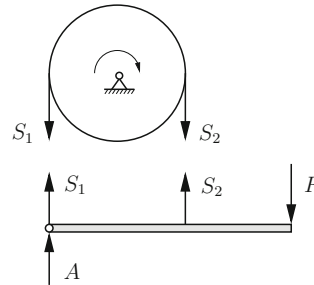
und dem Bremsmoment

$$M_B = S_2 r - S_1 r = S_2 r (1 - e^{-\mu\pi})$$

durch Einsetzen von S_2

$$\underline{\underline{F_L = \frac{2M_B e^{\mu\pi}}{l(e^{\mu\pi} - 1)}}}.$$

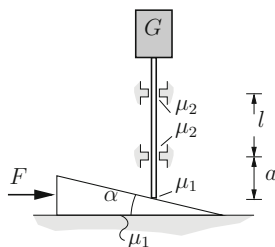
Anmerkung: Wegen $e^{\mu\pi} > 1$ gilt bei gleichem M_B für die Kräfte $F_L > F_R$!



A8.20

Aufgabe 8.20 Durch Verschieben des gewichtslosen Keils soll der Körper vom Gewicht G mit gleichförmiger Geschwindigkeit angehoben werden.

Wie groß ist die dafür benötigte Kraft F , wenn an den Berührungsfächen des Keils der Reibungskoeffizient μ_1 , an den Berührungspunkten des Stabes der Reibungskoeffizient μ_2 herrscht?



Lösung Aus den Gleichgewichtsbedingungen für den Keil und den Stab

$$\textcircled{1} \rightarrow : F - R_1 - R_2 \cos \alpha - N_2 \sin \alpha = 0,$$

$$\uparrow : N_1 - N_2 \cos \alpha + R_2 \sin \alpha = 0,$$

$$\textcircled{2} \rightarrow : N_2 \sin \alpha + R_2 \cos \alpha - N_3 + N_4 = 0,$$

$$\uparrow : N_2 \cos \alpha - R_2 \sin \alpha - R_3 - R_4 - G = 0,$$

$$\overset{\curvearrowright}{A} : -N_3 a + N_4 (l + a) = 0$$

und den Reibungsgesetzen

$$R_1 = \mu_1 N_1, \quad R_2 = \mu_1 N_2, \quad R_3 = \mu_2 N_3, \quad R_4 = \mu_2 N_4$$

ergibt sich durch Auflösen nach F die benötigte Kraft

$$F = G \frac{\mu_1 (\cos \alpha - \mu_1 \sin \alpha) + (\sin \alpha + \mu_1 \cos \alpha)}{(\cos \alpha - \mu_1 \sin \alpha) - \mu_2 \frac{l + 2a}{l} (\sin \alpha + \mu_1 \cos \alpha)}.$$

Anmerkungen:

- Die Reibkräfte müssen entgegengesetzt zur Bewegungsrichtung eingezeichnet werden.
- Wenn der Nenner Null wird ($F \rightarrow \infty$), ist das System selbthemmend.

