Kapitel 2: Lineare Optimierung

Wir beginnen mit Definitionen und beschäftigen uns anschließend mit der graphischen Lösung von linearen Optimierungsproblemen mit zwei Variablen. Neben verschiedenen Schreibweisen werden in Kap. 2.3 Eigenschaften von linearen Optimierungsproblemen behandelt; in Kap. 2.4 beschreiben wir das nach wie vor wichtigste Verfahren zu deren Lösung, den *Simplex-Algorithmus*, in verschiedenen Varianten. In Kap. 2.5 folgen Aussagen zur Dualität in der linearen Optimierung und zur Sensitivitätsanalyse. Kap. 2.6 behandelt Modifikationen des Simplex-Algorithmus (implizite Berücksichtigung unterer Schranken für Variablen, revidierter Simplex-Algorithmus). Probleme und Lösungsmöglichkeiten bei mehrfacher Zielsetzung werden in Kap. 2.7 dargestellt. Kap. 2 schließt mit Problemen der Spieltheorie, bei deren Lösung die Dualitätstheorie von Nutzen ist.

2.1 Definitionen

Definition 2.1: Unter einem **linearen Optimierungs-** oder **Programmierungsproblem (LP-Problem** oder kürzer **LP)** versteht man die Aufgabe, eine *lineare (Ziel-) Funktion*

$$F(x_1,...,x_p) = c_1 x_1 + ... + c_p x_p \tag{2.1}$$

zu maximieren (oder zu minimieren) unter Beachtung von linearen Nebenbedingungen (= Restriktionen) der Form

$$a_{i1} x_1 + ... + a_{ip} x_p \le b_i \qquad \text{für } i = 1,...,m_1 \tag{2.2}$$

$$a_{i1} x_1 + ... + a_{ip} x_p \ge b_i \qquad \text{für } i = m_1+1,...,m_2 \tag{2.3}$$

$$a_{i1} x_1 + ... + a_{ip} x_p = b_i \qquad \text{für } i = m_2+1,...,m \tag{2.4}$$

und zumeist unter Berücksichtigung der *Nichtnegativitätsbedingungen*

$$x_j \ge 0 \qquad \text{für (einige oder alle) } j = 1,...,p \tag{2.5}$$

Definition 2.2:

a) Einen Punkt (oder Vektor) $\mathbf{x} = (x_1,...,x_p)$ des $\mathbb{R}^p$, der alle Nebenbedingungen (2.2) – (2.4) erfüllt, nennt man **Lösung** des LP.

b) Erfüllt $\mathbf{x}$ außerdem (2.5), so heißt $\mathbf{x}$ **zulässige Lösung** (zulässiger Punkt).

c) Eine zulässige Lösung $\mathbf{x^*} = (x_1^*, ..., x_p^*)$ heißt **optimale Lösung** (optimaler Punkt) des LP, wenn es kein zulässiges $\mathbf{x}$ mit größerem (bei einem Maximierungsproblem) bzw. mit kleinerem (bei einem Minimierungsproblem) Zielfunktionswert als $F(\mathbf{x^*})$ gibt.

d) Mit X bezeichnen wir die *Menge der zulässigen Lösungen*, mit X^* die *Menge der optimalen Lösungen* eines LP.

W. Domschke, A. Drexl, *Einführung in Operations Research*, 8. Aufl., Springer-Lehrbuch,
DOI 10.1007/978-3-642-18112-2_2, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011

2.2 Graphische Lösung von linearen Optimierungsproblemen

Wir betrachten das folgende **Produktionsplanungsproblem**, das als LP formuliert und gelöst werden kann.

Ein Unternehmen kann aufgrund seiner Ausstattung mit Personal, Betriebsmitteln und Rohstoffen in einer Planperiode zwei Produkte P_1 und P_2 herstellen. Die realisierbaren Mengeneinheiten (ME) der Produkte werden durch drei Inputfaktoren begrenzt:

1. Eine zur Herstellung aller Produkte gemeinsam genutzte Maschine, für die lediglich zeitliche Abschreibungen zu tätigen sind. Ihre Nutzung für die Produktion verursacht somit keine Einzelkosten.
2. Einen verderblichen[1] Rohstoff, von dem sich 720 ME auf Lager befinden; ein am Ende der Periode verbleibender Rest ist nicht verwertbar.
3. Knappe Kapazitäten in der Montageabteilung für P_2.

Die pro Periode verfügbaren Kapazitätseinheiten (KE) und Bedarfe je hergestellter ME (Produktionskoeffizienten) sowie die Deckungsbeiträge db_j sind Tab. 2.1 zu entnehmen.

	P_1	P_2	verfügbare Kapazität
Maschine	1	1	100
Rohstoff	6	9	720
Montageabteilung	0	1	60
db_j	10	20	

Tab. 2.1

Wie viele ME soll das Unternehmen pro Periode von jedem Produkt herstellen, damit es einen größtmöglichen Gesamtdeckungsbeitrag (DB) erzielt?

Zur mathematischen Formulierung des Problems wählen wir folgende Variablen:

x_1 : von P_1 herzustellende ME
x_2 : von P_2 herzustellende ME

Damit erhalten wir das folgende Modell:

$$\text{Maximiere } F(x_1,x_2) = 10x_1 + 20x_2 \tag{2.6}$$

unter den Nebenbedingungen

$$x_1 + x_2 \le 100 \quad \text{Maschinenrestriktion} \tag{2.7}$$

$$6x_1 + 9x_2 \le 720 \quad \text{Rohstoffrestriktion} \tag{2.8}$$

$$x_2 \le 60 \quad \text{Montagerestriktion} \tag{2.9}$$

$$x_1, x_2 \ge 0 \tag{2.10}$$

1 Die Annahmen „lediglich zeitliche Abschreibungen“ und „verderblicher Rohstoff“ für die beiden ersten Engpassfaktoren sind im Rahmen der Bewertung optimaler Lösungen in Kap. 2.5.3 von Bedeutung; siehe dort v.a. Bem. 2.11.

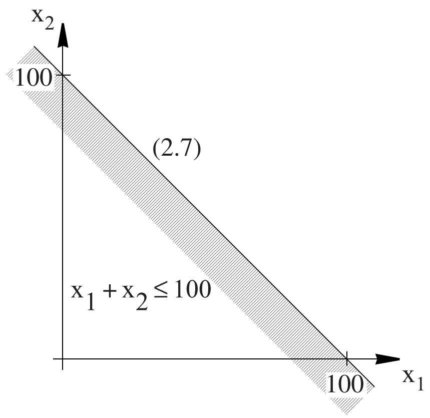

Abb. 2.1

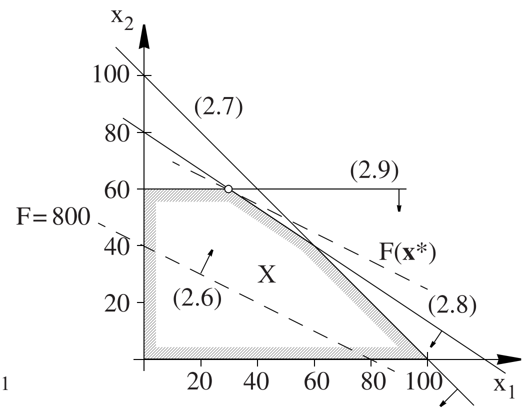

Abb. 2.2

Wir wollen das Problem graphisch lösen. Dazu überlegen wir uns, welche Punkte **x** hinsichtlich jeder einzelnen Nebenbedingung (siehe den schraffierten Bereich in Abb. 2.1 für die Nebenbedingung (2.7)) und hinsichtlich aller Nebenbedingungen (siehe X in Abb. 2.2)) zulässig sind.

Den zulässigen Bereich bzgl. Nebenbedingung (2.7) etwa erhalten wir, indem wir uns zunächst überlegen, welche Punkte die Bedingung als Gleichung erfüllen; es handelt sich um alle Punkte auf der Geraden, die durch $\mathbf{x} = (100,0)$ und $\mathbf{x} = (0,100)$ verläuft. Ferner erfüllt der Ursprung die gegebene Ungleichung, so dass wir den schraffierten Halbraum erhalten. Die Menge X in Abb. 2.2 ist der Durchschnitt der für alle Nebenbedingungen einschließlich der Nichtnegativitätsbedingungen ermittelbaren zulässigen Lösungen.

Danach zeichnen wir eine Gerade gleichen Gesamtdeckungsbeitrags (eine Iso-DB-Linie), z.B. für F = 800.

Gesucht ist ein Punkt, für den ein maximaler DB erzielt wird. Daher ist die Zielfunktionsgerade so lange parallel (in diesem Fall nach oben) zu verschieben, bis der zulässige Bereich gerade noch berührt wird. Wir erhalten die optimale Lösung $\mathbf{x}^* = (x_1^* = 30, x_2^* = 60)$ mit $F(\mathbf{x}^*) = 1500$ GE als zugehörigem DB.

Als zweites **Beispiel** wollen wir das folgende (stark vereinfachte – Agrarwissenschaftler mögen uns verzeihen!) *Mischungsproblem* betrachten und graphisch lösen:

Ein Viehzuchtbetrieb füttert Rinder mit zwei tiermehlfreien Futtersorten S_1 und S_2 (z.B. Rüben und Heu). Die Tagesration eines Rindes muss Nährstoffe I, II bzw. III im Umfang von mindestens 6, 12 bzw. 4 Gramm enthalten. Die Nährstoffgehalte in Gramm pro kg und Preise in GE pro kg der beiden Sorten zeigt Tab. 2.2.

	Sorte S_1	Sorte S_2	Mindest-menge
Nährstoff I	2	1	6
Nährstoff II	2	4	12
Nährstoff III	0	4	4
Preis in GE/kg	5	7	

Tab. 2.2

Wie viele kg von Sorte S_1 bzw. S_2 muss jede Tagesration enthalten, wenn sie unter Einhaltung der Nährstoffbedingungen kostenminimal sein soll?

Mit den Variablen

x_1 : kg von Sorte S_1 pro Tagesration

x_2 : kg von Sorte S_2 pro Tagesration

lautet das Optimierungsproblem:

Minimiere $F(x_1,x_2) = 5x_1 + 7x_2$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcrl} 2x_1 & + & x_2 & \geq & 6 & \text{Nährstoff I} \\ 2x_1 & + & 4x_2 & \geq & 12 & \text{Nährstoff II} \\ & & 4x_2 & \geq & 4 & \text{Nährstoff III} \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 & \end{array}$$

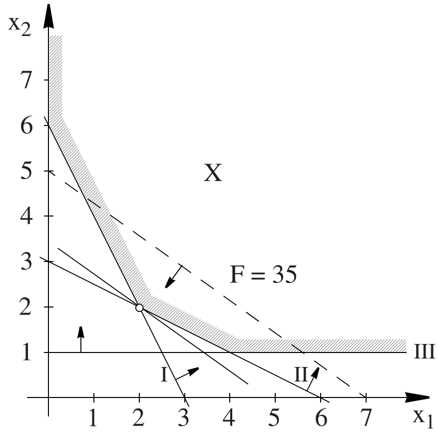

Abb. 2.3

Auf graphische Weise (siehe Abb. 2.3) erhalten wir die optimale Lösung $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*)$ mit $x_1^* = x_2^* = 2$. Eine Tagesration kostet damit $F(\mathbf{x}^*) = 24$ GE.

2.3 Formen und Eigenschaften von LPs

2.3.1 Optimierungsprobleme mit Ungleichungen als Nebenbedingungen

Jedes beliebige LP lässt sich in der folgenden Form aufschreiben:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Maximiere } F(x_1,...,x_p) = \sum\limits_{j=1}^{p} c_j x_j \\ \text{unter den Nebenbedingungen} \\ \qquad \sum\limits_{j=1}^{p} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad \text{für } i = 1,...,m \\ \qquad x_j \geq 0 \qquad \text{für } j = 1,...,p \end{array}\right\} \tag{2.11}$$

Jedes beliebige LP lässt sich *auch* wie folgt darstellen:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Minimiere } F(x_1,...,x_p) = \sum\limits_{j=1}^{p} c_j x_j \\ \text{unter den Nebenbedingungen} \\ \qquad \sum\limits_{j=1}^{p} a_{ij} x_j \geq b_i \qquad \text{für } i = 1,...,m \\ \qquad x_j \geq 0 \qquad \text{für } j = 1,...,p \end{array}\right\} \tag{2.12}$$

Die Aussagen gelten aufgrund folgender Überlegungen:

- Eine zu minimierende Zielfunktion $z = F(\mathbf{x})$ lässt sich durch die zu maximierende Zielfunktion $-z = -F(\mathbf{x})$ ersetzen und umgekehrt. Eine $\le$ - Nebenbedingung lässt sich durch Multiplikation beider Seiten mit -1 in eine $\ge$ - Restriktion transformieren.
- Eine Gleichung $a_{i1}x_1 + ... + a_{ip}x_p = b_i$ kann durch zwei Ungleichungen $a_{i1}x_1 + ... + a_{ip}x_p \le b_i$ und $-a_{i1}x_1 - ... - a_{ip}x_p \le -b_i$ ersetzt werden.
- Falls eine Variable x_j beliebige Werte aus $\mathbb{R}$ annehmen darf, so kann man sie durch zwei Variablen $x_j' \ge 0$ und $x_j'' \ge 0$ substituieren; dabei gilt $x_j := x_j' - x_j''$. Vgl. hierzu Aufgabe 2.6 im Übungsbuch Domschke et al. (2011).

2.3.2 Die Normalform eines linearen Optimierungsproblems

Erweitert man die Nebenbedingungen (2.2) und (2.3) um **Schlupfvariablen** $x_{p+1},...,x_n$, die in der Zielfunktion (2.1) mit 0 bewertet werden, so entsteht aus (2.1) – (2.5) das folgende Modell:

$$\text{Maximiere } F(x_1,...,x_p,x_{p+1},...,x_n) = \sum_{j=1}^{p} c_j x_j + \sum_{j=p+1}^{n} 0 \cdot x_j$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{p} a_{ij}x_j + x_{p+i} &= b_i && \text{für } i = 1,...,m_1\\
\sum_{j=1}^{p} a_{ij}x_j - x_{p+i} &= b_i && \text{für } i = m_1+1,...,m_2\\
\sum_{j=1}^{p} a_{ij}x_j &= b_i && \text{für } i = m_2+1,...,m\\
x_j &\ge 0 && \text{für } j = 1,...,n
\end{aligned}$$

Die ursprünglichen Variablen $x_1,...,x_p$ des Problems bezeichnet man als **Strukturvariablen**. Wiedergegeben in der Form (2.13), spricht man von der **Normalform eines LP**.

$$\left.\begin{aligned}
&\text{Maximiere } F(x_1,...,x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j\\
&\text{unter den Nebenbedingungen}\\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad \text{für } i = 1,...,m\\
&\qquad\qquad x_j \ge 0 \qquad \text{für } j = 1,...,n
\end{aligned}\right\} \tag{2.13}$$

Im Folgenden verwenden wir für LPs auch die **Matrixschreibweise**; für ein Problem in der Normalform (2.13) sieht sie wie folgt aus:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Maximiere } F(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{unter den Nebenbedingungen} \\ \qquad\qquad A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \qquad\qquad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}\right\} \tag{2.14}$$

Dabei sind **c** und **x** jeweils n-dimensionale Vektoren; **b** ist ein m-dimensionaler Vektor und A eine $(m \times n)$-Matrix. Im Allgemeinen gilt $n \geq m$ und oft $n \gg m$; siehe auch Kap. 2.6.2.

Definition 2.3: Gelten in (2.14) für die Vektoren **b** und **c** sowie die Matrix A die Eigenschaften

$$\mathbf{b} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_{n-m} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1,n-m} & 1 & & 0 \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & \\ \cdot & & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & & \cdot \\ a_{m1} & \dots & a_{m,n-m} & 0 & & 1 \end{array}\right],$$

so sagt man, das LP besitze **kanonische Form**.

2.3.3 Eigenschaften von linearen Optimierungsproblemen

Wir beschäftigen uns im Folgenden vor allem mit Eigenschaften der Menge aller zulässigen Lösungen X und aller optimalen Lösungen X* eines LP. Dabei setzen wir die Begriffe „beschränkte Menge“, „unbeschränkte Menge“ sowie „lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit von Vektoren“ als bekannt voraus; siehe dazu etwa Büning et al. (2000), Rommelfanger (2001, Kap. 3) sowie Opitz (2002). Wir definieren aber zu Beginn, was man unter einer konvexen Linearkombination von Vektoren im $\mathbb{R}^n$ und einem Eckpunkt oder Extrempunkt (einer Menge) versteht.

Definition 2.4: Eine Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ heißt **konvex**, wenn mit je zwei Punkten $\mathbf{x}^1 \in K$ und $\mathbf{x}^2 \in K$ auch jeder Punkt $\mathbf{y} = \lambda \cdot \mathbf{x}^1 + (1-\lambda) \cdot \mathbf{x}^2$ mit $0 < \lambda < 1$ zu K gehört.

Die **konvexe Hülle** H einer beliebigen Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ ist die kleinste K enthaltende konvexe Menge.

Beispiele: Man betrachte die in den Abbildungen 2.4 und 2.5 dargestellten Mengen K.

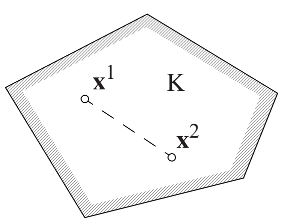

Abb. 2.4

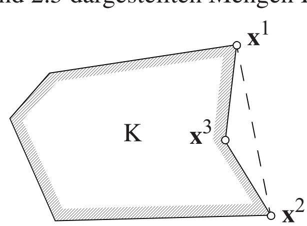

Abb. 2.5

Def. 2.4 besagt, dass mit zwei beliebigen Punkten $\mathbf{x}^1$ und $\mathbf{x}^2$ einer konvexen Menge K auch alle Punkte auf der Strecke zwischen $\mathbf{x}^1$ und $\mathbf{x}^2$ zu K gehören. Die in Abb. 2.4 dargestellte Menge ist daher konvex. Die in Abb. 2.5 dargestellte Menge ist dagegen nicht konvex, da z.B. die Punkte der $\mathbf{x}^1$ und $\mathbf{x}^2$ verbindenden Strecke nicht zu ihr gehören. Die konvexe Hülle H besteht hier aus der Vereinigung von K mit allen Punkten des von $\mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^2$ und $\mathbf{x}^3$ aufgespannten Dreiecks.

Definition 2.5: Seien $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2,..., \mathbf{x}^r$ Punkte des $\mathbb{R}^n$ und $\lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_r$ nichtnegative reelle Zahlen (also Werte aus $\mathbb{R}_+$). Setzt man $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1$ voraus, so wird $\mathbf{y} := \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot \mathbf{x}^i$ als **konvexe Linearkombination** oder **Konvexkombination** der Punkte $\mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^2$,..., $\mathbf{x}^r$ bezeichnet.

Eine **echte konvexe Linearkombination** liegt vor, wenn außerdem $\lambda_i > 0$ für alle i = 1,...,r gilt.

Definition 2.6: Die Menge aller konvexen Linearkombinationen endlich vieler Punkte $\mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^2$ und $\mathbf{x}^r$ des $\mathbb{R}^n$ wird (durch diese Punkte aufgespanntes) **konvexes Polyeder** genannt.

Bemerkung 2.1: Das durch r Punkte aufgespannte konvexe Polyeder ist identisch mit der konvexen Hülle der aus diesen Punkten bestehenden Menge.

Definition 2.7: Ein Punkt **y** einer konvexen Menge K heißt **Eckpunkt** oder **Extrempunkt** von K, wenn er sich nicht als *echte* konvexe Linearkombination zweier verschiedener Punkte $\mathbf{x}^1$ und $\mathbf{x}^2$ von K darstellen lässt.

Bemerkung 2.2: Ein konvexes Polyeder enthält endlich viele Eckpunkte.

Beispiele:

a) Man betrachte Abb. 2.6. Das Dreieck zwischen den Eckpunkten $\mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^2$ und $\mathbf{x}^3$ ist das durch diese Punkte aufgespannte konvexe Polyeder. Jeder Punkt $\mathbf{x} = (x_1,x_2)$ im $\mathbb{R}^2$ mit den Koordinaten $x_1 = \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 4 + \lambda_3 \cdot 0$ und $x_2 = \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 + \lambda_3 \cdot 3$ (mit $\lambda_i \geq 0$ für alle i = 1, 2, 3 und $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$) ist konvexe Linearkombination von $\mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^2$ und $\mathbf{x}^3$.

b) Die in Abb. 2.7 dargestellte Menge K ist konvex; wegen ihrer Unbeschränktheit ist sie jedoch kein konvexes Polyeder.

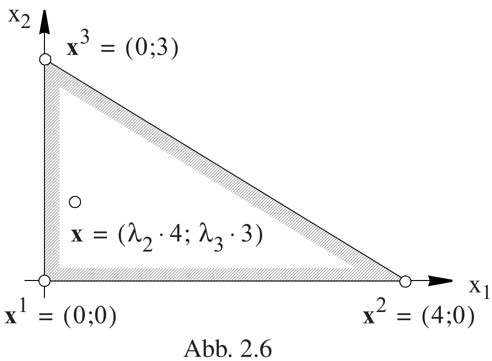

Abb. 2.6

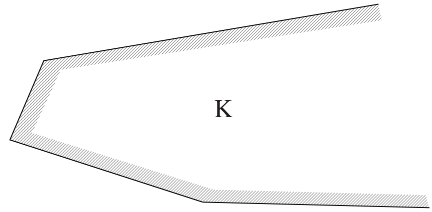

Abb. 2.7

Wir formulieren nun einige wichtige Sätze. Beweise hierzu findet man beispielsweise in Neumann und Morlock (2002, S. 43 ff.).

