1

Aufgaben zu: Mathematische Grundbegriffe

Wir beginnen mit einigen Aufgaben, um den Gebrauch der im Abschnitt 1.1 vereinbarten Abkürzungen (aus der mathematischen Logik) beim Aufschreiben mathematischer Sachverhalte zu üben.[1]
Vor dem Bearbeiten der nachfolgenden Aufgaben 1.1–1.22 lese man die Abschnitte 1.1 und 1.2.
Die Aufgaben 1.23–1.53 setzen Kenntnisse der Abschnitte 1.1–1.4 voraus.
Die Aufgaben 1.54–1.63 gehören zum Abschnitt 1.5, für den Kenntnisse aus den Abschnitten 1.2, 1.4 und 1.5 erforderlich sind. Für die Aufgaben 1.64–1.79 zum Abschnitt 1.6 und die Aufgaben 1.80–1.82 zum Abschnitt 1.7 benötigt man nur wenige Kenntnisse aus den Abschnitten 1.1–1.4.

Verwenden von logischen Symbolen

Aufgabe 1.1 *($\exists$ und $\forall$)*
Sei M eine Menge. Geben Sie umgangssprachliche Formulierungen an, die inhaltlich mit
(a) $\exists x \in M : E$ („Es existiert ein $x \in M$ mit der Eigenschaft E.“);
(b) $\forall x \in M :\ A$ („Für alle $x \in M$ gilt die Aussage A.“)
übereinstimmen.

Lösung. **(a):** Z.B. ist „$\exists x \in M :\ E$“ inhaltlich gleichwertig mit
– Es gibt ein $x \in M$ mit der Eigenschaft E.
– Es existiert ein $x \in M$, das die Bedingung E erfüllt.
– Mindestens ein $x \in M$ hat die Eigenschaft E.
– Ein $x \in M$ erfüllt E.
(b): Z.B. ist „$\forall x \in M :\ A$“ inhaltlich gleichwertig mit

[1] Ausführliche Hinweise zum Formulieren mathematischer Gedanken findet man in [Beu 2006].

D. Lau, *Übungsbuch zur Linearen Algebra und analytischen Geometrie*, 2. Aufl., Springer-Lehrbuch,
DOI 10.1007/978-3-642-19278-4_1, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011

– Jedes Element aus M hat die Eigenschaft A.
– Die Elemente aus M erfüllen die Bedingung A.
– Für jedes Element von M gilt A.
– Für ein beliebiges Element aus M gilt A.
– Sei x ein beliebiges Element aus M. Dann gilt A.

Aufgabe 1.2 *($\forall\exists$ und $\exists\forall$)*
Erläutern Sie anhand eines Beispiels, daß es beim Verwenden der Symbole $\forall$ und $\exists$ auf die Reihenfolge dieser Symbole in einer Formel ankommt, d.h., in dem zu findenden Beispiel sind $\forall x \exists y : A$ und $\exists y \forall x : A$ inhaltlich verschiedene Aussagen über die Elemente $x, y \in M$.

Lösung. Wir betrachten die Aussagen

$$\forall x \in \mathbb{Z}\, \exists y \in \mathbb{Z} :\ x + y = 0$$

(Für jede ganze Zahl x existiert eine ganze Zahl y mit $x + y = 0$.)

und

$$\exists y \in \mathbb{Z}\, \forall x \in \mathbb{Z} :\ x + y = 0$$

(Es existiert eine ganze Zahl y, so daß $x + y = 0$ für jede ganze Zahl x gilt.).

Wegen $x + (-x) = 0$ ist die erste Aussage richtig. Dagegen ist die zweite Aussage falsch, da für eine fixierte ganze Zahl y nicht für alle ganzen Zahlen x die Gleichung $x + y = 0$ gilt. Die angegebenen Aussagen können deshalb inhaltlich nicht übereinstimmen.
Man merke sich:
Die Reihenfolge $\forall x \exists y : E$ in einer wahren Aussage bedeutet: Zu jedem (beliebig ausgewähltem) Element $x \in M$ gibt es ein (passend gewähltes) $y \in M$, so daß die Bedingung E erfüllt ist.
Die Reihenfolge $\exists y \forall x : E$ in einer wahren Aussage bedeutet dagegen: Es existiert ein gewisses Element $y \in M$, so daß für dieses (fixierte Element) die Eigenschaft E für beliebige $x \in M$ gilt.
Dem Rat aus [Beu 2006] folgend, kann man sich dies aber auch mit Hilfe des folgenden Beispiels einprägen:

$$\forall m \exists f :\ h(m, f), \quad \exists f \forall m :\ h(m, f),$$

wobei m für *Mann*, f für *Frau* und h für *hat was mit* steht.

Auch wenn nicht jede Übersetzung eines umgangssprachlichen Satzes, mit dem ein mathematischer Sachverhalt ausgedrückt ist, in eine Formel, die logische Zeichen benutzt, das Verstehen dieses Sachverhaltes vereinfacht, kann man jedoch durch eine Übersetzung in eine logische Formel ungenaue Formulierungen im Ausgangssatz entdecken und manchmal auch bessere Formulierungen finden. Dazu die folgende

Aufgabe 1.3 *(Aufschreiben von Sätzen mit Hilfe logischer Symbole)*

Man drücke die folgenden Sätze mit Hilfe der Zeichen $\forall, \exists, \exists!, \neg, \wedge, \vee, \Longrightarrow, \Longleftrightarrow$ und bekannten weiteren mathematischen Symbolen wie z.B. $+, \cdot, ..., \mathbb{N}, ...$ so weit wie möglich aus.

(a) Zu jedem x und jedem y gibt es ein z mit $x + y = z$.
(b) Kein x ist kleiner als y.
(c) Es gibt ein x mit $x + y = y$ für alle y.
(d) Für jedes x ist $x + y = y + x$ für alle y.
(e) Jede ganze Zahl ist gerade oder ungerade.
(f) Nicht alle Primzahlen sind ungerade.
(g) Zu jeder natürlichen Zahl gibt es eine größere Primzahl.
(h) Die Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ hat kein größtes Element.
(i) Es gilt $x + z < y + z$, falls $x < y$ und x, y, z beliebige natürliche Zahlen sind.
(j) Aus $x \leq y$ und $y \leq x$ folgt $x = y$ und umgekehrt.
(k) Es gibt genau eine Lösung $x \in \mathbb{N}$ der Gleichung $x^2 = 1$.
(l) Für das Potenzieren der natürlichen Zahlen gilt das Kommutativgesetz $a^b = b^a$ nicht.
(m) Jede der Zahlenmengen $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ enthält 0 oder 1 und -1.

Außerdem bilde man die Negation der Aussagen (h), (i) und (k).

Lösung. **(a):** „Zu jedem x und jedem y gibt es ein z mit $x + y = z$" läßt sich aufschreiben in der Form:

$$\forall x\ \forall y\ \exists z : x + y = z$$

(b): „Kein x ist kleiner als y" läßt sich in der Form

$$\neg(\exists x :\ x < y)$$

oder

$$\forall x \neg(x < y)$$

aufschreiben.

(c): „Es gibt ein x mit $x + y = y$ für alle y" ist gleichwertig mit:

$$\exists x\ \forall y : x + y = y$$

(d): „Für