Satz 2.1: Gegeben sei ein LP, z.B. in der Normalform (2.13). Es gilt:

a) Die Menge der hinsichtlich jeder einzelnen der Nebenbedingungen zulässigen Lösungen ist konvex.

b) Die Menge X aller zulässigen Lösungen des Problems ist als Durchschnitt konvexer Mengen ebenfalls konvex mit endlich vielen Eckpunkten.

Satz 2.2: Eine lineare Funktion F, die auf einem konvexen Polyeder X definiert ist, nimmt ihr Optimum in mindestens einem Eckpunkt des Polyeders an.

Bemerkung 2.3: Man kann zeigen, dass auch bei einem unbeschränkten zulässigen Bereich X eines LPs mindestens eine Ecke von X optimale Lösung ist, falls überhaupt eine optimale Lösung des Problems existiert. Daher kann man sich bei der Lösung von LPs auf die Untersuchung der Eckpunkte des zulässigen Bereichs beschränken.

Satz 2.3: Die Menge X^* aller optimalen Lösungen eines LPs ist konvex.

In Def. 2.8 geben wir eine präzise, aber für die meisten Leser sicher nicht sehr anschauliche Definition des Begriffs „Basislösung". Anschaulicher, aber nicht ganz zutreffend gilt:
Eine *Basislösung* für ein $(m \times n)$-Problem in Normalform erhält man, indem man $n-m$ Variablen (wir bezeichnen sie unten als Nichtbasisvariablen) gleich 0 setzt und mit den restlichen m Variablen (Basisvariablen) das verbleibende Gleichungssystem löst.

Definition 2.8:

a) Gegeben sei ein LP in der Normalform (2.13) mit m' als Rang der $(m \times n)$-Matrix A (Anzahl der linear unabhängigen Zeilen- bzw. Spaltenvektoren) mit $n \ge m \ge m'$. Eine Lösung **x** heißt **Basislösung** des Problems, wenn $n - m'$ der Variablen x_i gleich null und die zu den restlichen Variablen gehörenden Spaltenvektoren $\mathbf{a}_j$ linear unabhängig sind.

b) Eine Basislösung, die alle Nichtnegativitätsbedingungen erfüllt, heißt **zulässige Basislösung**.

c) Die m' (ausgewählten) linear unabhängigen Spaltenvektoren $\mathbf{a}_j$ einer (zulässigen) Basislösung heißen **Basisvektoren**; die zugehörigen x_j nennt man **Basisvariablen**. Alle übrigen Spaltenvektoren $\mathbf{a}_j$ heißen **Nichtbasisvektoren**; die zugehörigen x_j nennt man **Nichtbasisvariablen**.

d) Die Menge aller Basisvariablen x_j einer Basislösung bezeichnet man kurz als **Basis**.

Bemerkung 2.4: Bei den meisten der von uns betrachteten Probleme gilt $m' = m$. Insbesondere der in Kap. 2.5.2 behandelte Sonderfall 4 sowie das klassische Transportproblem in Kap. 4.1 bilden Ausnahmen von dieser Regel.

Satz 2.4: Ein Vektor **x** ist genau dann zulässige Basislösung eines LP, wenn er einen Eckpunkt von X darstellt.

Beispiel: Das Problem (2.6) – (2.10) besitzt, in Normalform gebracht, folgendes Aussehen:

Maximiere $F(x_1,...,x_5) = 10x_1 + 20x_2$

unter den Nebenbedingungen

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 100 \\
6x_1 & + & 9x_2 & & & + & x_4 & & & = & 720 \\
 & & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 60 \\
 & & & & & & & & x_1,...,x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Eckpunkt	BV	NBV	BL $(x_1,...,x_5)$
A = (0,0)	x_3, x_4, x_5	x_1, x_2	(0,0,100,720,60)
B = (0,60)	x_2, x_3, x_4	x_1, x_5	(0,60,40,180,0)
C = (30,60)	x_1, x_2, x_3	x_4, x_5	(30,60,10,0,0)
D = (60,40)	x_1, x_2, x_5	x_3, x_4	(60,40,0,0,20)
E = (100,0)	x_1, x_4, x_5	x_2, x_3	(100,0,0,120,60)

Tab. 2.3

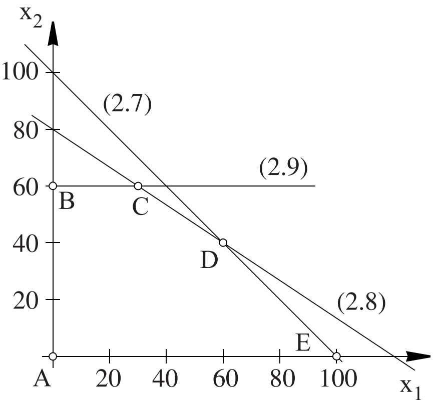

Abb. 2.8

Alle zulässigen Basislösungen (BL) sind aus Tab. 2.3 ersichtlich (vgl. hierzu auch Abb. 2.8). Jeder Eckpunkt wird dabei durch die Basisvariablen (BV) und die Nichtbasisvariablen (NBV) beschrieben.

2.4 Der Simplex-Algorithmus

Wir beschreiben im Folgenden den Simplex-Algorithmus.[2] Er wird zumeist **G.B. Dantzig** zugeschrieben, der die Vorgehensweise im Jahre 1947 veröffentlichte. Erste Arbeiten dazu stammen jedoch von dem russischen Mathematiker **L.V. Kantorovich** aus dem Jahre 1939.

Der Simplex-Algorithmus untersucht, wie unten deutlich wird, den Rand des zulässigen Bereichs nach einer optimalen Lösung und zählt nach wie vor zu den leistungsfähigsten Verfahren zur Lösung von LPs der Praxis. Im Gegensatz dazu suchen so genannte **Interior Point - Methoden**, ausgehend von einer im Inneren des zulässigen Bereichs liegenden Lösung, nach einer optimalen Lösung. Zu den bekanntesten Vorgehensweisen dieser Art gehören die *Ellipsoid-Methode* von Khachijan (1979) und die *projektive Methode* von Karmarkar (1984). Sie sind zwar hinsichtlich des Rechenzeitbedarfs im ungünstigsten Fall,[3]

2 Der Name Simplex-Algorithmus ist von der Bezeichnung **Simplex** für ein durch n+1 Punkte des $\mathbb{R}^n$ aufgespanntes konvexes Polyeder abgeleitet.

3 Zur Abschätzung des Rechenaufwands des Simplex-Algorithmus vgl. z.B. Papadimitriou und Steiglitz (1982, S. 166 ff.) oder Borgwardt (2001, Kap. 9). In Klee und Minty (1972) findet sich ein Beispiel, für das der Simplex-Algorithmus nichtpolynomialen Rechenaufwand erfordert. Zur Komplexität allgemein siehe auch Kap. 6.2.1.

im Allgemeinen aber nicht im durchschnittlichen Laufzeitverhalten dem Simplex-Algorithmus überlegen. Interior Point - Methoden werden z.B. in Beisel und Mendel (1987), Bazaraa et al. (1990), Dantzig und Thapa (1997, 2003) sowie Schrijver (1998) ausführlich dargestellt.

Wir beschreiben im Folgenden verschiedene Varianten des Simplex-Algorithmus, jeweils für **Maximierungsprobleme**. Wir beginnen mit dem *primalen* Simplex-Algorithmus, der von einer bekannten zulässigen Basislösung ausgeht. In Kap. 2.4.2 beschäftigen wir uns mit Vorgehensweisen zur Bestimmung einer zulässigen Basislösung. Neben der M-Methode beschreiben wir hier den *dualen* Simplex-Algorithmus. In Kap. 2.5.2 behandeln wir Sonderfälle, die bei LPs auftreten können, und Möglichkeiten zu deren Identifizierung.

2.4.1 Der Simplex-Algorithmus bei bekannter zulässiger Basislösung

2.4.1.1 Darstellung des Lösungsprinzips anhand eines Beispiels

Wir gehen von dem soeben in Normalform angegebenen Produktionsplanungsproblem (2.6) – (2.10) aus. Wählen wir die Schlupfvariablen als Basisvariablen und die Variablen x_1 und x_2 (die *Strukturvariablen* des Problems) als Nichtbasisvariablen, so erhalten wir als *erste zulässige Basislösung*:

$x_3 = 100,\ x_4 = 720,\ x_5 = 60,\ x_1 = x_2 = 0$ mit $F = 0$

Sie ist durch Isolierung der Basisvariablen in den jeweiligen Nebenbedingungen auch wie unten angegeben darstellbar.

Daraus wird ersichtlich: Der Deckungsbeitrag F wächst um 10 GE, wenn x_1 um 1 ME erhöht wird, und um 20 GE, wenn x_2 um 1 ME erhöht wird.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_3 & = & 100 & - & x_1 & - & x_2 \\ x_4 & = & 720 & - & 6x_1 & - & 9x_2 \\ x_5 & = & 60 & & & - & x_2 \\ F & = & 0 & + & 10x_1 & + & 20x_2 \end{array}$$

1. zulässige Basislösung

Als neue Basisvariable wählt man diejenige bisherige Nichtbasisvariable, die pro ME die größte Verbesserung des Zielfunktionswertes erbringt. In unserem Beispiel wird daher x_2 neue Basisvariable.

x_2 kann maximal den Wert 60 annehmen, wenn keine andere Variable negativ werden soll (damit bleibt $x_3 = 40 > 0$, $x_4 = 180 > 0$; x_5 wird 0 und neue Nichtbasisvariable; $x_1 = 0$ bleibt Nichtbasisvariable).

Zweite zulässige Basislösung: Man erhält sie durch Einsetzen von $x_2 = 60 - x_5$ in die Gleichungen der ersten zulässigen Basislösung. Sie ist wie rechts ausgeführt darstellbar.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_3 & = & 40 & - & x_1 & + & x_5 \\ x_4 & = & 180 & - & 6x_1 & + & 9x_5 \\ x_2 & = & 60 & & & - & x_5 \\ F & = & 1200 & + & 10x_1 & - & 20x_5 \end{array}$$

2. zulässige Basislösung

F wächst um 10 GE, wenn x_1 um 1 ME erhöht wird, und fällt um 20 GE, wenn x_5 um 1 ME erhöht wird.

x_1 wird neue Basisvariable mit Wert 30 (damit ergibt sich $x_3 = 10$, $x_2 = 60$; $x_4 = 0$ und Nichtbasisvariable; $x_5 = 0$ bleibt Nichtbasisvariable).

Dritte zulässige Basislösung: Man erhält sie durch Einsetzen von $x_1 = 30 - \frac{1}{6} \cdot x_4 + \frac{3}{2} \cdot x_5$ in die Gleichungen der zweiten Basislösung. Sie ist wie rechts ausgeführt darstellbar.

$$
\begin{array}{lcrclcl}
x_3 & = & 10 & + & \frac{1}{6} \cdot x_4 & - & \frac{1}{2} \cdot x_5 \\
x_1 & = & 30 & - & \frac{1}{6} \cdot x_4 & + & \frac{3}{2} \cdot x_5 \\
x_2 & = & 60 & & & - & x_5 \\
F & = & 1500 & - & \frac{5}{3} \cdot x_4 & - & 5 \cdot x_5
\end{array}
$$

3. zulässige Basislösung

Diese Basislösung mit $x_1 = 30$, $x_2 = 60$, $x_3 = 10$, $x_4 = x_5 = 0$ und $F = 1500$ ist optimal (eine Erhöhung von x_4 bzw. x_5 würde zu einer Verminderung des Deckungsbeitrags führen).

Man vergleiche den von Ecke zu Ecke $(A \rightarrow B \rightarrow C)$ fortschreitenden Lösungsgang anhand von Abb. 2.8.

2.4.1.2 *Der primale Simplex-Algorithmus*

Er schreitet von Ecke zu (benachbarter) Ecke fort, indem jeweils genau eine Nichtbasisvariable neu in die Basis kommt und dafür genau eine bisherige Basisvariable diese verlässt.

Zur Veranschaulichung des Verfahrens und für „Handrechnungen" benutzt man ein **Simplextableau**. Für ein in kanonischer Form vorliegendes Problem besitzt es das in Tab. 2.4 wiedergegebene Aussehen.

Die letzte Zeile des Tableaus, die so genannte **Ergebniszeile** oder **F-Zeile**, kann wie folgt als Gleichung geschrieben werden:

$$- c_1 x_1 - c_2 x_2 - \ldots - c_{n-m} x_{n-m} + F = \text{aktueller Zielfunktionswert}$$

F wird als Basisvariable interpretiert. Da sie die Basis nie verlässt, kann auf die F-Spalte verzichtet werden:

		Nichtbasisvariable			Basisvariable				
		x_1	. . .	x_{n-m}	x_{n-m+1}	. . .	x_n	F	b_i
Basisvariable	x_{n-m+1}	a_{11}	. . .	$a_{1,n-m}$	1	. . .	0	0	b_1
	.	.		.		.		.	.
	.	.		.		.		.	.
	.	.		.		.		.	.
	x_n	a_{m1}	. . .	$a_{m,n-m}$	0	. . .	1	0	b_m
		$-c_1$	. . .	$-c_{n-m}$	0	. . .	0	1	akt. Zfw.

Tab. 2.4: Simplextableau

Die anfängliche *Eintragung der Zielfunktionskoeffizienten* für die Nichtbasisvariablen *mit negativem Vorzeichen* führt dazu, dass (im Gegensatz zu unserer Darstellung in Kap. 2.4.1.1) eine Lösung stets dann verbessert werden kann, wenn eine Nichtbasisvariable mit negativer

Eintragung in der F-Zeile vorliegt. Diese Schreibweise für die F-Zeile entspricht der in der Literatur üblichen.

Eine Iteration des primalen Simplex-Algorithmus

Voraussetzung: Eine zulässige Basislösung in der in Tab. 2.4 dargestellten Form; die aktuellen Eintragungen im Simplextableau seien jeweils mit a'_{ij}, b'_i und c'_j bezeichnet.

Durchführung: Jede Iteration des Simplex-Algorithmus besteht aus folgenden drei Schritten.

Schritt 1 (Wahl der Pivotspalte t):

Enthält die F-Zeile nur nichtnegative Werte, so ist die aktuelle Basislösung optimal; Abbruch des Verfahrens.

Sonst suche diejenige Spalte t mit dem kleinsten (negativen) Wert in der F-Zeile (stehen mehrere Spalten mit kleinstem Wert zur Auswahl, so wähle unter diesen eine beliebige). Die zugehörige Nichtbasisvariable x_t wird neu in die Basis aufgenommen. Die Spalte t nennt man **Pivotspalte**.[4]

Schritt 2 (Wahl der Pivotzeile s):

Sind in der Pivotspalte alle $a'_{it} \le 0$, so kann für das betrachtete Problem keine optimale Lösung angegeben werden (vgl. Sonderfall 2 in Kap. 2.5.2); Abbruch des Verfahrens.

Sonst bestimme eine Zeile s, für die gilt: $\frac{b'_s}{a'_{st}} = \min \left\{ \frac{b'_i}{a'_{it}} \;\middle|\; i = 1,...,m \text{ mit } a'_{it} > 0 \right\}$

Die zu Zeile s gehörende Basisvariable verlässt die Basis. Die Zeile s nennt man **Pivotzeile**, das Element a'_{st} heißt **Pivotelement**.

Schritt 3 (Berechnung der neuen Basislösung, des neuen Simplextableaus):

a) Durch lineare Transformation des Nebenbedingungssystems wird unter der neuen Basisvariablen ein Einheitsvektor mit $a'_{st} = 1$ geschaffen (Gauß-Jordan-Verfahren).

b) Durch Vertauschen der Spalten der beiden beim Basistausch beteiligten Variablen einschließlich der Variablenbezeichnung könnte ein neues Tableau in kanonischer Form (gemäß Tab. 2.4) ermittelt werden.

Wie unten ersichtlich wird, kann auf Schritt 3b verzichtet werden.

* * * * *

Als **Beispiel** betrachten wir wiederum unser Produktionsplanungsproblem. Der Verfahrensablauf kann anhand von Tab. 2.5 nachvollzogen werden. Das jeweilige Pivotelement ist durch eckige Klammern hervorgehoben. Fehlende Eintragungen besitzen den Wert 0.

Auf die Bedeutung der Einträge in der Ergebniszeile gehen wir in Kap. 2.5.3 ausführlich ein. In Kap. 11.1 lösen wir das Problem mit Hilfe des Tabellenkalkulationsprogramms Excel.

4 Der französisch ausgesprochene Begriff „Pivot“ ist abgeleitet von pivoter = drehen, schwenken. In jeder Iteration des Simplex-Algorithmus erfolgt in der Basis der Austausch von genau einer Variablen.
Das Wort *pivot* existiert auch im Englischen; die deutsche Übersetzung lautet *Dreh- und Angelpunkt*.

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	
x_3	1	1	1			100	Erste Basislösung:
x_4	6	9		1		720	$x_3 = 100$, $x_4 = 720$, $x_5 = 60$;
x_5		[1]			1	60	$x_1 = x_2 = 0$; $F = 0$
F	–10	–20	0	0	0	0	
x_3	1		1		–1	40	Zweite Basislösung:[5]
x_4	[6]			1	–9	180	$x_2 = 60$, $x_3 = 40$, $x_4 = 180$;
x_2		1			1	60	$x_1 = x_5 = 0$; $F = 1200$
F	–10	0	0	0	20	1200	
x_3			1	–1/6	1/2	10	Optimale Basislösung:
x_1	1			1/6	–3/2	30	$x_1 = 30$, $x_2 = 60$, $x_3 = 10$;
x_2		1			1	60	$x_4 = x_5 = 0$; $F = 1500$
F	0	0	0	5/3	5	1500	Tab. 2.5

2.4.2 Verfahren zur Bestimmung einer zulässigen Basislösung

Wir beschreiben zwei verschiedene Vorgehensweisen zur Bestimmung einer (ersten) zulässigen Basislösung, den dualen Simplex-Algorithmus und die so genannte M-Methode. Ein Verfahren dieser Art ist erforderlich, wenn ein LP nicht in kanonischer Form gegeben und nicht leicht in diese transformierbar ist.

2.4.2.1 Der duale Simplex-Algorithmus

Das Ausgangsproblem wird v.a. durch Hinzunahme von Schlupfvariablen so umgeformt, dass der Zielfunktionsvektor **c** und die Koeffizientenmatrix A die in Def. 2.3 geforderten Eigenschaften der kanonischen Form erfüllen, der Vektor **b** jedoch negative Elemente aufweist. Gestartet wird mit einer *Basislösung*, die aber wegen negativer b_i *nicht zulässig* ist. Im Laufe der Anwendung des dualen Simplex-Algorithmus wird sie in eine zulässige Basislösung überführt.

Beispiel: Wir betrachten das folgende Problem (vgl. auch Abb. 2.9):

Maximiere $F(x_1,x_2) = 2x_1 + x_2$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 8 \\ 3x_1 + x_2 &\geq 12 \end{aligned}$$

5 Das zweite Tableau entsteht aus dem ersten, indem man die Pivotzeile 3 von der ersten Zeile subtrahiert, sie mit 9 multipliziert von der zweiten Zeile subtrahiert und mit 20 multipliziert zur Ergebniszeile addiert. Zu weiteren Hinweisen zur Transformation von Simplextableaus sei auf das Übungsbuch Domschke et al. (2011) verwiesen.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 10 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Jede $\geq$-Bedingung transformieren wir zunächst durch Multiplikation mit -1 in eine $\leq$-Bedingung.[6] Ergänzen wir nun jede dieser Ungleichungen durch Hinzunahme einer (in der Zielfunktion mit 0 bewerteten) Schlupfvariablen zu einer Gleichung, so erhalten wir das in Tab. 2.6 angegebene Starttableau und die dort ausgewiesene *unzulässige* Basislösung.

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	-1	-1	1			-8
x_4	-3	$[-1]$		1		-12
x_5	1	1			1	10
F	-2	-1	0	0	0	0

Basislösung:
$x_3 = -8,\ x_4 = -12,\ x_5 = 10;$
$x_1 = x_2 = 0;\ F = 0$

Tab. 2.6

Im Gegensatz zum primalen beginnt der duale Simplex-Algorithmus mit der Wahl der Pivotzeile. Daran schließen sich die Spaltenwahl und die Tableautransformation an. Wir geben im Folgenden eine detaillierte Beschreibung.

Eine Iteration des dualen Simplex-Algorithmus

Voraussetzung: Eine Basislösung eines LP; die aktuellen Eintragungen im Simplextableau seien jeweils mit a'_{ij}, b'_i und c'_j bezeichnet.

Schritt 1 (Wahl der Pivotzeile s):

Gibt es kein $b'_i < 0$, so liegt bereits eine zulässige Basislösung vor; Abbruch des dualen Simplex-Algorithmus.

Sonst wähle diejenige Zeile s mit dem kleinsten $b'_s < 0$ als Pivotzeile (stehen mehrere Zeilen mit kleinstem Wert zur Auswahl, so wähle man unter diesen eine beliebige).

Schritt 2 (Wahl der Pivotspalte t):

Findet man in der Pivotzeile s kein Element $a'_{sj} < 0$, so besitzt das Problem keine zulässige Basislösung (vgl. Sonderfall 1 in Kap. 2.5.2); Abbruch des (gesamten) Verfahrens.

Sonst wähle eine Spalte t mit

$$\frac{c'_t}{a'_{st}} = \max \left\{ \frac{c'_j}{a'_{sj}} \;\middle|\; j = 1,\ldots,n \text{ mit } a'_{sj} < 0 \right\}$$

als Pivotspalte. a'_{st} ist **Pivotelement**.

Schritt 3 (Tableautransformation): Wie beim primalen Simplex-Algorithmus, Kap. 2.4.1.2.

* * * * *

6 Eine Gleichung $\sum_j a_j x_j = b$ entspricht den beiden Ungleichungen $\sum_j a_j x_j \leq b$ und $-\sum_j a_j x_j \leq -b$.

Beispiel: Wir wenden den dualen Simplex-Algorithmus auf die obige Probleminstanz an. Im Ausgangstableau (Tab. 2.6) wählen wir s = 2 als Pivotzeile und t = 2. Nach der Transformation ergibt sich das obere Tableau von Tab. 2.7, nach einer weiteren Iteration des dualen Simplex-Algorithmus das untere Tableau.

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	2		1	– 1		4
x_2	3	1		– 1		12
x_5	[– 2]			1	1	– 2
F	1	0	0	– 1	0	12
x_3			1		1	2
x_2		1		1/2	3/2	9
x_1	1			– 1/2	– 1/2	1
F	0	0	0	– 1/2	1/2	11

Unzulässige Basislösung:
$x_2 = 12$, $x_3 = 4$, $x_5 = -2$;
$x_1 = x_4 = 0$; F = 12
s = 3, t = 1

Zulässige Basislösung:
$x_1 = 1$, $x_2 = 9$, $x_3 = 2$;
$x_4 = x_5 = 0$; F = 11

Tab. 2.7

Die vorliegende zulässige Lösung ist noch nicht optimal, so dass sich ein Schritt mittels des primalen Simplex-Algorithmus anschließt. Dieser führt zur optimalen Lösung in Tab. 2.8.
Verfolgt man den Lösungsgang anhand von Abb. 2.9, so wird ersichtlich, dass beginnend im Ursprung (Punkt A) zunächst die unzulässige Basislösung B erreicht wird. Danach gelangt man über C in den optimalen Eckpunkt D.

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3			1		1	2
x_4		2		1	3	18
x_1	1	1			1	10
F	0	1	0	0	2	20

Optimale Basislösung:
$x_1 = 10$, $x_3 = 2$, $x_4 = 18$;
$x_2 = x_5 = 0$; F = 20

Tab. 2.8

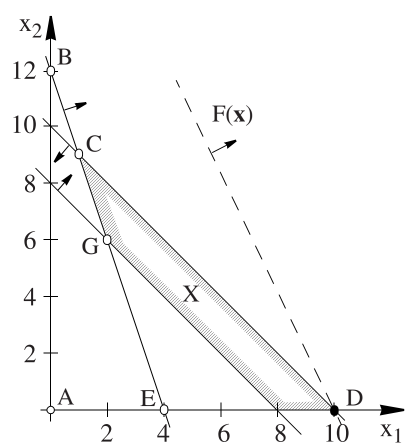

Abb. 2.9

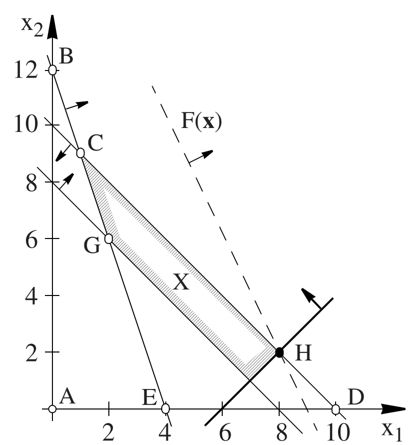

Abb. 2.10

Bemerkung 2.5: Falls man mit einer *dual zulässigen* Lösung (alle Eintragungen in der F-Zeile ≥ 0) startet, so ist die erste primal zulässige Basislösung (alle $b_i' \geq 0$) zugleich optimal; vgl. die Lösung des Mischungsproblems aus Kap. 2.2 am Ende von Kap. 2.5.3.

Der duale Simplex-Algorithmus ist insbesondere auch dann geeignet, wenn für ein LP mit bereits bekannter optimaler Basislösung durch Ergänzen einer weiteren Restriktion diese Basislösung unzulässig wird. Nach einer (oder mehreren) Iteration(en) des dualen Simplex-Algorithmus erhält man dann erneut eine optimale Basislösung (*Reoptimierung*).

Beispiel: Wir nehmen an, dass der zulässige Bereich X unseres oben betrachteten LPs durch die Nebenbedingung $x_1 - x_2 \leq 6$ weiter eingeschränkt werden soll. Die neue optimale Lösung ist ($x_1=8$, $x_2=2$); siehe Punkt H in Abb. 2.10.
Um die Optimallösung mit dem dualen Simplex-Algorithmus zu ermitteln, erweitern wir das bisherige Optimaltableau in Tab. 2.8 um die zusätzliche Restriktion, durch die Schlupfvariable x_6 erweitert zur Gleichung $x_1 - x_2 + x_6 = 6$; siehe Tab. 2.9.

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_3			1		1		2
x_4		2		1	3		18
x_1	1	1			1		10
x_6	1	–1				1	6
F	0	1	0	0	2	0	20

Tab. 2.9

Schaffen wir unter den Basisvariablen jeweils einen Einheitsvektor (durch Subtraktion der x_1-Zeile von der neuen Nebenbedingung), so erhalten wir die nicht zulässige Basislösung für das erweiterte Problem im Punkt D; siehe Tab. 2.10. Nach einer Iteration mit dem dualen Simplex-Algorithmus ergibt sich die (neue) optimale Lösung in Tab. 2.11.

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_3			1		1		2
x_4		2		1	3		18
x_1	1	1			1		10
x_6		[–2]			–1	1	–4
F	0	1	0	0	2	0	20

Tab. 2.10

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_3			1		1		2
x_4				1	2	1	14
x_1	1				$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	8
x_2		1			$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2
F	0	1	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	18

Tab. 2.11

2.4.2.2 Die M-Methode

Die M-Methode entspricht formal der Anwendung des primalen Simplex-Algorithmus auf ein erweitertes Problem. Sie lässt sich für **Maximierungsprobleme** wie folgt beschreiben:

Wir gehen von einem LP in der Normalform (2.13) aus. Zu jeder Nebenbedingung i, die keine Schlupfvariable mit positivem Vorzeichen besitzt, fügen wir auf der linken Seite eine **künstliche** (= *fiktive*) **Variable** y_i mit positivem Vorzeichen hinzu.[7] y_i ist auf den nichtnegativen reellen Bereich beschränkt. In einer zu maximierenden Zielfunktion wird sie mit $-M$ bewertet, wobei M hinreichend groß zu wählen ist.[8] Auf das so erweiterte Problem wird der primale Simplex-Algorithmus angewendet, bis alle y_i, die sich zu Beginn in der Basis befinden, diese verlassen haben. Sobald ein y_i die Basis verlassen hat, kann es von weiteren Betrachtungen ausgeschlossen werden (in Tab. 2.13 durch ■ angedeutet).

In der Literatur wird die M-Methode bei gleichzeitiger Anwendung des primalen Simplex-Algorithmus auch als *2-Phasen-Methode* bezeichnet.

Beispiel: Wir erläutern die M-Methode anhand des Problems von Kap. 2.4.2.1. Durch Schlupfvariablen x_3, x_4 und x_5 sowie künstliche Variablen y_1 und y_2 erweitert, hat es folgendes Aussehen:

Maximiere $F(x_1,...,x_5,y_1,y_2) = 2x_1 + x_2 - My_1 - My_2$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & & & + & y_1 & & & = & 8 \\ 3x_1 & + & x_2 & & & - & x_4 & & & & & + & y_2 & = & 12 \\ x_1 & + & x_2 & & & & & + & x_5 & & & & & = & 10 \\ & & & & & & & & & & \multicolumn{3}{r}{x_1, ..., x_5, y_1, y_2} & \geq & 0 \end{array}$$

Es ist sinnvoll, im Laufe der Anwendung der M-Methode zwei Zielfunktionszeilen zu führen, die F-Zeile mit den Bewertungen aus dem ursprünglichen Problem und eine M-Zeile, die sich durch die Einführung der y_i und deren Bewertung mit – M ergibt.

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	b_i
y_1	1	1	– 1			1		8
y_2	[3]	1		– 1			1	12
x_5	1	1			1			10
F-Zeile	– 2	– 1	0	0				0
M-Zeile	– 4M	– 2M	M	M				–20M

Basislösung:
$y_1 = 8$, $y_2 = 12$;
$x_5 = 10$;
Zielfw. = –20M

Tab. 2.12

7 Sind $m' < m$ künstliche Variablen einzuführen, so können diese auch von 1 bis m' nummeriert werden, so dass die Variablen- und die Zeilenindizes nicht übereinstimmen.

8 M ist so groß zu wählen, dass bei Existenz einer zulässigen Lösung des eigentlichen Problems garantiert ist, dass alle künstlichen Variablen (wegen ihrer den Zielfunktionswert verschlechternden Bewertung) beim Optimierungsprozess die Basis verlassen.

Die erste zu bestimmende Basislösung enthält alle y_i in der Basis. Bei der Bildung des Simplextableaus gemäß Tab. 2.4 würde man unter den y_i in der M-Zeile Werte + M vorfinden. Transformieren wir das Tableau, so dass wir unter den y_i Einheitsvektoren (mit Nullen in den Ergebniszeilen) erhalten, so ergibt sich das erste „Basistableau" in Tab. 2.12. Man kann sich überlegen, dass durch die oben geschilderte Transformation für eine Nichtbasisvariable x_k der folgende Eintrag in der M-Zeile zustande kommt:[9]

– M · (Summe der Koeffizienten von x_k in allen Zeilen, in denen ein y als BV dient)

Die Pivotspaltenwahl erfolgt bei der M-Methode anhand der Einträge in der M-Zeile; bei zwei oder mehreren gleichniedrigen Einträgen wird unter diesen Spalten anhand der F-Zeile entschieden.

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	b_i	
y_1		$\left[\frac{2}{3}\right]$	– 1	$\frac{1}{3}$		1	■	4	Basislösung:
x_1	1	$\frac{1}{3}$		$-\frac{1}{3}$			■	4	$y_1 = 4$, $x_1 = 4$;
x_5		$\frac{2}{3}$		$\frac{1}{3}$	1		■	6	$x_5 = 5$ Zielfw. = 8 – 4M
F-Zeile		$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$			■	8	
M-Zeile		$-\frac{2}{3}$ M	M	$-\frac{1}{3}$ M			■	– 4M	
x_2		1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$		■	■	6	Zulässige Basisl.:
x_1	1		$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$		■	■	2	$x_1 = 2$, $x_2 = 6$,
x_5			[1]		1	■	■	2	$x_5 = 2$; F = 10
F-Zeile			$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$		■	■	10	Tab. 2.13

Wie Tab. 2.13 zeigt, haben in unserem Beispiel die y_i nach zwei Iterationen die Basis und damit das Problem verlassen. Nach Erhalt der ersten zulässigen Basislösung des eigentlichen Problems (letztes Tableau in Tab. 2.13) gelangen wir durch Ausführung von zwei weiteren Iterationen des

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_4		2		1	3	18
x_1	1	1			1	10
x_3			1		1	2
F		1			2	20

Tab. 2.14

9 In unserem Beispiel ergibt sich etwa unter der Nichtbasisvariablen x_1 der Eintrag von –4M auch durch folgende Überlegung: Möchte man der Variablen x_1 den Wert 1 geben, so verringert sich dadurch der Wert von y_1 um 1 und derjenige von y_2 um 3 Einheiten. Der Zielfunktionswert verbessert sich (im Bereich der künstlichen Variablen) damit um 4M.

primalen Simplex-Algorithmus zur optimalen Lösung $x_1 = 10$, $x_3 = 2$, $x_4 = 18$, $x_2 = 0$, $x_5 = 0$ mit dem Zielfunktionswert F = 20 in Tab. 2.14.
Veranschaulicht anhand von Abb. 2.9, wurden im Laufe des Lösungsgangs die Eckpunkte A, E, G, C und D erreicht.

Die Erweiterung eines gegebenen Problems durch künstliche Variablen y_i verdeutlichen wir nochmals anhand unseres Mischungsproblems aus Kap. 2.2. Durch dessen Erweiterung und Transformation in ein Maximierungsproblem erhalten wir:

Maximiere $F(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -(5x_1 + 7x_2) - M \cdot (y_1 + y_2 + y_3) = -5x_1 - 7x_2 - My_1 - My_2 - My_3$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcrcl}
2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & & & + & y_1 & & & & & = & 6 \\
2x_1 & + & 4x_2 & & & - & x_4 & & & & & + & y_2 & & & = & 12 \\
 & & 4x_2 & & & & & - & x_5 & & & & & + & y_3 & = & 4 \\
 & & & & & & & & & & & & \multicolumn{3}{r}{x_1, \ldots, x_5, y_1, y_2, y_3} & \geq & 0
\end{array}$$

Bemerkung 2.6 (*Reduzierung der Anzahl künstlicher Variablen*): Für alle $\geq$-Bedingungen mit nichtnegativer rechter Seite ist es ausreichend, (gemeinsam) nur eine künstliche Variable einzuführen. Man erreicht dies durch Erzeugung der folgenden Linearkombination: Durch Multiplikation mit -1 entstehen $\leq$-Bedingungen und durch Einführung von Schlupfvariablen Gleichungen mit negativen rechten Seiten. Subtrahiert man von jeder Gleichung diejenige mit der kleinsten rechten Seite, so erhalten alle Bedingungen außer dieser eine nichtnegative rechte Seite; nur für sie ist eine künstliche Variable erforderlich. Wendet man diese Vorgehensweise auf das obige Mischungsproblem an, so wird nur für die Nährstoffbedingung II eine künstliche Variable benötigt.

Auch für LPs, die zunächst **Gleichungen als Nebenbedingungen** enthalten, lässt sich mittels der M-Methode eine zulässige Basislösung bestimmen. So kann z.B. zur Berechnung einer zulässigen Basislösung des im Folgenden links angegebenen Problems zunächst das danebenstehende, erweiterte Problem mit der M-Methode behandelt werden.

Maximiere $F(x_1,x_2) = 10x_1 + 20x_2$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcr}
x_1 & + & x_2 & = & 100 \\
6x_1 & + & 9x_2 & \leq & 720 \\
 & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Maximiere $F(x_1,..,x_3,y) = 10x_1 + 20x_2 - My$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & + & x_2 & & & + & y & = & 100 \\
6x_1 & + & 9x_2 & + & x_3 & & & = & 720 \\
 & & & & \multicolumn{3}{r}{x_1, x_2, x_3, y} & \geq & 0
\end{array}$$

Als Alternative zu dieser Vorgehensweise können wir auch jede Gleichung nach einer Variablen auflösen und in die anderen Nebenbedingungen einsetzen. Dabei besteht jedoch die Gefahr, dass nach Lösung des verbleibenden Problems für die substituierten Variablen die u.U. geforderten Nichtnegativitätsbedingungen nicht erfüllt sind.

2.5 Dualität und Analyse von LP-Lösungen

Im Folgenden erläutern wir zunächst, dass zu jedem LP ein anderes existiert, das man als dazu dual bezeichnet. In Kap. 2.5.2 behandeln wir einige Sonderfälle, die bei der Lösung von LPs auftreten können. Eng mit der Dualität verbunden sind Aussagen über ökonomische Gegebenheiten (Schattenpreise von Restriktionen, Reduzierte Kosten von Strukturvariablen), die sich aus Optimaltableaus von LPs ableiten lassen (siehe Kap. 2.5.3). Diese Aussagen gelten jedoch nur unter bestimmten Bedingungen bzw. in bestimmten Grenzen, die sich anhand von Sensitivitätsanalysen von Lösungen ergeben (vgl. Kap. 2.5.4).

2.5.1 Dualität

Definition 2.9: Gegeben sei ein lineares Optimierungsproblem in der Form:

$$\left.\begin{aligned} &\text{Maximiere } F(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ &\text{unter den Nebenbedingungen} \\ &\qquad\qquad A\,\mathbf{x} \le \mathbf{b} \\ &\qquad\qquad \mathbf{x} \ge \mathbf{0} \end{aligned}\right\} \tag{2.15}$$

Das Problem

$$\left.\begin{aligned} &\text{Minimiere } FD(\mathbf{w}) = \mathbf{b}^T\mathbf{w} \\ &\text{unter den Nebenbedingungen} \\ &\qquad\qquad A^T\,\mathbf{w} \ge \mathbf{c} \\ &\qquad\qquad \mathbf{w} \ge \mathbf{0} \end{aligned}\right\} \tag{2.16}$$

nennt man das zu (2.15) **duale** Problem. Umgekehrt ist wegen dieser Dualisierungsregel (2.16) dual zu (2.15). Der Dualvariablenvektor **w** besitzt dieselbe Dimension wie **b**.

Möchte man ein LP dualisieren, so nennt man dieses Ausgangsproblem auch **primales** Problem. Zu jeder Nebenbedingung des primalen Problems gehört (bzw. mit jeder Nebenbedingung *korrespondiert*) genau eine Variable des dualen Problems (**Dualvariable**); die i-te Nebenbedingung korrespondiert mit der i-ten Dualvariablen.

Veranschaulichung von Def. 2.9 anhand des Produktionsplanungsproblems aus Kap. 2.2:[10]

Wir entwickeln anhand logischer Überlegungen das zu diesem Maximierungsproblem duale Minimierungsproblem, wie es sich gemäß (2.16) ergäbe. Das primale Problem lautet (im Kästchen die mit den jeweiligen Nebenbedingungen korrespondierenden Dualvariablen):

$$\text{Maximiere } F(x_1,x_2) = 10x_1 + 20x_2 \tag{2.17}$$

unter den Nebenbedingungen

10 Eine weitere anschauliche Herleitung des dualen LPs findet man in Aufgabe 2.20 des Übungsbuches Domschke et al. (2011).

$$\boxed{w_1} \qquad x_1 + x_2 \le 100 \tag{2.18}$$

$$\boxed{w_2} \qquad 6x_1 + 9x_2 \le 720 \tag{2.19}$$

$$\boxed{w_3} \qquad x_2 \le 60 \tag{2.20}$$

$$x_1, x_2 \ge 0 \tag{2.21}$$

Man kann sich überlegen, dass aufgrund des Nebenbedingungssystems (2.18) – (2.21) **obere Schranken** für $F(x_1,x_2)$ ermittelt werden können. Dazu muss man eine einzelne Nebenbedingung mit einem Faktor oder eine Teilmenge der Nebenbedingungen mit einem Faktorvektor multiplizieren und addieren, so dass der dadurch entstehende Koeffizient jeder Variablen den entsprechenden Koeffizienten in der Zielfunktion möglichst gut annähert, jedoch *nicht unterschreitet*. Das Produkt der rechten Seite(n) mit dem Faktor(vektor) liefert dann eine obere Schranke für den optimalen Zielfunktionswert.

- Durch Multiplikation der Nebenbedingung (2.18) mit 20 erhält man (unter Berücksichtigung der Nichtnegativitätsbedingungen) die *obere Schranke* 2000 wie folgt:

  $F(x_1,x_2) = 10x_1 + 20x_2 \le 20x_1 + 20x_2 \le 2000$

- Entsprechend ergibt sich durch Multiplikation der Nebenbedingung (2.19) mit 20/9 die *obere Schranke* 1600:

  $F(x_1,x_2) = 10x_1 + 20x_2 \le 40/3\, x_1 + 20x_2 \le 1600$

Schärfere (d.h. niedrigere) obere Schranken erhält man in der Regel durch *Linearkombination* mehrerer, insbesondere sämtlicher Nebenbedingungen (mit Ausnahme der Nichtnegativitätsbedingungen) eines LPs.

- Für unser Beispiel ergibt sich durch Addition des 10-Fachen von (2.18) und (2.20) ebenfalls eine *obere Schranke* von 1600:

  $F(x_1,x_2) = 10x_1 + 20x_2 \le 1000 + 600 = 1600$

- Verwenden wir für die drei Ungleichungen die Faktoren 5, 5/6 bzw. 15/2 und addieren die so modifizierten Bedingungen, so erhalten wir die schärfere *obere Schranke* 1550:

$F(x_1,x_2) = 10x_1 + 20x_2 = 5\,(x_1+x_2) + 5/6\,(6x_1+9x_2) + 15/2\,(x_2) \le 500 + 600 + 450 = 1550$

Allgemein gilt mit nichtnegativen Faktoren w_1, w_2 und w_3:

$F(x_1,x_2) = 10x_1 + 20x_2 \le w_1\,(x_1+x_2) + w_2\,(6x_1+9x_2) + w_3\,(x_2) \le 100\,w_1 + 720\,w_2 + 60\,w_3$

oder

$$F(x_1,x_2) = 10x_1 + 20x_2 \le (w_1+6w_2)x_1 + (w_1+9w_2+w_3)x_2 \le 100w_1 + 720w_2 + 60w_3 \tag{2.22}$$

Ein Vergleich der Koeffizienten von x_1 und x_2 liefert die Bedingungen:

$10x_1 \le (w_1+6w_2)\,x_1$ bzw. $20x_2 \le (w_1+9w_2+w_3)\,x_2$

Insgesamt ergibt sich folgendes (Neben-) Bedingungssystem, bei dessen Einhaltung obere Schranken für (2.17) – (2.21) entstehen:

$$w_1 + 6w_2 \ge 10 \tag{2.23}$$

$$w_1 + 9w_2 + w_3 \ge 20 \tag{2.24}$$

Man überlegt sich dazu jedoch, dass die Koeffizienten w_1 bis w_3 nicht beliebig gewählt werden dürfen. Da wir Linearkombinationen von Ungleichungen bilden, kommen nur Koeffizienten mit gleichem Vorzeichen in Frage. O.B.d.A. setzen wir:

$$w_1, w_2, w_3 \geq 0 \tag{2.25}$$

Die Bestimmung einer kleinstmöglichen oberen Schranke unter Beachtung von (2.22) und (2.23) – (2.25) führt zur Zielsetzung:

$$\text{Minimiere } FD(w_1, w_2, w_3) = 100w_1 + 720w_2 + 60w_3 \tag{2.26}$$

Damit haben wir das zu (2.17) – (2.21) duale Problem erhalten. Der Übersichtlichkeit halber stellen wir beide Probleme nochmals einander gegenüber:

Maximiere $F(x_1, x_2) = 10x_1 + 20x_2$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{l|rcrcr} w_1 & x_1 & + & x_2 & \leq & 100 \\ w_2 & 6x_1 & + & 9x_2 & \leq & 720 \\ w_3 & & & x_2 & \leq & 60 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Minimiere $FD(w_1,..,w_3) = 100w_1 + 720w_2 + 60w_3$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{l|rcr} x_1 & w_1 + 6w_2 & \geq & 10 \\ x_2 & w_1 + 9w_2 + w_3 & \geq & 20 \\ & w_1, w_2, w_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Tab. 2.15 enthält einen Überblick über bereits verwendete sowie weitere **Dualisierungsregeln**. Daraus lassen sich folgende Aussagen ableiten:

Primales Problem	**Duales Problem**
Zielfunktion: Max F(**x**)	Zielfunktion: Min FD(**w**)
Nebenbedingungen: i-te NB: $\leq$ i-te NB: $=$	Dualvariablen: $w_i \geq 0$ $w_i \in \mathbb{R}$
Variablen: $x_j \geq 0$ $x_j \in \mathbb{R}$	Nebenbedingungen: j-te NB: $\geq$ j-te NB: $=$

Tab. 2.15

a) Einem primalen Maximierungsproblem entspricht ein duales Minimierungsproblem.

b) Einer $\leq$ - Restriktion im primalen Problem entspricht eine im Vorzeichen beschränkte Variable im dualen Problem; zu einer Gleichheitsrestriktion gehört eine unbeschränkte Dualvariable.

c) Eine beschränkte Variable im primalen Problem korrespondiert mit einer $\geq$ - Restriktion im dualen Problem; eine unbeschränkte Variable hat im dualen Problem eine Gleichheitsrestriktion zur Folge.

Darüber hinaus gilt:

d) Ist der Zielfunktionswert des primalen (Maximierungs-) Problems nicht nach oben beschränkt, so besitzt das duale (Minimierungs-) Problem keine zulässige Lösung. Diese Aussage folgt unmittelbar aus dem Einschließungssatz (Satz 2.5).

Im Folgenden formulieren wir zwei wichtige Sätze. Erinnert sei v.a. für den Einschließungssatz nochmals daran, dass wir von einem primalen *Maximierungsproblem* ausgehen. Beweise zu den Aussagen findet man z.B. in Neumann und Morlock (2002, S. 76 ff.).

Satz 2.5 (Einschließungssatz):

a) Seien **x** eine zulässige Lösung von (2.15) und **w** eine zulässige Lösung von (2.16), dann gilt: $F(\mathbf{x}) \le FD(\mathbf{w})$, d.h. $\mathbf{c}^T\mathbf{x} \le \mathbf{b}^T\mathbf{w}$

b) Für optimale Lösungen **x*** und **w*** von (2.15) bzw. (2.16) gilt: $F(\mathbf{x}^*) = FD(\mathbf{w}^*)$.

c) Aus a) und b) ergibt sich der so genannte *Einschließungssatz*:

$$F(\mathbf{x}) \le F(\mathbf{x}^*) = FD(\mathbf{w}^*) \le FD(\mathbf{w})$$

Satz 2.6 (Satz vom komplementären Schlupf):

Gegeben seien ein LP (2.15) mit p Variablen und m Nebenbedingungen. Durch Einführung von Schlupfvariablen x_{p+i} $(i = 1,...,m)$ gehe (2.15) über in die Normalform (2.15)’. Entsprechend gehe (2.16) durch Einführung von Schlupfvariablen w_{m+j} $(j = 1,...,p)$ über in (2.16)’, d.h. eine Modifikation von (2.16) mit Gleichheitsrestriktionen.

Eine zulässige Lösung **x*** von (2.15)’ und eine zulässige Lösung **w*** von (2.16)’ sind genau dann optimal, wenn gilt:

$$x_j^* \cdot w_{m+j}^* = 0 \quad \text{für } j = 1,...,p \qquad \text{und} \qquad w_i^* \cdot x_{p+i}^* = 0 \quad \text{für } i = 1,...,m \tag{2.27}$$

Das bedeutet: Bei positivem x_j^* ist der Schlupf in der j-ten Nebenbedingung (2.16) gleich 0 und umgekehrt. Bei positivem w_i^* ist der Schlupf in der i-ten Nebenbedingung von (2.15) gleich 0 und umgekehrt.

Bemerkung 2.7: Der Satz vom komplementären Schlupf stellt einen Spezialfall der Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen (vgl. Satz 8.8 in Kap. 8.4.1) dar. Er findet bei vielen Lösungsverfahren unmittelbar Anwendung. Zumeist wird primär darauf geachtet, dass während des gesamten Verfahrens die Bedingung (2.27) erfüllt ist; erst zum Abschluss erreicht man (falls möglich) die Zulässigkeit *beider* Lösungen:

Bei **primalen Verfahren** (wie dem primalen Simplex-Algorithmus oder der MODI-Methode in Kap. 4.1.3) geht man von einer zulässigen Lösung des primalen Problems aus und ermittelt stets eine (in Zwischenstadien nicht zulässige) Lösung des dualen Problems, welche die Bedingungen (2.27) erfüllt.

Bei **dualen** und **primal-dualen Verfahren** (wie der Ungarischen Methode für lineare Zuordnungsprobleme – siehe z.B. Domschke (2007, Kap. 9.1)) startet man hingegen mit einer zulässigen

sigen Lösung des dualen Problems und ermittelt stets eine (in Zwischenstadien nicht zulässige) Lösung des primalen Problems, welche die Bedingungen (2.27) erfüllt.

Bemerkung 2.8: Geht man von einem primalen Problem der Form (2.11) mit $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ aus, so gelten folgende Entsprechungen, die sich aus den bisherigen Ausführungen zur Dualität ergeben:

a) Die Schlupfvariablen des primalen Problems korrespondieren mit den Strukturvariablen des dualen Problems und umgekehrt.

b) Im Optimaltableau des primalen sind auch Variablenwerte für eine optimale Lösung des dualen Problems enthalten. Wegen Aussage a) entspricht der Wert der i-ten dualen Strukturvariablen dem Schattenpreis (siehe Kap. 2.5.3) der i-ten Schlupfvariablen im primalen Problem. Ebenso gilt, dass der Wert der j-ten dualen Schlupfvariablen den Reduzierten Kosten der j-ten Strukturvariablen im primalen Problem entspricht.
Siehe hierzu auch Aufg. 2.20 im Übungsbuch Domschke et al. (2011).

2.5.2 Sonderfälle von LPs und ihre Identifikation

Im Folgenden behandeln wir fünf Sonderfälle, die bei der Lösung von LPs auftreten können. Wir schildern v.a., woran sie bei Anwendung des Simplex-Algorithmus jeweils erkennbar sind (man veranschauliche sich die Fälle – soweit unten nicht geschehen – graphisch).

(1) Das Problem besitzt **keine zulässige Lösung**: Es gilt also $X = \emptyset$. Man sagt, das Nebenbedingungssystem sei *nicht widerspruchsfrei*, und spricht von **primaler Unzulässigkeit**.

Mit dem dualen Simplex-Algorithmus gelangt man zu einer Iteration, bei der man in Schritt 2 in der Pivotzeile s nur Elemente $a'_{sj} \geq 0$ findet. Das duale Problem besitzt keine optimale Lösung (siehe Fall 2).

Bei der M-Methode wird ein Stadium erreicht, in dem alle Einträge in der F-Zeile nichtnegativ sind (also die Lösung offenbar optimal ist), sich aber nach wie vor künstliche Variablen $y_i > 0$ in der Basis befinden.

(2) Das Problem besitzt **keine optimale Lösung**: Trotz nichtleerer Menge X zulässiger Lösungen kann keine optimale Lösung angegeben werden; jede beliebige zulässige Lösung lässt sich weiter verbessern.

Mit dem primalen Simplex-Algorithmus gelangt man zu einer Iteration, bei der in Schritt 1 eine Verbesserungsmöglichkeit des Zielfunktionswertes erkennbar ist, also eine Pivotspalte t gefunden wird. In dieser Spalte befinden sich jedoch nur Elemente $a'_{it} \leq 0$. Durch eine unbeschränkte Steigerung von x_t ließe sich auch der Zielfunktionswert beliebig erhöhen. Man spricht von **dualer Unzulässigkeit**; das duale Problem besitzt keine zulässige Lösung (siehe Fall 1).
Ein derartiges unbeschränktes Problem ohne optimale Lösung wird zumeist durch Daten- bzw. Eingabefehler entstehen. Wären etwa für unser Mischungsproblem in Kap. 2.2 die Zielfunktionskoeffizienten mit –5 und –7 vorgegeben, so könnte keine optimale Lösung gefunden werden.

(3) Das Problem besitzt **mehrere optimale Basislösungen** (man spricht auch vom Fall **parametrischer Lösungen** oder der **dualen Degeneration**):

Im Tableau mit der erhaltenen optimalen Lösung ist für mindestens eine Nichtbasisvariable der Eintrag in der F-Zeile gleich 0. Würde man diese Variable in die Basis aufnehmen, so erhielte man eine weitere optimale Basislösung. Ferner gilt:

Mit zwei optimalen Basislösungen $\mathbf{x}^1$ und $\mathbf{x}^2$ sind auch alle durch Konvexkombination

$$\mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x}^1 + (1-\lambda) \cdot \mathbf{x}^2 \quad \text{mit} \quad 0 < \lambda < 1$$

erhältlichen Nichtbasislösungen optimal.

Den geschilderten Sonderfall bezeichnet man, wie eingangs erwähnt, auch als *duale Degeneration*; eine Basisvariable des dualen Problems besitzt den Wert 0.

(4) Das Problem besitzt mindestens eine **redundante** (d.h. überflüssige) **Nebenbedingung**:

Eine $\leq$ - Nebenbedingung ist redundant, wenn eine ($\leq$ -) Linearkombination anderer Bedingungen dieselbe linke Seite und eine nicht größere rechte Seite aufweist.

Beispiele: Im Falle zweier Nebenbedingungen $x_1 + x_2 \leq 7$ und $x_1 + x_2 \leq 9$ ist die zweite Bedingung natürlich sofort als redundant erkennbar.
In Abb. 2.11 sind die nicht redundanten Bedingungen $x_1 + x_2 \leq 100$, $x_2 \leq 80$ sowie (gestrichelt) die redundante Bedingung $x_1 + 2x_2 \leq 200$ dargestellt. Eine Addition der beiden ersten Bedingungen führt zur linken Seite $x_1 + 2x_2$ und – gemessen an 200 – der kleineren rechten Seite 180.

Eine $\geq$ - Nebenbedingung ist redundant, wenn eine ($\geq$ -) Linearkombination anderer Bedingungen dieselbe linke Seite und eine größere rechte Seite aufweist.

Beispiel: In Abb. 2.11 sind die nicht redundanten Bedingungen $x_1 + x_2 \geq 40$, $x_2 \geq 20$ sowie gestrichelt die redundante Bedingung $x_1 + 2x_2 \geq 40$ dargestellt. Eine Addition der beiden ersten Bedingungen führt zur linken Seite $x_1 + 2x_2$ und – gemessen an 40 – der größeren rechten Seite 60.

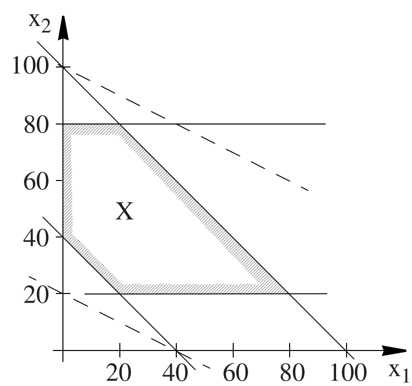

Abb. 2.11

Die Vernachlässigung einer redundanten Nebenbedingung führt nicht zur Erweiterung der Menge X der zulässigen Lösungen.
Liegt mindestens eine redundante Nebenbedingung vor, so ist der Rang der Koeffizientenmatrix kleiner als m; siehe dazu Bem. 2.4.
Bei Anwendung des Simplex-Algorithmus erhält man u.U. zwei (oder mehrere) Tableauzeilen, deren Koeffizienten im Bereich der Nichtbasisvariablen identisch sind.

(5) **Primale Degeneration:** Ein oder mehrere Basisvariablen einer Basislösung besitzen den Wert 0; man spricht in diesem Fall auch von einer *primal degenerierten Basislösung*.

Dieser Sonderfall liegt im $\mathbb{R}^n$ vor, wenn sich mehr als n Hyperebenen in einem Eckpunkt des zulässigen Bereichs X schneiden.

Abb. 2.12 veranschaulicht eine primale Degeneration (Punkt P) des $\mathbb{R}^2$. Hier handelt es sich zugleich um einen speziellen Fall der Redundanz. Dem Eckpunkt P entsprechen drei verschiedene Basislösungen mit x_1, x_2 und jeweils genau einer der drei möglichen Schlupfvariablen als Basisvariablen. Die in der Basis befindliche Schlupfvariable besitzt den Wert 0.[11]

Abb. 2.13 zeigt analog eine primale Degeneration (Punkt P) des $\mathbb{R}^3$.

Theoretisch besteht für den Simplex-Algorithmus die Gefahr des **Kreisens** innerhalb der Basislösung eines derartigen Eckpunktes; d.h. es gelingt nicht, den Eckpunkt wieder zu verlassen. Bland (1977) beschreibt Regeln zur Wahl der Pivotspalte, mit deren Hilfe sich das Kreisen vermeiden lässt.

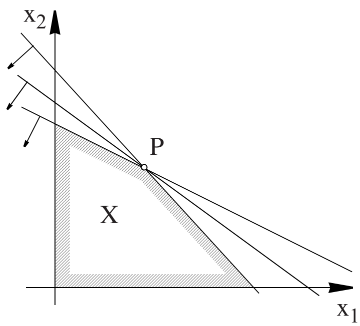

Abb. 2.12

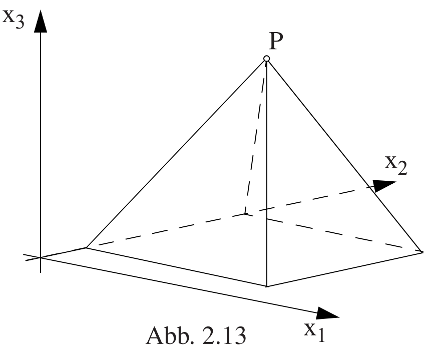

Abb. 2.13

2.5.3 Reduzierte Kosten, Schattenpreise, Opportunitätskosten

Wir wollen nun die Bedeutung der Einträge in der Ergebniszeile eines Simplex-Tableaus näher analysieren. Wir gehen dabei jeweils von einem Tableau mit einer optimalen Basislösung aus; die Aussagen gelten jedoch grundsätzlich auch für Tableaus mit einer nur primal zulässigen Basislösung. Bei unseren Ausführungen beziehen wir uns zunächst ausschließlich auf **Maximierungsprobleme**. Zur Veranschaulichung betrachten wir erneut unser Produktionsplanungsproblem aus Kap. 2.2, erweitern es jedoch um ein Produkt P_3 mit den Produktionskoeffizienten 2, 10 und 0 und dem Deckungsbeitrag $db_3 = 15$. Bezeichnen wir die von P_3 herzustellende Menge mit x_3 und die Schlupfvariablen der Nebenbedingungen mit x_4 bis x_6, so erhalten wir das in Tab. 2.16 wiedergegebene Start- sowie Optimaltableau. Das zusätzliche Produkt ist in der optimalen Lösung nicht zur Produktion vorgesehen, so dass wir einige unserer Aussagen anhand der graphischen Darstellung von Abb. 2.2 veranschaulichen können, die wir in Abb. 2.14 erneut wiedergeben.

Definition 2.10: Die Einträge unter den Strukturvariablen bezeichnet man zumeist als **Reduzierte Kosten** der Variablen, diejenigen unter den Schlupfvariablen als **Schattenpreise** der Inputfaktoren.

11 Primale Degeneration tritt bei praktischen LPs sehr häufig auf. Sie ist, wie auch Dantzig und Thapa (1997, S. 97) aussagen, die Regel und nicht die Ausnahme. Sie liegt z.B. mit hoher Wahrscheinlichkeit vor, wenn das Nebenbedingungssystem Gleichungen (etwa Lagerbilanzgleichungen) enthält.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_4	1	1	2	1			100
x_5	6	9	10		1		720
x_6		1				1	60
F	–10	–20	–15	0	0	0	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_4			1/3	1	–1/6	1/2	10
x_1	1		5/3		1/6	–3/2	30
x_2		1				1	60
F	0	0	5/3	0	5/3	5	1500

Tab. 2.16

Gelegentlich wird für beide schlechthin der Begriff *Opportunitätskosten* (*OK*) verwendet. Wir werden i.d.R. die in Def. 2.10 verwendeten Bezeichnungen benutzen und im Folgenden prüfen, inwieweit es sich dabei um OK handelt.

OK sind „Kosten“ im Sinne „entgangener Gelegenheiten“; vgl. Ewert und Wagenhofer (2005, S. 117). Sie stellen hinsichtlich der *Inputfaktoren* ein Maß für den Nutzen (Deckungsbeitrag, Gewinn etc.) dar, der nicht realisierbar ist, weil der zur Herstellung eines oder mehrerer Güter eingesetzte Faktor einer alternativen Verwendung zugeführt wird. Im Hinblick auf *Produkte* (Produktionsalternativen) gilt: Verwirklicht man eine Alternative, so muss gegebenenfalls auf die Realisierung einer anderen und die Erzielung des damit verbundenen Nutzens verzichtet werden. Dieser Nutzenentgang kann der verwirklichten Alternative als „Kosten“ angelastet werden.

Wie in der Literatur üblich, wollen wir im Folgenden zwischen input- und outputorientierten OK unterscheiden; vgl. zu den folgenden Ausführungen v.a. Domschke und Klein (2004).

Definition 2.11:

a) Ausgehend von einer *optimalen* Lösung, bezeichnet man die geringstmögliche Reduktion des Zielfunktionswertes, die sich durch die alternative Verwendung von Δ_i ME des Inputfaktors i ergibt, als **inputorientierte OK** (**i-OK**) des Faktors i.

b) Ausgehend von einer *optimalen* Lösung, stellen **outputorientierte OK** (**o-OK**) eines Produktes P_j eine Bewertung der Faktorkapazitäten dar, die zur Herstellung von Φ_j zusätzlichen ME von P_j erforderlich sind. Sie entsprechen der kleinstmöglichen Reduktion des Zielfunktionswertes, der sich durch die Reservierung (Freihaltung) von Kapazität zur Herstellung von Φ_j (zusätzlichen) ME des Produktes ergibt.

Analog zu OK lassen sich Opportunitätsnutzen (ON) definieren.

Definition 2.12:

a) Ausgehend von einer *optimalen* Lösung, bezeichnet man die größtmögliche Erhöhung des Zielfunktionswertes, die durch die Bereitstellung von Δ_i zusätzlichen ME des Faktors i entsteht, als **inputorientierten ON** (**i-ON**) von i.

b) Ausgehend von einer *optimalen* Lösung, erhalten wir einen **outputorientierten ON** (**o-ON**) durch Reduktion der herzustellenden Menge von P_j um Φ_j ME und Freigabe der für diese Menge erforderlichen Kapazitäten zur dann bestmöglichen anderweitigen Nutzung.

Bemerkung 2.9: Insbesondere hinsichtlich o-OK und o-ON bedarf es einer Präzisierung. In beiden Fällen geht man von einem Problem $\mathcal{P}$ mit x_j^* für P_j in der optimalen Lösung aus.

a) Löst man nun ein Problem $\mathcal{P}$' mit der Zusatzforderung $x_j \geq x_j^* + \Phi_j$, so gilt:
o-OK = F($\mathcal{P}$) – (F($\mathcal{P}$') – $\Phi_j \cdot db_j$)

b) Löst man andererseits ein Problem $\mathcal{P}$' mit der Zusatzforderung $x_j \leq x_j^* - \Phi_j$, so gilt analog:
o-ON = F($\mathcal{P}$') – (F($\mathcal{P}$) – $\Phi_j \cdot db_j$)

In der Literatur werden OK und ON i.d.R. im Sinne von Grenzopportunitätskosten bzw. -nutzen definiert; man geht also von hinreichend kleinen (marginalen) Änderungen Δ_i bzw. Φ_j aus. Wir wollen uns im Folgenden ebenfalls darauf beschränken, wobei im obigen Produktionsplanungsbeispiel jeweils von der Veränderung von 1 ME ausgegangen werden kann.

Beispiele:

- Bei einer alternativen Verwendung von Δ_2 = 1 ME des Rohstoffes verschiebt sich diese Bedingung nach links. In der dann optimalen Lösung werden von P_1 genau 1/6 ME weniger als in der bislang betrachteten hergestellt. Dadurch reduziert sich der Zielfunktionswert um $\frac{1}{6} \cdot 10$ = 5/3; die i-OK sind somit 5/3.
  Bei Erhöhung der Rohstoffkapazität lässt sich die Menge von P_1 um 1/6 steigern; somit ist auch der i-ON des Faktors 5/3.

- Eine Reduktion oder Erhöhung der Maschinenkapazität um 1 KE hat dagegen keine Auswirkung auf den Zielfunktionswert. Man erkennt, dass i-OK und i-ON eines in der optimalen Lösung nicht knappen Faktors den Wert 0 besitzen.

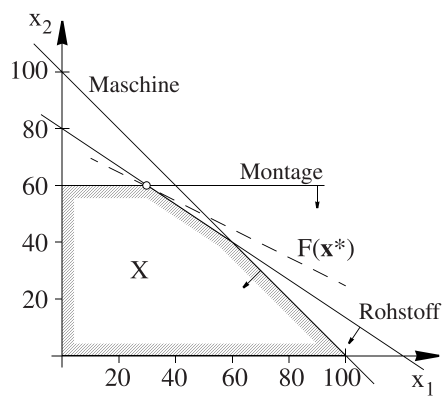

Abb. 2.14

- Produkt P_3 wird in der optimalen Lösung nicht hergestellt. Wird von den Inputfaktoren Kapazität für die Produktion von $x_3 = 1$, nämlich 2, 10 bzw. 0 ME, reserviert, so führt dies zu einer Linksverschiebung der Maschinen- und der Rohstoffrestriktion, wobei (bei diesem Ausmaß der Veränderung) nur Letztere bedeutsam ist. Sie bewirkt eine Reduktion des Zielfunktionswertes um $\frac{10}{6} \cdot 10$ = 50/3.
  Ein ON lässt sich, da P_3 in der Ausgangslösung nicht produziert wird, nicht angeben. Seine Ermittlung würde aber v.a. dann nützlich und sinnvoll sein, wenn für das Produkt eine explizit vorgegebene und in der optimalen Lösung genau realisierte unter Schranke λ_3 existiert.

- Zur Berechnung der o-OK von P_1 ergänzen wir im Ausgangsproblem die Nebenbedingung $x_1 \geq 31$ und erhalten den neuen optimalen Zielfunktionswert $F = 1496\frac{2}{3}$. Es ergeben sich o-OK von 1500 – $(1496\frac{2}{3} - 10)$ = 40/3. Der Deckungsbeitrag db_1 = 10 ist von F zu subtrahieren, da bei der Neuoptimierung dieser Wert für die 31. ME in F eingegangen ist.

Lösen wir umgekehrt ein Problem mit der Zusatzforderung $x_1 \le 29$, so wird Rohstoffkapazität zur Produktion von $x_3 = 3/5$ ME frei. Wegen $db_3 = 15$ führt dies zu einem o-ON von 9. Stünde im Optimierungsproblem wie in Kap. 2.2 das Produkt P_3 nicht zur Disposition, so besäße der o-ON von P_1 den Wert 0; die frei werdende Kapazität bliebe wegen der Montagerestriktion von P_2 ungenutzt.

Bemerkung 2.10: Hinsichtlich der Einträge in der Ergebniszeile eines optimalen Simplex-Tableaus gelten unter der Einschränkung, dass keine primal degenerierte Basislösung vorliegt, die folgenden Aussagen:

a) Die Schattenpreise stellen zugleich i-OK und i-ON der Inputfaktoren dar.

b) Die Summe „Reduzierte Kosten + Stückdeckungsbeitrag" der nicht in der Basis enthaltenen Strukturvariablen stellt o-OK dar.

c) Die Reduzierten Kosten von in der Basis enthaltenen Strukturvariablen sind 0 und stimmen i.d.R. nicht mit den o-OK und dem o-ON des betreffenden Produkts überein.

d) Interessiert man sich nicht allein für marginale Änderungen von Input- bzw. Outputmengen, so geben Sensitivitätsanalysen, wie wir sie in Kap. 2.5.4 durchführen, Auskunft über den Gültigkeitsbereich der OK bzw. des ON.

Bei primaler Degeneration (siehe Fall (5) in Kap. 2.5.2) entsprechen einem optimalen Eckpunkt des zulässigen Bereichs mehrere zulässige Basislösungen, eine Teilmenge davon stellt zugleich eine optimale Basislösung dar. Fügt man z.B. unserem Produktionsplanungsproblem mit zwei Produkten die Nebenbedingung $x_1 + 3x_2 \le 210$ hinzu, so verläuft diese wie die Rohstoff- und die Montagerestriktion durch den optimalen Eckpunkt. In ihm existieren dann drei zulässige Basislösungen, von denen zwei aufgrund der Einträge in der Ergebniszeile als optimal erkannt werden. Reduzierte Kosten und (in diesem kleinen Beispiel allein die) Schattenpreise sind nicht mehr eindeutig. Die Ermittlung der „richtigen" inputorientierter OK und ON wird wesentlich aufwendiger als im nichtdegenerierten Fall; denn es gilt laut Akgül (1984) oder Gal (1997):[12]

- Die i-OK eines Faktors i entsprechen dem *Maximum* der Schattenpreise dieses Faktors in sämtlichen Optimaltableaus.
- Der i-ON eines Faktors i entspricht dem *Minimum* der Schattenpreise dieses Faktors in sämtlichen Optimaltableaus.

Für outputorientierte OK und ON lassen sich lediglich untere bzw. obere Schranken ermitteln.

Bemerkung 2.11 (*Verwendung von OK und ON als Preisunter- bzw. -obergrenzen*):

Hinsichtlich der Inputfaktoren entsprechen, sofern die Bereitstellungskosten der Faktoren nicht in die Deckungsbeiträge des betrachteten Modells eingeflossen sind, die i-OK unmittelbar einer Preisuntergrenze und der i-ON einer Preisobergrenze, die bei Veräußerung bzw. Zukauf von Kapazität von Bedeutung sein können. Es lassen sich folgende Aussagen treffen:

- Übersteigt der Erlös bei Veräußerung (oder Vermietung) von Kapazitäten eines Faktors die entsprechenden i-OK (Preisuntergrenze), so erzielt man durch diese alternative Verwendung

12 Vgl. allgemein zu Degeneration und Schattenpreisen auch Gal (1986).

einen höheren Gesamtdeckungsbeitrag als durch Herstellung eigener Produkte. In diesem Fall kann es sinnvoll sein, auf den Absatz eigener Produkte zu verzichten.

- Sind Beschaffungskosten für zusätzliche KE einer knappen Ressource niedriger als der zugehörige i-ON (Preisobergrenze), so führt ihr Erwerb zu einer Erhöhung des Gesamtdeckungsbeitrags. Dann kann es zweckmäßig sein, Kapazitätserweiterungsmaßnahmen zu prüfen.

Die Aussagen gelten, wenn aufgrund der zu modellierenden Entscheidungssituation keine Bewertung (Anrechnung variabler Kosten) von Inputfaktoren im Rahmen der verwendeten Deckungsbeiträge vorzunehmen ist. Diesen auch in der Controllingliteratur nur unzureichend behandelten Aspekt verdeutlichen wir anhand unseres Produktionsplanungsbeispiels. Dazu nehmen wir an, dass der Rohstoff nicht vorrätig ist, sondern zunächst zum Preis von 1 GE erworben werden muss. Beim (bisherigen) Lieferanten können bis zu 720 ME beschafft werden. Somit führt der Verzehr des Rohstoffs zu variablen Kosten, die die Deckungsbeiträge auf 4, 11 bzw. 5 reduzieren. Die optimale Lösung entspricht in diesem Falle der unseres Ausgangsbeispiels. Für die Rohstoffrestriktion erhalten wir nun i-OK und i-ON in Höhe von 2/3. Die relevanten Preisunter- bzw. -obergrenzen sind dann 2/3+1. Sie entsprechen also in der *Summe* den im Ausgangsbeispiel ermittelten 5/3. Es sei jedoch darauf hingewiesen, dass durch die situationsabhängige, unterschiedliche Bewertung bei der Modellierung ungleiche optimale Lösungen und somit Preisgrenzen resultieren können.

Für die *Outputfaktoren* (Produkte) gelten die folgenden grundsätzlichen Aussagen:

- Jede zu produzierende ME eines in der optimalen Lösung *nicht enthaltenen* Produkts P_j verdrängt zumindest Anteile von dort enthaltenen Produkten. Eine Aufnahme von P_j in das Programm ist grundsätzlich nur dann lohnend, wenn der Stückdeckungsbeitrag die o-OK übersteigt.
- Durch jede von einem in der optimalen Lösung *enthaltenen* Produkt P_j mehr zu fertigende ME verringern sich Anteile anderer in der optimalen Lösung befindlicher Produkte. Die o-OK dieser Produkte P_j entsprechen mindestens der Höhe ihres Deckungsbeitrages. Durch die Erhöhung der Fertigung von P_j sinkt der Zielfunktionswert oder bleibt (bei dualer Degeneration) bestenfalls auf gleicher Höhe.

Auch bei einem **Minimierungsproblem** kann man die Einträge unter den Struktur- bzw. Schlupfvariablen als *Reduzierte Kosten* bzw. *Schattenpreise* bezeichnen. Minimierungsprobleme sind zu lösen, wenn die Absatz- oder Erlösseite nicht beeinflussbar ist. Gesucht ist z.B. die kostenminimale Erstellung eines Produktionsprogramms, die kostengünstigste Mischung einer Futterration, die transportkostenminimale Belieferung von Kunden mit vorgegebenen Liefermengen usw.

Wir betrachten hierzu die Lösung des *Mischungsproblems* aus Kap. 2.2 und erweitern es um eine dritte Futtermittelsorte S_3, deren einzusetzende ME wir mit x_3 bezeichnen. Wir lösen das Problem als *Maximierungsproblem*. Auf der linken Seite von Tab. 2.17 ist das Starttableau für den dualen Simplex-Algorithmus wiedergegeben, dem die noch nicht geschilderten Daten (Koeffizienten, Kosten) der dritten Sorte entnehmbar sind. Rechts daneben befindet sich das Optimaltableau.

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_4	−2	−1	−2	1			−6
x_5	−2	−4	−3		1		−12
x_6		−4	−2			1	−4
F	5	7	9	0	0	0	0

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_1	1		$\frac{5}{6}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$		2
x_2		1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$		2
x_6			$-\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3}$	1	4
F	0	0	$\frac{5}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	0	−24

Tab. 2.17

Einträge unter den Schlupfvariablen (*Schattenpreise*): Sie stellen die kostenmäßigen Werte jeder Einheit der Mindestanforderungen (beim Mischungsproblem Nährstoffgehalte) dar. Erhöht (senkt) man die Anforderungen um eine Einheit, so steigen (sinken) die Kosten um den angegebenen Wert; sie lassen sich als OK dieser Forderungen interpretieren.

Einträge unter den Strukturvariablen (*Reduzierte Kosten*): Nichtbasisvariablen besitzen einen positiven Eintrag (siehe Futtermittelsorte S_3). Die Differenz „Kosten – Reduzierte Kosten", bei S_3 mit dem Wert 9−5/2, lässt sich als ON einer ME einer nicht in der optimalen Lösung befindlichen Sorte interpretieren.
Basisvariablen besitzen den Eintrag 0. Die anderweitige Verwendung einer ME der betreffenden Sorte und der Ersatz dieser ME durch eine andere Sorte führt jedoch – außer bei parametrischer optimaler Lösung – zu einer Kostensteigerung. Die Reduzierten Kosten sind somit i.d.R. weder mit den OK noch mit dem ON identisch.

2.5.4 Sensitivitätsanalyse

Unter **Sensitivitäts-** oder **Sensibilitätsanalyse** versteht man das Testen der optimalen Lösung eines Optimierungsmodells auf Reaktionen gegenüber Veränderungen der Ausgangsdaten. Zu diesen zählen die Zielfunktionskoeffizienten c_j sowie die rechten Seiten b_i und die Koeffizienten a_{ij} der Nebenbedingungen. Im weiteren Sinne gehört auch der Test der optimalen Lösung im Hinblick auf weitere Entscheidungsalternativen (zusätzliche Strukturvariablen des Problems) zur Sensitivitätsanalyse.

Im Folgenden beschäftigen wir uns in Kap. 2.5.4.1 bzw. 2.5.4.2 mit der Frage, um welchen Wert ein einzelner Koeffizient c_j bzw. ein einzelnes b_i eines LPs verändert werden kann, ohne dass die (bisherige) optimale Lösung ihre Optimalitätseigenschaft verliert. Kap. 2.5.4.3 enthält Aussagen hinsichtlich der Hinzunahme weiterer Entscheidungsalternativen.

Untersucht man entsprechend die gleichzeitige Wirkung zweier oder mehrerer Parameter, so spricht man von *parametrischer Sensitivitätsanalyse* oder von **parametrischer Optimierung**. Aus Platzgründen verzichten wir auf Ausführungen hierzu und verweisen stattdessen auf Beisel und Mendel (1987), Dantzig und Thapa (1997), Ellinger et al. (2003, Kap. 4) sowie Taha (2007, S. 131 ff.). Beispiele zur parametrischen Optimierung findet der Leser auch in Reichmann (2006, S. 224 ff.); siehe ferner Aufg. 2.21 im Übungsbuch Domschke et al. (2011).
Mit genereller Unsicherheit hinsichtlich der Daten eines LPs beschäftigt sich die **stochastische lineare Optimierung**; vgl. Birge und Louveaux (1997). Im Bereich der **robusten Optimierung** interessiert man sich für Lösungen, die auch bei Veränderung mehrerer Daten noch

zulässig und hinsichtlich ihrer Güte „akzeptabel“ sind; siehe hierzu Dinkelbach und Kleine (1996) oder Scholl (2001).

Bei sämtlichen Analysen gehen wir davon aus, dass ein **Maximierungsproblem** in der Form (2.11) mit (zunächst) p Variablen und m Nebenbedingungen gegeben ist. Ferner unterstellen wir, dass keine Degeneration vorliegt.[13] Wir erläutern die Vorgehensweisen und Ergebnisse jeweils anhand unseres Produktionsplanungsproblems mit zwei Produkten aus Kap. 2.2. In Abb. 2.15 ist das Problem erneut graphisch veranschaulicht. Tab. 2.18 zeigt das Ausgangs- und das Optimaltableau.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_4	1	1	1			100
x_5	6	9		1		720
x_6		1			1	60
F	–10	–20	0	0	0	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3			1	–1/6	1/2	10
x_1	1			1/6	–3/2	30
x_2		1			1	60
F	0	0	0	5/3	5	1500

Tab. 2.18

2.5.4.1 Änderung von Zielfunktionskoeffizienten

Wir wollen prüfen, in welchem Bereich $[c_k - c_k^-, c_k + c_k^+]$ sich der Zielfunktionskoeffizient c_k ändern darf, ohne dass die optimale Basislösung ihre Optimalitätseigenschaft verliert; d.h. ohne dass ein Basistausch erforderlich wird.

Bei der Ermittlung des Intervalls ist zu unterscheiden, ob x_k Nichtbasis- oder Basisvariable ist. Im ersten Fall gestaltet sich die Untersuchung sehr einfach, im zweiten ist sie wesentlich aufwendiger.

1. Ist x_k **Nichtbasisvariable** mit den aktuellen Reduzierten Kosten c'_k, so gilt $c_k^- = \infty$ und $c_k^+ = c'_k$.

   $c_k^- = \infty$ bedeutet, die Variable x_k in dem von uns betrachteten Maximierungsproblem mit einer betragsmäßig beliebig großen, negativen Zahl zu bewerten. Damit bleibt die Variable natürlich stets Nichtbasisvariable. Beispielsweise werden bei der M-Methode die künstlichen Variablen mit –M bewertet. Die Richtigkeit von $c_k^+ = c'_k$ überlegt man sich z.B. leicht anhand des obigen Produktionsplanungsproblems.

2. Ist x_k **Basisvariable** und sind a'_{ij}, b'_i und c'_j die aktuellen Koeffizienten im Optimaltableau, dann haben die Elemente des Zeilenvektors $\mathbf{a}'^T_{\sigma(k)}$ (der Zeile $\sigma(k)$, in der die Basisvariable x_k steht) und die Eintragungen c'_j der F-Zeile Einfluss auf den Schwankungsbereich. Es gelten folgende Aussagen:

13 Siehe zur Sensitivitätsanalyse bei Degeneration v.a. Gal (1986).

$$c_k^- := \begin{cases} \infty & \text{es ex. kein } a'_{\sigma(k),j} > 0 \text{ mit } j \neq k \\ \min\left\{ \dfrac{c'_j}{a'_{\sigma(k),j}} \;\middle|\; \text{alle Spalten } j \neq k \text{ mit } a'_{\sigma(k),j} > 0 \right\} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$c_k^+ := \begin{cases} \infty & \text{es ex. kein } a'_{\sigma(k),j} < 0 \text{ mit } j \neq k \\ \min\left\{ -\dfrac{c'_j}{a'_{\sigma(k),j}} \;\middle|\; \text{alle Spalten } j \neq k \text{ mit } a'_{\sigma(k),j} < 0 \right\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Bei diesen Berechnungen ist es bedeutsam, jeweils die Variable und deren Quotienten $c'_j / a'_{\sigma(k),j}$ zu ermitteln, bei der zuerst ein negativer Eintrag in der F-Zeile auftreten würde.

Begründung:

Soll der Zielfunktionskoeffizient einer Basisvariablen x_k um Δ *gesenkt* werden, so entspricht dies einer Eintragung von $+\Delta$ für x_k in der F-Zeile des Optimaltableaus. Wenn x_k Basisvariable bleiben und ein neues Optimaltableau erzeugt werden soll, so muss durch Subtraktion des Δ-fachen der Zeile $\sigma(k)$ von der F-Zeile dort wieder der Eintrag 0 hergestellt werden. Dabei dürfen die Reduzierten Kosten bzw. Schattenpreise der Nichtbasisvariablen nicht negativ werden, d.h. es muss $c'_j - a'_{\sigma(k),j} \cdot \Delta \geq 0$ für alle $j = 1,...,n$ sein.

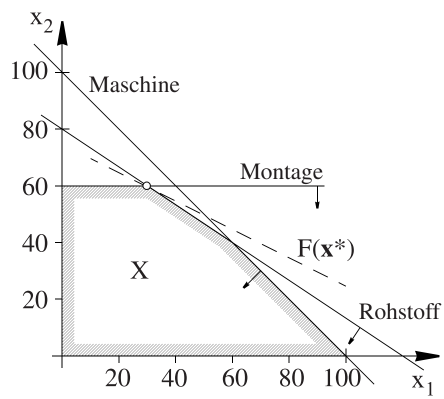

Abb. 2.15

Für negative $a'_{\sigma(k),j}$ ist diese Ungleichung stets erfüllt. Daher bleibt $\Delta \leq c'_j / a'_{\sigma(k),j}$ für alle $j = 1,...,n$ mit $a'_{\sigma(k),j} > 0$ zu fordern.

Bei *Erhöhung* von c_k um Δ erfolgt in der F-Zeile ein Eintrag von $-\Delta$; das Δ-fache der Zeile $\sigma(k)$ ist zur F-Zeile zu addieren. Somit sind für die Ermittlung von c_k^+ alle $a'_{\sigma(k),j} < 0$ zu berücksichtigen.

Für unser Produktionsplanungsproblem erhalten wir als Spielraum für die Zielfunktionskoeffizienten der Strukturvariablen x_1 und x_2 (sie sind in der optimalen Lösung Basisvariablen):

$$c_1^- = \tfrac{5}{3} / \tfrac{1}{6} = 10 \qquad c_1^+ = -5/(-\tfrac{3}{2}) = 10/3$$

$$c_2^- = 5/1 = 5 \qquad c_2^+ = \infty$$

Für die Zielfunktionskoeffizienten der Schlupfvariablen ergibt sich:

$$c_3^- = 5/\tfrac{1}{2} = 10 \qquad c_3^+ = (-\tfrac{5}{3})/(-\tfrac{1}{6}) = 10$$

$$c_4^- = \infty \qquad c_4^+ = 5/3$$

$$c_5^- = \infty \qquad c_5^+ = 5$$

Das Ergebnis lässt sich z.B. für den Koeffizienten c_3 wie folgt interpretieren (vgl. Abb. 2.15):

Bei einer *Prämie* von $c_3^+ = 10$ GE für jede ungenutzte KE der Maschine kann auf die Herstellung von Produkt P_1 verzichtet werden; $x_2 = 60$, $x_3 = 40$, $x_4 = 180$, $x_1 = x_5 = 0$ wäre dann ebenfalls eine optimale Lösung. Bei einer Prämie von mehr als 10 GE (bis 19.99 GE) wäre sie zugleich die einzige optimale Lösung. Ab einer Prämie von 20 GE sollte die gesamte Maschinenkapazität ungenutzt bleiben; optimal ist dann $x_3 = 100$.

Bei *Strafkosten* von $c_3^- = 10$ GE pro ungenutzter KE der Maschine kann ebenso gut die Lösung $x_1 = 60$, $x_2 = 40$, $x_5 = 20$, $x_3 = x_4 = 0$ gewählt werden. Bei höheren Strafkosten ist dies zugleich die einzige optimale Lösung.

2.5.4.2 Änderung von Ressourcenbeschränkungen

Wir wollen nun untersuchen, in welchem Bereich $[b_k - b_k^-, b_k + b_k^+]$ eine (Ressourcen-) Beschränkung b_k bei Konstanz aller übrigen Parameter variiert werden kann, ohne dass die aktuelle optimale Basislösung die Optimalitätseigenschaft verliert, d.h. ohne dass ein Basistausch erforderlich wird. Für sämtliche Werte des zu bestimmenden Intervalls sollen optimale Lösungen dieselben Basisvariablen besitzen; deren Werte dürfen jedoch in Abhängigkeit von b_k variieren.[14]

Die Variation der rechten Seite beeinflusst die Schlupfvariable[15] der k-ten Nebenbedingung, also die Variable x_{p+k}. Ist sie Basisvariable, so könnte sie durch Veränderung von b_k diese Eigenschaft verlieren; ist sie Nichtbasisvariable, so könnte sie (oder eine andere Variable) dadurch Basisvariable werden. Somit sind, setzen wir $q := p + k$, die folgenden beiden Fälle zu unterscheiden:

1. Ist x_q **Basisvariable**, so gilt $b_k^- = x_q$ und $b_k^+ = \infty$.
   Für unser Beispiel gilt in Restriktion (2.7) (x_3 ist Basisvariable): $b_1^- = 10$, $b_1^+ = \infty$
2. Ist x_q **Nichtbasisvariable** und sind a'_{ij}, b'_i und c'_j die aktuellen Koeffizienten im Optimaltableau, dann haben die Elemente des Spaltenvektors $\mathbf{a}'_q$ und der rechten Seite $\mathbf{b}'$ Einfluss auf den Schwankungsbereich. Es gelten folgende Aussagen:

$$b_k^- := \begin{cases} \infty & \text{falls kein } a'_{iq} > 0 \text{ existiert} \\ \min\left\{ \dfrac{b'_i}{a'_{iq}} \;\middle|\; i = 1,\dots,m \text{ mit } a'_{iq} > 0 \right\} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$b_k^+ := \begin{cases} \infty & \text{falls kein } a'_{iq} < 0 \text{ existiert} \\ \min\left\{ -\dfrac{b'_i}{a'_{iq}} \;\middle|\; i = 1,\dots,m \text{ mit } a'_{iq} < 0 \right\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Formeln lassen sich wie folgt erklären:

Das *Senken* von b_k um b_k^- ist gleichzusetzen mit der Forderung, der Schlupfvariablen x_q den Wert b_k^- zuzuweisen. Der Wert der in der i-ten Zeile stehenden Basisvariablen sinkt damit um

14 Bei Änderungen der Zielfunktionskoeffizienten bleiben innerhalb der im vorigen Kapitel ermittelten Schwankungsbereiche auch die Werte der Basisvariablen unverändert. Dagegen erfolgt bei Änderung der rechten Seiten ein „gleitender" Übergang von Variablenwerten bis zu einem Basistausch.

15 Liegt die Nebenbedingung von Anfang an als Gleichung vor, so kann die Argumentation dennoch entsprechend erfolgen. Die (in diesem Falle fiktive) Schlupfvariable ist im Optimaltableau stets Nichtbasisvariable.

$a'_{iq} b_k^-$, falls $a'_{iq} > 0$ gilt. Variablen, die in Zeilen mit negativen a'_{iq} stehen, nehmen mit sinkendem b_k höhere Werte an. Somit determiniert der kleinste Quotient b'_i / a'_{iq} über alle $a'_{iq} > 0$ den Wert von b_k^-.

Das *Erhöhen* von b_k um b_k^+ ist gleichzusetzen mit der Forderung, der Schlupfvariablen x_q den Wert $-b_k^+$ zuzuweisen. Der Wert der in der i-ten Zeile stehenden Basisvariablen sinkt damit um $\left| a'_{iq} b_k^+ \right|$, falls $a'_{iq} < 0$ gilt. Variablen, die in Zeilen mit positivem a'_{iq} stehen, nehmen mit steigendem b_k höhere Werte an. Somit determiniert der kleinste Quotient $-b'_i / a'_{iq}$ über alle $a'_{iq} < 0$ den Wert von b_k^+.

Für unser Beispiel gilt in Restriktion (2.8) (x_4 ist Nichtbasisvariable):
$b_2^- = 30/\frac{1}{6} = 180, \;\; b_2^+ = -10/(-\frac{1}{6}) = 60.$

Reduziert man b_2 um mehr als $b_2^- = 180$, so würde x_5 für x_1 in die Basis gelangen; erhöht man b_2 um mehr als $b_2^+ = 60$, so würde x_4 für x_3 in die Basis kommen.

Für b_2^- erkennt man dessen maximalen Wert 180, wenn man aufgrund des Optimaltableaus in Tab. 2.18 folgende äquivalente Gleichungssysteme betrachtet:

$$\boxed{\begin{array}{lcrcr} x_3 & - & \frac{1}{6} b_2^- & = & 10 \\ x_1 & + & \frac{1}{6} b_2^- & = & 30 \\ x_2 & & & = & 60 \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{lcrcr} x_3 & = & 10 & + & \frac{1}{6} b_2^- \\ x_1 & = & 30 & - & \frac{1}{6} b_2^- \\ x_2 & = & 60 & & \end{array}}$$

In Restriktion (2.9) (x_5 ist Nichtbasisvariable) gilt: $b_3^- = \min\{20, 60\} = 20$ und $b_3^+ = 20$.

Reduziert man b_3 um mehr als $b_3^- = 20$, so würde x_4 für x_3 in die Basis gelangen; erhöht man b_3 um mehr als $b_3^+ = 20$, so würde x_5 für x_1 in die Basis kommen.

2.5.4.3 Zusätzliche Alternativen

Nach dem Lösen eines LPs kann es nicht nur von Interesse sein, die Auswirkungen von Datenänderungen auf die optimale Lösung zu untersuchen. Denkbar ist auch, dass man überprüfen möchte, ob die Hinzunahme weiterer Entscheidungsalternativen (z.B. weiterer Produkte in einem Modell der Produktionsprogrammplanung) den Zielfunktionswert zu verbessern gestattet.

Die Dualitätstheorie der linearen Optimierung bewirkt, dass die Hinzunahme weiterer Entscheidungsvariablen i.d.R. nicht dazu führt, dass das gesamte (erweiterte) Problem vollständig neu gelöst werden muss; vgl. z.B. Kimms (1999) sowie Domschke und Klein (2004).

Zur Begründung der Aussage gehen wir davon aus, dass das zunächst gelöste (Maximierungs-) Problem p Strukturvariablen und m Nebenbedingungen besitzt. Dem Simplextableau, das die optimale Lösung des primalen Problems enthält, entnehmen wir zugleich optimale Werte $(w_1^*, ..., w_m^*)$ der m Dualvariablen. Besitzt eine neu hinzukommende Entscheidungsvariable x_i den Koeffizientenvektor $\mathbf{a}_i = (a_{1i},...,a_{mi})$ und den Zielfunktionskoeffizienten c_i, so führt ihre Hinzunahme im (zu minimierenden) dualen Problem zur Nebenbedingung

$$a_{1i}w_1 + ... + a_{mi}w_m \geq c_i \qquad \text{bzw. mit Schlupfvariable } w_{m+i} \text{ zu}$$
$$a_{1i}w_1 + ... + a_{mi}w_m - w_{m+i} = c_i .$$

Der Wert der Schlupfvariablen w_{m+i} stellt die Reduzierten Kosten der durch die Variable x_i repräsentierten Alternative i dar. Ist für den Vektor $(w_1^*, ..., w_m^*)$ der Wert $w_{m+i} > 0$ bzw. $w_{m+i} < 0$, so führt die Hinzunahme von x_i zu einer Verschlechterung bzw. Verbesserung des Zielfunktionswertes. Daher sind bei der Ermittlung einer optimalen Lösung nur Variablen x_i mit negativen Reduzierten Kosten zu berücksichtigen.

Eine dem bisherigen Optimaltableau hinzuzufügende Spalte erhält man leicht mit Hilfe eines Rechenschrittes des revidierten Simplex-Algorithmus, den wir in Kap. 2.6.2 beschreiben. Seien B die Basismatrix der bisherigen optimalen Lösung und B^{-1} deren Inverse, so erhält man den dem Tableau hinzuzufügenden Spaltenvektor für x_i durch die Multiplikation

$$B^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{a}_i \\ -c_i \end{bmatrix}.$$

Beispiel: Im Rahmen unserer Produktionsplanung bestehe die Möglichkeit, alternativ oder zusätzlich Produkte P_3 und/oder P_4 herzustellen. Mit P_3 (bereits in Kap. 2.5.3 eingeführt) erziele man einen Deckungsbeitrag von 15 GE, mit P_4 von 35 GE pro ME. Die Produktionskoeffizienten seien jeweils 2 beim Rohstoff, 10 bzw. 18 bei der Maschinenrestriktion und 0 bei der Montagerestriktion.

Für P_3 bzw. P_4 ergeben sich im dualen Problem folgende Nebenbedingungen:

$$2w_1 + 10w_2 + 0w_3 \geq 15 \quad \text{bzw.} \quad 2w_1 + 18w_2 + 0w_3 \geq 35 \tag{2.28}$$

Die optimalen Werte der Dualvariablen des bisherigen Problems mit zwei Produkten (Einträge unter den Schlupfvariablen in der Ergebniszeile des Simplextableaus) sind $w_1^* = 0$, $w_2^* = 5/3$ und $w_3^* = 5$.

Eingesetzt in (2.28) und ergänzt um Schlupfvariablen w_4 bzw. w_5, erhält man die Gleichungen $50/3 - w_4 = 15$ bzw. $30 - w_5 = 35$, also Reduzierte Kosten von $w_4 = 5/3$ bzw. $w_5 = -5$. P_3 führt somit nicht zu einer Lösungsverbesserung. Für P_4 ist dem bisherigen Optimaltableau der rechts ermittelte Spaltenvektor hinzuzufügen, wodurch das so erweiterte Tableau seine Optimalitätseigenschaft verliert.

$$\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ F \end{array} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{6} & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 18 \\ 0 \\ -35 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Die geschilderte Vorgehensweise stellt eine vereinfachte Form der **Spaltengenerierung** dar; vgl. dazu Bem. 2.13 in Kap. 2.6.2.

2.6 Modifikationen des Simplex-Algorithmus

Im Folgenden beschäftigen wir uns zunächst mit der Berücksichtigung unterer und oberer Schranken für Variablen. Während untere Schranken durch geeignete Modellierung (Bildung und Lösung eines modifizierten Problems) berücksichtigt werden können, lassen sich obere Schranken implizit durch Modifikation des Simplex-Algorithmus einbeziehen.
In Kap. 2.6.2 beschreiben wir die Vorgehensweise des revidierten Simplex-Algorithmus.

2.6.1 Untere und obere Schranken für Variablen

Wir beschäftigen uns mit der Frage, wie Beschränkungen $\lambda_j \le x_j \le \kappa_j$ *einzelner Variablen* x_j bei der Lösung linearer Optimierungsprobleme mit möglichst geringem Rechenaufwand berücksichtigt werden können.

Untere Schranken λ_j lassen sich durch Variablentransformation $\bar{x}_j := x_j - \lambda_j$ bzw. $x_j := \bar{x}_j + \lambda_j$ berücksichtigen.

Beispiel: Aus dem im linken Rahmen dargestellten Problem mit den unteren Schranken $x_1 \ge 20$ und $x_2 \ge 10$ entsteht durch Substitution von $x_1 := \bar{x}_1 + 20$ sowie $x_2 := \bar{x}_2 + 10$ das rechts wiedergegebene LP.

Maximiere $F(x_1,x_2) = x_1 + 3x_2$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 2x_2 & \le & 80 \\ 2x_1 & + & x_2 & \le & 100 \\ \multicolumn{5}{r}{x_1 \ge 20 \text{ und } x_2 \ge 10} \end{array}$$

Maximiere $F(\bar{x}_1,\bar{x}_2) = \bar{x}_1 + 3\bar{x}_2 + 50$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcr} \bar{x}_1 & + & 2\bar{x}_2 & \le & 40 \\ 2\bar{x}_1 & + & \bar{x}_2 & \le & 50 \\ & & \bar{x}_1, \bar{x}_2 & \ge & 0 \end{array}$$

Die optimale Lösung dieses Problems ist $\bar{x}_1 = 0$ und $\bar{x}_2 = 20$ mit $F(\bar{x}_1,\bar{x}_2) = 110$. Durch Rücksubstitution erhält man die zugehörigen optimalen Werte $x_1 = 20$ und $x_2 = 30$ des ursprünglichen Problems.

Obere Schranken lassen sich implizit im Laufe der Anwendung des Simplex-Algorithmus berücksichtigen, indem man bei Erreichen der oberen Schranke κ_j die Variable x_j durch eine neue Variable $\bar{x}_j := \kappa_j - x_j$ ersetzt. Die Vorgehensweise des primalen Simplex-Algorithmus ändert sich dadurch in Schritt 2 (Wahl der Pivotzeile s) und in Schritt 3 (Basistransformation). In Schritt 2 ist dabei v.a. zu berücksichtigen, dass die zur Aufnahme in die Basis vorgesehene Variable x_t ihre obere Schranke κ_t nicht überschreitet. Wird der Wert, den x_t annehmen kann, nur durch κ_t (aber keinen Quotienten b'_i / a'_{it} oder $-(\kappa_i - x_i)/a'_{it}$) beschränkt, so erfolgt kein Austausch von x_t gegen eine bisherige Basisvariable. Vielmehr wird die Transformation $\bar{x}_t := \kappa_t - x_t$ vorgenommen; $\bar{x}_t$ bleibt Nichtbasisvariable mit dem Wert 0.

Eine Iteration des Simplex-Algorithmus mit impliziter Berücksichtigung oberer Schranken

Voraussetzung: Simplextableau mit einer zulässigen Basislösung mit den aktuellen Koeffizienten a'_{ij}, b'_i und c'_j; obere Schranken κ_j für einige oder alle Variablen.

Durchführung: Jede Iteration des Simplex-Algorithmus besteht aus folgenden Schritten.

Schritt 1 (Wahl der Pivotspalte t): Wie beim primalen Simplex-Algorithmus in Kap. 2.4.1.2 beschrieben. x_t sei die Variable mit dem kleinsten negativen Eintrag c'_t in der Ergebniszeile.

Schritt 2 und 3 (Wahl der Pivotzeile s und Tableautransformation): Berechne q_1 und q_2 wie folgt:

$$q_1 := \begin{cases} \infty & \text{falls kein } a'_{it} > 0 \text{ existiert} \\ \min\left\{ \dfrac{b'_i}{a'_{it}} \;\middle|\; i = 1,\ldots,m \text{ mit } a'_{it} > 0 \right\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Mit der Erhöhung des Wertes von x_t würde sich der Wert der in einer Zeile i mit $a'_{it} > 0$ stehenden Basisvariablen $x_{B(i)}$ verringern.

$$q_2 := \begin{cases} \infty & \text{falls kein } a'_{it} < 0 \text{ existiert} \\ \min\left\{ -\dfrac{\kappa_{B(i)} - x_{B(i)}}{a'_{it}} \;\middle|\; i = 1,\ldots,m \text{ mit } a'_{it} < 0 \right\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Bei Erhöhung des Wertes von x_t würde sich der Wert der in einer Zeile i mit $a'_{it} < 0$ stehenden Basisvariablen $x_{B(i)}$ erhöhen, sie darf ihre obere Schranke jedoch nicht überschreiten.

Bestimme $q := \min\{q_1, q_2, \kappa_t\}$ und transformiere das Problem und/oder die Basislösung nach folgender Fallunterscheidung:

Fall 1 ($q = q_1$): Diejenige (oder eine) Basisvariable x_s, für die $\dfrac{b'_s}{a'_{st}} = q_1$ gilt, verlässt die Basis. Die Transformation erfolgt wie üblich.

Fall 2 ($q = q_2$; $q < q_1$): Eine Basisvariable $x_{B(s)}$ erreicht ihre obere Schranke; für sie gilt $-\dfrac{\kappa_{B(s)} - x_{B(s)}}{a'_{st}} = q_2$. In diesem Fall sind zwei Schritte auszuführen:

Schritt 1: Die Variable $x_{B(s)}$ wird durch $\bar{x}_{B(s)} := \kappa_{B(s)} - x_{B(s)}$ (= 0) ersetzt.

Schritt 2: Die Variable $\bar{x}_{B(s)}$ verlässt für x_t die Basis. Die Tableautransformation erfolgt wie üblich.

Fall 3 ($q = \kappa_t$; $q < q_1$; $q < q_2$): Die bisherige Nichtbasisvariable x_t erreicht ihre obere Schranke und wird durch $\bar{x}_t := \kappa_t - x_t$ ersetzt. Diese neue Variable erhält den Wert 0; sie bleibt Nichtbasisvariable. Es erfolgt kein Basistausch und damit auch keine Tableautransformation.

* * * * *

Beispiel: Wir wenden den Algorithmus auf die folgende Probleminstanz an:

Maximiere $F(x_1, x_2) = 3x_1 + 5x_2$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rclll} x_1 + 2x_2 & \leq & 90 & & \text{Bed. I} \\ x_1 + x_2 & \leq & 80 & & \text{Bed. II} \\ x_1 & \leq & 50 & & \text{Bed. III} \\ x_2 & \leq & 35 & & \text{Bed. IV} \\ x_1, x_2 & \geq & 0 & & \end{array}$$

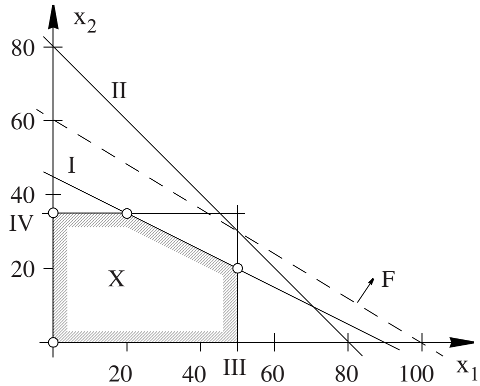

Abb. 2.16

Der Beginn des Lösungsganges ist in Tab. 2.19 wiedergegeben; siehe zum gesamten Verlauf auch Abb. 2.16.

	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
x_3	1	[2]	1		90
x_4	1	1		1	80
F	– 3	– 5			0

$x_t = x_2$; $q_1 = 45$, $q_2 = \infty$,

$q = \kappa_2 = 35$; (Fall 3)

Tab. 2.19

Die für die Aufnahme in die Basis vorgesehene Variable x_2 erreicht ihre obere Schranke 35. Sie wird gemäß Fall 3 durch $\bar{x}_2 = 35 - x_2 = 0$ substituiert. Dies geschieht durch Einsetzen von $x_2 = 35 - \bar{x}_2$ in jede Zeile des Tableaus. $\bar{x}_2$ bleibt zunächst Nichtbasisvariable.

	x_1	$\bar{x}_2$	x_3	x_4	b_i
x_3	[1]	–2	1		20
x_4	1	–1		1	45
F	–3	5			175

$x_t = x_1$; $q_1 = 20$, $q_2 = \infty$,

$\kappa_1 = 50$; $q = q_1 = 20$; (Fall 1)

Tab. 2.20

Nun wird gemäß Fall 1 die Variable x_1 für x_3 in die Basis aufgenommen.

	x_1	$\bar{x}_2$	x_3	x_4	b_i
x_1	1	[–2]	1		20
x_4		1	–1	1	25
F		–1	3		235

$x_t = \bar{x}_2$; $q_1 = 25$, $q_2 = (50 - 20)/2 = 15$,

$\bar{\kappa}_2 = 35$; $q = q_2 = 15$; (Fall 2)

Tab. 2.21

In der nächsten Iteration liegt Fall 2 vor. $\bar{x}_2$ soll in die Basis aufgenommen werden. Dabei erreicht x_1 ihre obere Schranke $\kappa_1 = 50$. Daher wird zunächst x_1 durch $\bar{x}_1 = 50 - x_1$ substituiert (erster Teil von Tab. 2.22). Im zweiten Schritt verlässt $\bar{x}_1$ für $\bar{x}_2$ die Basis, und man erhält ein Optimaltableau (zweiter Teil von Tab. 2.22).

	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	x_3	x_4	b_i
$\bar{x}_1$	1	[2]	–1		30
x_4		1	–1	1	25
F		–1	3		235
$\bar{x}_2$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$		15
x_4	$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$	1	10
F	$\frac{1}{2}$		$\frac{5}{2}$		250

Tab. 2.22

Durch Transformation der Variablen $\bar{x}_i$ lässt sich die Optimallösung $x_1 = 50$, $x_2 = 20$ mit F = 250 entwickeln. Der Lösungsgang für das zu betrachtende Problem bliebe unverändert, wenn wir von vornherein die redundante Nebenbedingung II eliminieren würden.

Bemerkung 2.12: Die Vorgehensweise ist auch auf den dualen Simplex-Algorithmus und auf die M-Methode übertragbar.

2.6.2 Der revidierte Simplex-Algorithmus

Hat man größere LPs zu lösen, so wird man dies nicht von Hand, sondern mit Hilfe eines Computers tun. Vor allem für Probleme, deren Variablenzahl n wesentlich größer ist als die Anzahl der Nebenbedingungen, eignet sich der im Folgenden erläuterte „revidierte Simplex-Algorithmus" besser als der in Kap. 2.4.1.2 geschilderte primale Simplex-Algorithmus. Wir skizzieren ihn für das folgende **Maximierungsproblem** in Normalform:[16]

Maximiere $F(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ unter den Nebenbedingungen

$$A\,\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \text{mit} \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Das Problem besitze n Variablen und m voneinander linear unabhängige Nebenbedingungen.

Wir gehen aus von einem Simplextableau, wie es in Tab. 2.4 angegeben ist. Dieses mit $\tilde{A}$ bezeichnete Tableau enthalte die Matrix A, den mit negativem Vorzeichen eingetragenen Zielfunktionsvektor $\mathbf{c}^T$, einen Einheitsvektor $\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\1\end{bmatrix}$ für den als Basisvariable interpretierten Zielfunktionswert F, die rechte Seite $\mathbf{b}$ sowie 0 als Startwert für F: $\tilde{A} := \left[\begin{array}{cc|c} A & \mathbf{0} & \mathbf{b} \\ -\mathbf{c}^T & 1 & 0 \end{array}\right]$

16 Eine ausführliche Darstellung der Vorgehensweise findet man z.B. in Hillier und Lieberman (1997, S. 101 ff.) oder Neumann und Morlock (2002, S. 109 ff.).

Seien nun $\mathbf{x}_B^T := (x_{k_1}, ..., x_{k_m})$ sowie F die Basisvariablen einer zu bestimmenden (k-ten) Basislösung. Dann enthalte eine Teilmatrix B von $\tilde{A}$ die zugehörigen Spaltenvektoren:

$$B := \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{k_1} & \dots & \mathbf{a}_{k_m} & \mathbf{0} \\ -c_{k_1} & \dots & -c_{k_m} & 1 \end{bmatrix}$$

Die Werte der *aktuellen* Basisvariablen erhält man, indem man das Gleichungssystem

$$B \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{bmatrix} \text{ oder (anders ausgedrückt) } \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ F \end{bmatrix} = B^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{bmatrix} \text{ löst.}$$

Ganz analog erhält man im Simplextableau für die k-te Basislösung unter den Basisvariablen die erforderliche Einheitsmatrix, indem man $B^{-1} \cdot B$ bildet. Wenn man sich dies überlegt hat, wird schließlich auch klar, dass man durch $B^{-1} \cdot \tilde{A}$ das gesamte neue Tableau, also auch die neuen Nichtbasisvektoren $\mathbf{a}_j^{\prime}$, erhalten würde.

Die *Effizienz des revidierten Simplex-Algorithmus* ergibt sich daraus, dass für eine Iteration des primalen Simplex-Algorithmus viel weniger Information erforderlich ist, als ein vollständiges Tableau enthält. Ganz ähnlich wie beim primalen und dualen Simplex-Algorithmus lässt sich die Vorgehensweise mit folgenden drei Schritten beschreiben:

Schritt 1 (Bestimmung der Pivotspalte): Man benötigt die Reduzierten Kosten bzw. Schattenpreise der Nichtbasisvariablen, d.h. die entsprechenden Einträge in der Ergebniszeile. Diese erhält man durch Multiplikation der Ergebniszeile von B^{-1} mit den ursprünglichen Spaltenvektoren der Nichtbasisvariablen.

Schritt 2 (Ermittlung der Pivotzeile): Zu bestimmen sind nur der Spaltenvektor der in die Basis aufzunehmenden Variablen (Pivotspalte) sowie die aktuelle rechte Seite $\mathbf{b}'$. Man erhält sie durch Multiplikation von B^{-1} mit den entsprechenden Spaltenvektoren im Anfangstableau.

Schritt 3 (Modifikation von B^{-1}): Grundsätzlich lässt sich B^{-1} jeweils durch Invertieren der aktuellen Matrix B gewinnen. Dies ist z.B. mit dem Gauß-Jordan-Algorithmus durch elementare Zeilenumformung von $(B|I)$ in $(I|B^{-1})$ mit I als $m \times m$-Einheitsmatrix möglich; vgl. etwa Büning et al. (2000, S. 152 ff.) oder Opitz (2002, S. 277). Da sich B in jeder Iteration jedoch nur in einer Spalte, der Pivotspalte, verändert, kann diese Berechnung entsprechend vereinfacht werden. Siehe hierzu auch Aufgabe 2.18 im Übungsbuch Domschke et al. (2011).

Der revidierte Simplex-Algorithmus ist vor allem dann besonders effizient, wenn m wesentlich kleiner als n ist.

Beispiel: Wir wollen die Vorgehensweise anhand des Produktionsplanungsproblems aus Kap. 2.2 veranschaulichen. Das Anfangstableau $\tilde{A}$ ist nochmals in Tab. 2.23 wiedergegeben.

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	F	b_i
x_3	1	1	1				100
x_4	6	9		1			720
x_5		1			1		60
F	–10	–20	0	0	0	1	0

Tab. 2.23

Die darin enthaltene Basislösung lässt sich verbessern, indem wir x_5 aus der Basis entfernen und dafür x_2 in diese aufnehmen. Die Matrizen B und B^{-1} besitzen folgendes Aussehen:

$$B = \begin{array}{c} \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ F \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} x_2 & x_3 & x_4 & F \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -20 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 1 \end{bmatrix}$$

Die Multiplikation von B^{-1} mit $\tilde{A}$ liefert:

$$\begin{array}{c} \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ F \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} x_2 & x_3 & x_4 & F \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & F & b_i \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 100 \\ 6 & 9 & 0 & 1 & 0 & 0 & 720 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 60 \\ -10 & -20 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ F \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & F & b_i \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \mathbf{60} \\ \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & \mathbf{40} \\ \mathbf{6} & 0 & 0 & 1 & -9 & 0 & \mathbf{180} \\ \mathbf{-10} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{20} & 1 & \mathbf{1200} \end{bmatrix} \end{array}$$

Durch Aufnahme von x_1 für x_4 in die Basis lässt sich die Lösung weiter verbessern. Um dies zu erkennen, ist es nicht erforderlich, B^{-1} vollständig mit $\tilde{A}$ zu multiplizieren. Es reicht vielmehr aus, zunächst die Reduzierten Kosten bzw. Schattenpreise der Nichtbasisvariablen und anschließend die Elemente der Pivotspalte und der rechten Seite (alle fett gedruckt) zu berechnen.

Für die erneute Basistransformation wird zunächst die neue Matrix B invertiert:

$$B = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ F \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & F \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -10 & -20 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{6} & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Durch die Multiplikation von B^{-1} mit der Matrix $\tilde{A}$ (die im Laufe des Verfahrens unverändert bleibt) kann das in Tab. 2.24 angegebene Optimaltableau ermittelt werden (vgl. auch Tab. 2.5).

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_1	1			$\frac{1}{6}$	$-\frac{3}{2}$	30
x_2		1			1	60
x_3			1	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	10
F	0	0	0	$\frac{5}{3}$	5	1500

Optimale Basislösung:

$x_1 = 30, x_2 = 60, x_3 = 10;$

$x_4 = x_5 = 0; F = 1500$

Tab. 2.24

Bemerkung 2.13 :

a) Ein Großteil der Rechenzeit des revidierten Simplex-Algorithmus ist für die Bestimmung der Inversen B^{-1} der Matrix B erforderlich. Effiziente Methoden benutzen die so genannte Produktform der Inversen, vgl. hierzu Winston (2004, Kap. 10.2).

b) Die Vorgehensweise des revidierten Simplex-Algorithmus ist auch auf den dualen Simplex-Algorithmus, die M-Methode sowie auf Vorgehensweisen mit impliziter Berücksichtigung oberer Schranken (siehe Kap. 2.6.1) übertragbar. Zur effizienten Lösung „großer" linearer Optimierungsprobleme vgl. Nemhauser (1994).

c) Zur Lösung von LPs mit $n \gg m$ bedient man sich häufig auch der **Methode der Spaltengenerierung**. $n \gg m$ bedeutet, dass die Anzahl der Variablen wesentlich größer ist als die Anzahl der Restriktionen. Man löst dabei zunächst ein Masterproblem mit einer (kleinen = reduzierten) Teilmenge der Variablen (Spalten). Anhand eines Subproblems lässt sich unter Verwendung der Reduzierten Kosten bzw. Schattenpreise der optimalen Lösung des Masterproblems entscheiden, ob zur Optimierung des Gesamtproblems weitere Spalten im Masterproblem erforderlich sind; vgl. hierzu Winston (2004, Kap. 10.3) oder Martin (1999, S. 369 ff.).
Anwendungen dieser Technik sind problemspezifisch. Besonders erfolgreiche Anwendungen gibt es im Bereich der Verschnittoptimierung (vgl. Neumann und Morlock (2002, Kap. 3.4) oder Winston (2004, Kap. 10.3)) und der Tourenplanung (vgl. Domschke und Scholl (2010, Kap. 5.4.2)). Siehe zur Verschnittoptimierung ohne Spaltengenerierung auch die Aufgaben 1.5 und 6.3 im Übungsbuch Domschke et al. (2011).

d) LPs besitzen gelegentlich die Eigenschaft, dass alle Variablen und ein Großteil der Nebenbedingungen sich so in Cluster unterteilen lassen, dass Variablen eines Clusters nicht in Nebenbedingungen eines anderen Clusters vorkommen. Für derart strukturierte LPs sind diese Struktur ausnutzende **Dekompositionsverfahren** entwickelt worden. Das *Dantzig-Wolfe-Verfahren* wird z.B. in Klein und Scholl (2004, Kap. 5.3) und Winston (2004, Kap. 10.4.) ausführlich beschrieben.

2.7 Optimierung bei mehrfacher Zielsetzung

Im Folgenden beschäftigen wir uns mit Optimierungsproblemen bei mehrfacher Zielsetzung; vgl. zu diesem Problembereich z.B. Isermann (1989), Dinkelbach und Kleine (1996) oder Ehrgott (2005). Zugehörige Lösungsmethoden lassen sich sehr gut anhand der linearen Optimierung veranschaulichen. Wir beginnen mit definitorischen Grundlagen und beschreiben in Kap. 2.7.2 Vorgehensweisen zur Lösung von Zielkonflikten.

2.7.1 Grundlagen

Zwei Ziele können zueinander komplementär, konkurrierend (konträr) oder neutral sein.

Hat man z.B. zwei *konkurrierende* Ziele, so tritt insofern ein **Zielkonflikt** auf, als mit der Verbesserung des Zielerreichungsgrades eines Zieles sich derjenige des anderen Zieles verschlechtert. Das bedeutet, dass es keine Lösung gibt, die für beide Ziele gleichzeitig ein Optimum darstellt. Bezeichnet man mit z_i^* den Zielfunktionswert der optimalen Lösung eines zu maximierenden Zieles i und mit $z_i(\mathbf{x})$ den bei einer Lösung **x** hinsichtlich i erreichten Wert, so bildet der Quotient $(z_i^* - z_i(\mathbf{x}))/z_i^*$ den mit **x** realisierten **Zielerreichungsgrad**.

Hat man dagegen ausschließlich *komplementäre* Ziele in einem LP zu berücksichtigen, so entsteht kein Zielkonflikt. Die Menge der zulässigen Lösungen enthält dann zumindest einen Eckpunkt, der für jedes der Ziele ein Optimum darstellt. In diesem Falle spricht man von der Existenz einer **perfekten Lösung**.

Im Falle der *Neutralität* bleibt von der Veränderung des Erreichungsgrades eines Zieles derjenige der übrigen unberührt.

Beispiele für unterschiedliche Ziele, die bei unserem Produktionsplanungsproblem (in Kap. 2.2) verfolgt werden können, sind die Maximierung von:

Deckungsbeitrag	$DB(x_1,x_2)$	=	$10x_1 + 20x_2$
Absatz	$A(x_1,x_2)$	=	$x_1 + x_2$
Umsatz	$U(x_1,x_2)$	=	$60x_1 + 40x_2$

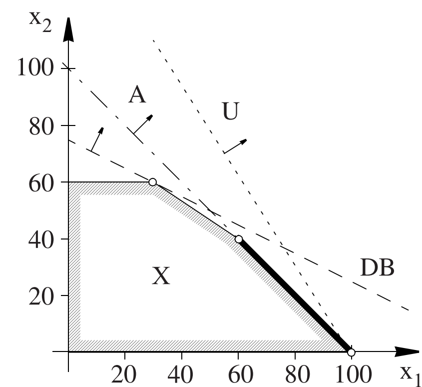

Abb. 2.17

Maximaler Deckungsbeitrag DB* = 1500 wird im Punkt $(x_1,x_2) = (30,60)$ erzielt; hinsichtlich der Absatzmaximierung sind alle Lösungen im Intervall mit den Eckpunkten (60,40) und (100,0) optimal mit A* = 100; der maximale Umsatz U* = 6000 ergibt sich im Punkt (100,0); vgl. Abb. 2.17. Somit sind zumindest die Zielpaare DB und Absatz bzw. DB und Umsatz konkurrierend.

Definition 2.13: Eine Lösung zweier konfliktärer Zielsetzungen nennt man **Pareto-optimal**, wenn es keine andere Lösung gibt, die hinsichtlich beider Ziele nicht schlechter ist.

Beispiel: In Abb. 2.18 betrachten wir zu obigem Produktionsplanungsproblem die Ziele Umsatz- und Deckungsbeitragsmaximierung. Die dicke Linie repräsentiert sämtliche Pareto-optimalen Lösungen. Alle sonstigen (von diesen dominierten) zulässigen Lösungen besitzen Zielfunktionspaare, die links bzw. unterhalb der dicken Linie liegen.

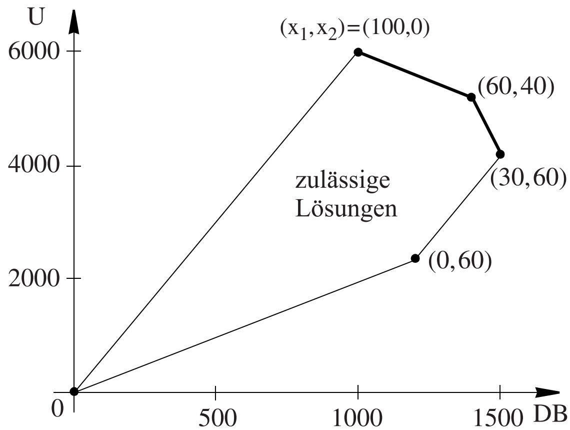

Abb. 2.18

2.7.2 Vorgehensweisen zur Lösung von Zielkonflikten

Wir schildern im Folgenden Möglichkeiten zur Lösung von Zielkonflikten. Dabei wird auf unterschiedliche Weise eine Kompromisslösung ermittelt. Vier einfache Vorgehensweisen sind Lexikographische Ordnung von Zielen, Zieldominanz, Zielgewichtung sowie Berücksichtigung von Abstandsfunktionen.

2.7.2.1 Lexikographische Ordnung von Zielen

Der Entscheidungsträger ordnet die zu verfolgenden Ziele in

Ziel A: wichtigstes Ziel

Ziel B: zweitwichtigstes Ziel

Ziel C: drittwichtigstes Ziel etc.,

(ausgedrückt durch A » B » C » ...).

Nach Erstellung dieser „lexikographischen Ordnung“ ist die Vorgehensweise für die Schritte 1 bis 3 wie folgt:

Schritt 1: Optimiere das Problem *ausschließlich* bezüglich Ziel A. Die Menge der optimalen Lösungen sei X_A.

Schritt 2: Optimiere das Problem *ausschließlich* bezüglich Ziel B, wobei nur X_A als Menge der zulässigen Lösungen betrachtet wird. Die Menge der dabei erhaltenen optimalen Lösungen sei X_B.

Schritt 3: Optimiere das Problem *ausschließlich* bezüglich Ziel C, wobei nun nur X_B als Menge der zulässigen Lösungen betrachtet wird.

Die Vorgehensweise berücksichtigt „untergeordnete“ Ziele nur dann, wenn für „übergeordnete“ Ziele der Fall parametrischer Lösungen vorliegt.

Für das Produktionsplanungsproblem erhalten wir dann, wenn Deckungsbeitrags- bzw. Umsatzmaximierung als das wichtigste Ziel angesehen werden, die umsatzmaximale Lösung.

Bei Absatz » DB » Umsatz bzw. Absatz » Umsatz » DB erhalten wir die Kompromisslösung (60,40) bzw. (100,0).

Eine (i.d.R. vorzuziehende) Variante der Vorgehensweise der lexikographischen Ordnung erhält man, wenn man bei Optimierung bezüglich eines bestimmten Zieles erlaubt, dass hinsichtlich der wichtigeren Ziele eine Abweichung vom Optimalwert um einen vorzugebenden Prozentsatz erlaubt ist.

Vgl. zur lexikographischen Ordnung auch Aufg. 2.22 im Übungsbuch Domschke et al. (2011).

2.7.2.2 Zieldominanz

Eines der zu verfolgenden Ziele (i.Allg. das dem Entscheidungsträger wichtigste) wird zum *Hauptziel* deklariert und in der Zielfunktion berücksichtigt. Alle übrigen Ziele werden zu *Nebenzielen* erklärt und in Form von $\le$- oder $\ge$- Nebenbedingungen berücksichtigt. Für zu maximierende Nebenziele führt man eine mindestens zu erreichende untere Schranke, für zu minimierende Nebenziele eine höchstens annehmbare obere Schranke ein. Derartige Schranken für Nebenziele werden als *Anspruchsniveaus* bezeichnet.

Ein Problem besteht dabei in Folgendem: Durch ungeeignete (ungünstige) Schranken für Nebenziele wird unter Umständen der Zielerreichungsgrad des Hauptzieles zu sehr beschnitten oder die Menge der zulässigen Lösungen sogar leer.

Wir betrachten erneut unser Produktionsplanungsproblem: Hauptziel sei die Maximierung des Deckungsbeitrags.

Die Nebenziele Absatz- und Umsatzmaximierung mit den oben angegebenen Zielfunktionskoeffizienten mögen durch folgende untere Schranken in das Nebenbedingungssystem eingehen:

$$\text{Absatz} \ge 95 \quad \text{und} \quad \text{Umsatz} \ge 4800$$

Die optimale Lösung des dadurch entstandenen LPs ist: $x_1 = x_2 = 48$; DB = 1440, A = 96, U = 4800.

Verfolgt man ausschließlich das Ziel der Deckungsbeitragsmaximierung, so erhält man den DB = 1500 bei einem Absatz A = 90 und einem Umsatz U = 4200.

2.7.2.3 Zielgewichtung

Wir gehen davon aus, dass t Ziele berücksichtigt werden sollen. Bei der Zielgewichtung bewertet man die Ziele mit reellen Zahlen

$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_t$ mit $0 \le \lambda_i \le 1$; dabei soll $\sum_{i=1}^{t} \lambda_i = 1$ gelten.

Nachteil dieser Vorgehensweise zur Lösung von LPs mit mehrfacher Zielsetzung:
Optimale Lösung ist bei Anwendung der Zielgewichtung (wie bei einfacher Zielsetzung) ein Eckpunkt des zulässigen Bereichs; nur für spezielle λ_i (parametrische Lösung) sind mehrere Eckpunkte und deren konvexe Linearkombinationen optimal.

Wir wenden auch diese Methode auf unser Produktionsplanungsproblem an: Gewichten wir das Zieltripel (DB, Absatz, Umsatz) mit (1/10, 8/10, 1/10), so lautet die neue Zielfunktion:

Maximiere $\Phi(x_1, x_2) = \frac{1}{10} \cdot DB(x_1, x_2) + \frac{8}{10} \cdot A(x_1, x_2) + \frac{1}{10} \cdot U(x_1, x_2) = 7.8 \cdot x_1 + 6.8 \cdot x_2$

unter den Nebenbedingungen (2.7) – (2.10).

Die optimale Lösung dieses Problems liegt im Punkt ($x_1 = 60$, $x_2 = 40$) und besitzt die Zielfunktionswerte DB = 1400, A = 100 sowie U = 5200.

2.7.2.4 Berücksichtigung von Abstandsfunktionen

Wir gehen wiederum davon aus, dass t Ziele zu berücksichtigen sind. Zur Bestimmung einer Kompromisslösung auf der Grundlage von Abstandsfunktionen ermittelt man zunächst für jedes Ziel i gesondert den optimalen Zielfunktionswert z_i^*.

Anschließend wird eine Lösung $\mathbf{x}$ des gesamten Problems so gesucht, dass ein möglichst geringer „Abstand" zwischen den z_i^* und den durch $\mathbf{x}$ gewährleisteten Zielfunktionswerten besteht. Je nach unterstellter Bedeutung der einzelnen Ziele (und zum Zwecke der Normierung ihrer Zielfunktionswerte) können die Abstände zusätzlich mit Parametern λ_i wie in Kap. 2.7.2.3 gewichtet werden. Eine allgemeine, zu minimierende *Abstandsfunktion* lautet somit:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} \left[\sum_{i=1}^{t} \lambda_i \cdot \left| z_i^* - z_i(\mathbf{x}) \right|^p \right]^{1/p} & \text{für } 1 \le p < \infty \\ \max\{\lambda_i \cdot \left| z_i^* - z_i(\mathbf{x}) \right| \text{ über alle } i = 1,...,t\} & \text{für } p = \infty \end{cases} \tag{2.29}$$

Der Parameter p ist vorzugeben. Je größer p gewählt wird, umso stärker werden große Abweichungen bestraft. Im Falle von $p = \infty$ bewertet Φ ausschließlich die größte auftretende Zielabweichung; sie wird als *Tschebyscheff-Norm* bezeichnet. In Abhängigkeit von p kann Φ linear oder nichtlinear sein.

Für unser Produktionsplanungsproblem erhalten wir mit den Vorgaben DB* = 1500, A* = 100 bzw. U* = 6000 für DB, Absatz bzw. Umsatz sowie den Parametern $p = 1$, $\lambda_{DB} = 1/10$, $\lambda_A = 8/10$, $\lambda_U = 1/10$ die Zielsetzung:

Minimiere $\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{10} \cdot |1500 - 10x_1 - 20x_2| + \frac{8}{10} \cdot |100 - x_1 - x_2| + \frac{1}{10} \cdot |6000 - 60x_1 - 40x_2|$

Da die vorgegebenen Werte z_i^* bei zu maximierenden (Ausgangs-) Zielsetzungen durch $z_i(\mathbf{x})$ nicht überschritten werden können, lassen sich die Betragsstriche durch Klammern ersetzen. Wir erhalten somit:

Minimiere $\Phi(\mathbf{x}) = 830 - (7.8 \cdot x_1 + 6.8 \cdot x_2)$ bzw. Maximiere $\Psi(\mathbf{x}) = 7.8 \cdot x_1 + 6.8 \cdot x_2$

Man erkennt, dass die Vorgehensweise bei p = 1 der Zielgewichtung entspricht. Wählt man bei beiden Vorgehensweisen dieselben Gewichte λ_i, so sind die erhaltenen Kompromisslösungen identisch.

Verändern wir die oben angegebenen Parameter lediglich durch die Annahme $p = \infty$, so können wir das Problem unter Abwandlung der Zielfunktion (2.29) zunächst wie folgt formulieren:

Minimiere $\Phi(\mathbf{x})$ =

$$\max\left\{\frac{1}{10}\cdot(1500-10x_1-20x_2), \frac{8}{10}\cdot(100-x_1-x_2), \frac{1}{10}\cdot(6000-60x_1-40x_2)\right\} \quad (2.30)$$

unter den Nebenbedingungen (2.7) – (2.10)

Bei (2.30) handelt es sich um eine so genannte Minimax-Zielsetzung, die dazu führt, dass das Problem nichtlinear ist. Es ist jedoch möglich, durch Verwendung einer Variablen d (Distanz) für den maximal zu akzeptierenden Abstand $\lambda_i \cdot \left|z_i^* - z_i(\mathbf{x})\right|$ bzw. $\lambda_i \cdot (z_i^* - z_i(\mathbf{x}))$ das Problem in das folgende LP zu überführen:

Minimiere $\Phi(\mathbf{x}, d) = d$ unter den Nebenbedingungen (2.7) – (2.10) sowie

$$d \geq \frac{1}{10}\cdot(1500-10x_1-20x_2) \qquad \text{DB-Restriktion}$$

$$d \geq \frac{8}{10}\cdot(100-x_1-x_2) \qquad \text{Absatzrestriktion}$$

$$d \geq \frac{1}{10}\cdot(6000-60x_1-40x_2) \qquad \text{Umsatzrestriktion}$$

Als optimale Lösung dieses Problems erhalten wir:

$$x_1 = 83\frac{1}{3},\ x_2 = 16\frac{2}{3},\ d = 33\frac{1}{3};\ DB = 1166\frac{2}{3},\ A = 100,\ U = 5666\frac{2}{3}$$

Eine alternative, ggf. bessere Abstandsfunktion entsteht durch Verwendung des Terms $1 - z_i(\mathbf{x})/z_i^*$ in (2.29). Dadurch werden die *relativen Abweichungen* vom bestmöglichen Wert minimiert, die Zielerreichungsgrade somit maximiert.

Eine Verallgemeinerung der geschilderten Vorgehensweisen der Verwendung von Abstandsfunktionen stellt das **Goal-Programming** dar. Auch hierbei wird eine Kompromisslösung gesucht, bei der gemäß (2.29) die Summe der gewichteten Abstände von vorgegebenen Werten z_i^* minimiert wird. Die z_i^* können jedoch vom Planer beliebig gewählt werden. Selbst bei $p = 1$ und $p = \infty$ kann in diesem Fall in der Regel nicht auf die Betragsstriche in den Formeln verzichtet werden; die Zielfunktionen sind nichtlinear.

Eine *lineare Variante* des Goal-Programming-Ansatzes wird z.B. in Dinkelbach und Kleine (1996, S. 56 ff.) beschrieben. Dabei sind für jede Zielsetzung i eine untere Schranke $\underline{d}_i$, die möglichst nicht unterschritten, und eine obere Schranke $\overline{d}_i$, die möglichst nicht überschritten werden soll, vorzugeben. In der Zielfunktion $\Phi(\mathbf{x}, \underline{\mathbf{d}}, \overline{\mathbf{d}})$ werden das Unterschreiten von $\underline{d}_i$ pro Einheit durch eine Größe $\underline{w}_i$ und das Überschreiten von $\overline{d}_i$ pro Einheit durch eine Größe $\overline{w}_i$ bestraft. $\Phi(\mathbf{x}, \underline{\mathbf{d}}, \overline{\mathbf{d}}) = \sum_i (\underline{w}_i \cdot \underline{d}_i + \overline{w}_i \cdot \overline{d}_i)$ ist linear.

Vgl. zu Goal-Programming auch die Bibliographie Schniederjans (1995).

2.8 Spieltheorie und lineare Optimierung

Bei der Spieltheorie handelt es sich um eine mathematische Theorie, die sich mit Wettbewerbssituationen befasst und Handlungsempfehlungen für Entscheidungen gegnerischer Parteien entwickelt. In Abhängigkeit vom betrachteten Modell (2 oder allgemein n Parteien, im Falle $n > 2$ mit oder ohne Kooperationsmöglichkeit der Parteien etc.) liegen mathematisch mehr oder weniger schwierig lösbare Problemstellungen vor. Zu den am leichtesten handhabbaren Modellen gehören *2-Personen-Nullsummen-Matrixspiele.*[17] Wir werden sehen, dass die Bestimmung optimaler Vorgehensweisen für beide Spieler mit Hilfe der linearen Optimierung möglich ist. Dabei werden wir erneut Vorzüge der Dualitätstheorie erkennen.

Die beiden Spieler nennen wir A und B. Spiele heißen **Nullsummenspiele**, wenn die Summe der Zahlungen pro Spiel gleich 0 ist. Spieler A zahlt an Spieler B einen bestimmten Betrag oder umgekehrt; der Gewinn des einen Spielers ist gleich dem Verlust des anderen. Spiele heißen **Matrixspiele**, wenn alle Informationen über die Bedingungen eines solchen Spieles in Form einer Matrix (siehe Tab. 2.25) angegeben werden können.

Spieler A \ Spieler B	b_1	...	b_j	...	b_n
a_1	e_{11}	...	e_{1j}	...	e_{1n}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
a_i	e_{i1}	...	e_{ij}	...	e_{in}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
a_m	e_{m1}	...	e_{mj}	...	e_{mn}

Tab. 2.25

Matrizen von dem in Tab. 2.25 gezeigten Typ sind dem Leser aus der betriebswirtschaftlichen Entscheidungslehre geläufig; siehe z.B. Bamberg und Coenenberg (2006) oder Domschke und Scholl (2008, Kap. 2). Dort ist ein Entscheidungsträger (hier Spieler A) mit unterschiedlichen Umweltsituationen b_j konfrontiert. Im Falle eines 2-Personen-Matrixspieles steht der Spieler A einem (bewusst handelnden) Gegenspieler B gegenüber.

Die Eintragungen in Tab. 2.25 besitzen folgende Bedeutung:

- a_i Strategien (Alternativen) des Spielers A
- b_j Strategien (Alternativen) des Spielers B
- e_{ij} Zahlung von B an A, falls Spieler A seine Strategie a_i und Spieler B seine Strategie b_j spielt

	b_1	b_2	$\underline{e}_i$
a_1	2	3	2
a_2	3	4	3*
$\bar{e}_j$	3*	4	

Tab. 2.26

Tab. 2.26 zeigt u.a. die Auszahlungen eines Spieles, bei dem jeder Spieler zwei Strategien besitzt. Offensichtlich handelt es sich um ein ungerechtes Spiel, da Spieler B in jeder Situation verliert. Dessen ungeachtet kann man sich aber überlegen, welche Strategien man wählen würde, falls man bei diesem Spiel als Spieler A bzw. B agiert.

---

17 Weitere Ausführungen zur Spieltheorie findet man z.B. in Borgwardt (2001, Kap. 27 ff.), Bamberg und Coenenberg (2006) oder Holler und Illing (2009).

Wählt Spieler A die Strategie a_i, so erhält er mindestens eine Auszahlung von
$\underline{e}_i := \min\{e_{ij} \mid j = 1,...,n\}$.

Eine Strategie a_{i*}, für die $\underline{e}_{i*} := \max\{\underline{e}_i \mid i = 1,...,m\}$ gilt, nennt man **Maximinstrategie** des Spielers A.

$\underline{e}_{i*}$ heißt **unterer Spielwert** eines Spieles. Es ist der *garantierte Mindestgewinn*, den Spieler A erzielen kann, sofern er an seiner Maximinstrategie festhält.

Wählt Spieler B die Strategie b_j, so zahlt er höchstens $\bar{e}_j := \max\{e_{ij} \mid i = 1,...,m\}$.

Eine Strategie b_{j*}, für die $\bar{e}_{j*} := \min\{\bar{e}_j \mid j = 1,...,n\}$ gilt, heißt **Minimaxstrategie** des Spielers B.

$\bar{e}_{j*}$ nennt man **oberen Spielwert** eines Spieles. Es ist der *garantierte Höchstverlust*, den Spieler B in Kauf nehmen muss, sofern er an seiner Minimaxstrategie festhält.

Wählt Spieler A eine Strategie a_{i*} und Spieler B eine Strategie b_{j*}, so gilt für die Auszahlung e_{i*j*} die Beziehung: $\underline{e}_{i*} \le e_{i*j*} \le \bar{e}_{j*}$

Definition 2.14: Falls für ein Spiel die Gleichung $\underline{e}_{i*} = e_{i*j*} = \bar{e}_{j*}$ erfüllt ist, so sagt man:

1) e_{i*j*} ist der **Wert des Spieles in reinen Strategien**.
2) Das Strategienpaar (a_{i*}, b_{j*}) stellt einen **Sattelpunkt** des Spieles dar.
3) Das Spiel ist **determiniert**.
4) a_{i*} und b_{j*} nennt man **Gleichgewichtsstrategien** des betrachteten Spieles.

Bemerkung 2.14: Es rentiert sich für keinen Spieler, von seiner Gleichgewichtsstrategie abzuweichen. Besitzt ein Spieler mehr als eine Gleichgewichtsstrategie, so kann er davon eine beliebige wählen oder auch unter diesen abwechseln.

Die Aussage, dass sich die Abweichung von einer Gleichgewichtsstrategie für keinen der Spieler auszahlt, kann auch durch die Beziehung

$$e_{ij*} \le e_{i*j*} \le e_{i*j}$$

ausgedrückt werden. Vgl. hierzu die Definition des Sattelpunktes einer Funktion in Kap. 8.4.1.

Beispiel: Das in Tab. 2.26 angegebene Spiel besitzt beim Strategiepaar (a_2, b_1) einen Sattelpunkt; das Spiel ist determiniert mit dem Spielwert 3. Wenn A an seiner Strategie a_2 festhält, so zahlt es sich für B nicht aus, von b_1 abzuweichen. Analoges gilt für A, wenn B an seiner Strategie b_1 festhält.

Wir betrachten nun das Spiel in Tab. 2.27. Es besitzt den unteren Spielwert $\underline{e}_{i*} = -2$ und den oberen Spielwert $\bar{e}_{i*} = 1$. Es ist also nicht determiniert. Dass es keine Gleichgewichtsstrategien besitzt, kann man sich auf die folgende Weise überlegen:

	b_1	b_2	$\underline{e}_i$
a_1	1	– 2	– 2*
a_2	– 7	8	– 7
$\bar{e}_j$	1*	8	

Tab. 2.27

Wählt A die Strategie a_1, so wird B dem die Strategie b_2 entgegensetzen. Stellt A nach einer Weile fest, dass B stets b_2 spielt, so wird er auf seine dazu günstigere Strategie a_2 übergehen. Dies wiederum wird B dazu veranlassen, auf b_1 zu wechseln usw.

Diese Überlegung führt allgemein zu der Erkenntnis, dass bei nicht-determinierten Spielen ein Wechsel zwischen den verfügbaren Strategien stattfindet. Mit welcher relativen Häufigkeit dabei die einzelnen Strategien gewählt werden sollten, kann man sich für Spiele mit nur zwei Strategien für mindestens einen der Spieler graphisch veranschaulichen.

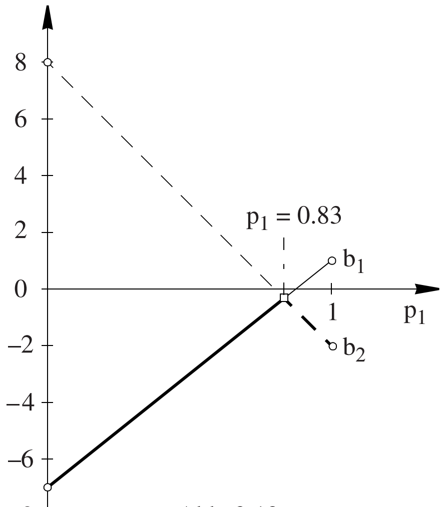

Abb. 2.19 a

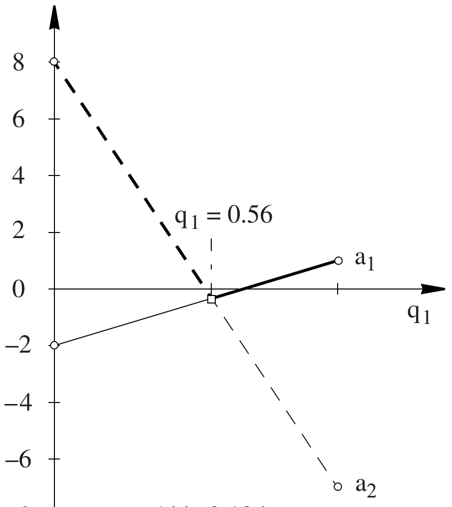

Abb. 2.19 b

Wir betrachten wiederum das Spiel in Tab. 2.27 und gehen zunächst davon aus, dass B stets seine Strategie b_1 spielt. Wählt A mit der Wahrscheinlichkeit $p_1 = 1$ (also stets) seine Strategie a_1, so erzielt er eine Auszahlung von 1. Wählt er dagegen $p_1 = 0$ (also stets Strategie a_2), so erzielt er eine Auszahlung von –7. Wählt er Wahrscheinlichkeiten $0 < p_1 < 1$, so kann er durchschnittliche Auszahlungen erzielen, wie sie auf der die Punkte (0,–7) und (1,1) verbindenden Strecke in Abb. 2.19 a abzulesen sind. Unter der Annahme, dass B stets seine Strategie b_2 wählt, erhält man aufgrund derselben Überlegung die gestrichelte Gerade durch die Punkte (0,8) und (1,–2).

Spieler A kann nun die Wahrscheinlichkeit für die Wahl seiner Strategien so festlegen (seine Strategien so mischen), dass er (über eine größere Anzahl durchgeführter Spiele gerechnet) einen größtmöglichen Mindestgewinn erzielt. In unserem Beispiel (Abb. 2.19 a) ist das der Schnittpunkt der beiden Geraden. Er besagt, dass die Strategien (a_1, a_2) von A mit den Wahrscheinlichkeiten (p_1,p_2) = (0.83,0.17) gewählt werden sollten. Der (durchschnittliche) *garantierte* Mindestgewinn ist –1/3.

Für Spieler B können, ebenso wie für A, Wahrscheinlichkeiten für die Strategienwahl graphisch ermittelt werden (siehe Abb. 2.19 b); man erhält die Wahrscheinlichkeiten (q_1,q_2) = (0.56, 0.44). Der (durchschnittliche) *garantierte Höchstverlust* von B ist gleich dem (durchschnittlichen) garantierten Mindestgewinn von A. Da dies stets gilt, bezeichnet man diese Zahlung auch als **Wert des Spieles in der gemischten Erweiterung**. Die ermittelten Wahrscheinlichkeiten p_i bzw. q_j bezeichnet man als **Gleichgewichtsstrategien in der gemischten Erweiterung** von Spieler A bzw. B.

Gleichgewichtsstrategien und Wert eines Spieles in der gemischten Erweiterung lassen sich auch für Matrixspiele mit jeweils mehr als zwei Strategien durch Formulierung und Lösung eines LPs ermitteln. Wir erläutern dies für unser obiges Beispiel, und zwar für Spieler A.

Seien z der gesuchte Spielwert und p_1 bzw. p_2 die zu bestimmenden Wahrscheinlichkeiten (bei nur 2 Strategien käme man auch mit p und (1 – p) aus), dann ist folgendes Problem zu lösen:

Maximiere $F(p_1, p_2, z) = z$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} z &\le p_1 - 7\,p_2 \\ z &\le -2\,p_1 + 8\,p_2 \\ & \quad\; p_1 + p_2 = 1 \\ & \quad\; p_1, p_2 \ge 0; \quad z \text{ beliebig aus } \mathbb{R} \end{aligned}$$

Die rechte Seite der ersten (zweiten) Ungleichung gibt den Erwartungswert des Gewinns von Spieler A für den Fall an, dass Spieler B seine Strategie b_1 (b_2) spielt. z ist eine unbeschränkte Variable des Problems. Wir beschränken sie auf den nichtnegativen reellen Bereich, indem wir zu allen Auszahlungen der Matrix den Absolutbetrag des Minimums (in unserem Beispiel = 7) hinzuaddieren. Dadurch wird die Lösung hinsichtlich der p_i nicht verändert. Wir lösen somit (alle Variablen auf die linke Seite gebracht) das Problem:

Maximiere $F(p_1, p_2, z) = z$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} z - 8\,p_1 \qquad\qquad &\le 0 \\ z - 5\,p_1 - 15\,p_2 &\le 0 \\ p_1 + p_2 &= 1 \\ z, p_1, p_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Formulieren wir ein LP für Spieler B, so wird deutlich, dass wir dadurch das duale zu obigem Problem erhalten. Unter Verwendung des Satzes vom komplementären Schlupf können wir uns darüber hinaus Folgendes überlegen: Eine optimale Lösung des Problems für Spieler A liefert uns zugleich eine optimale Lösung des Problems für Spieler B; die Werte der Schattenpreise der Schlupfvariablen der Nebenbedingungen von A sind die optimalen Wahrscheinlichkeiten für B.

In Tab. 2.28 ist das Optimaltableau für das oben formulierte Spiel wiedergegeben. Spieler A *verliert* dabei durchschnittlich $\frac{1}{3}$ GE pro Spiel. Die optimalen Wahrscheinlichkeiten q_1 bzw. q_2 für die Wahl der Strategien b_1 bzw. b_2 seitens des Spielers B entsprechen den Schattenpreisen der Schlupfvariablen p_4 bzw. p_5. Es gilt also $q_1 = \frac{5}{9}$ und $q_2 = \frac{4}{9}$. Spieler B gewinnt durchschnittlich $\frac{1}{3}$ GE je Spiel.

BV	z	p_1	p_2	p_4	p_5	b_i
p_2			1	$\frac{1}{18}$	$-\frac{1}{18}$	$\frac{1}{6}$
z	1			$\frac{5}{9}$	$\frac{4}{9}$	$6\frac{2}{3}$
p_1		1		$-\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{5}{6}$
F				$\frac{5}{9}$	$\frac{4}{9}$	$6\frac{2}{3}$

Optimale Basislösung:

$p_1 = \frac{5}{6}, p_2 = \frac{1}{6}$;

$z = 6\,\frac{2}{3} - 7 = -\frac{1}{3}$

Tab. 2.28

Softwarehinweise zu Kapitel 2

Hinweise auf Software zur Lösung von linearen Optimierungsproblemen auf Personal Computern und Workstations sowie Vergleiche ausgewählter Pakete findet man u.a. bei Stadtler et al. (1988), Moré und Wright (1993), Bixby (2002) sowie Fourer (2005). Ausführlichere Hinweise zu Software findet man ferner in Suhl und Mellouli (2009, Kap. 3).
Zu LINDO und zur Modellierungssprache LINGO vgl. Haase und Kolisch (1997); zu MOPS vgl. Suhl (1994). Weit verbreitete Softwarepakete zur linearen und gemischt-ganzzahligen Optimierung sind CPLEX und XPRESS MP. Letzteres verwenden wir auch im Rahmen unserer Übungen; vgl. Domschke et al. (2011, Kap. 11). Ein interaktives Softwarepaket zur Optimierung bei mehrfacher Zielsetzung ist in Hansohm und Hähnle (1991) enthalten.

Weiterführende Literatur zu Kapitel 2

Bazaraa et al. (1990)
Beisel und Mendel (1987)
Berens et al. (2004)
Borgwardt (2001)
Dantzig und Thapa (1997), (2003)
Domschke et al. (2011) – *Übungsbuch*
Ellinger et al. (2003)
Hillier und Lieberman (1997) und (2005)
Holler und Illing (2009)
Martin (1999)
Nemhauser (1994)
Neumann und Morlock (2002)
Papadimitriou und Steiglitz (1982)
Rommelfanger (2001)
Scholl (2001)
Schrijver (1998)
Taha (2007)
Winston (2004)
Zimmermann (2008)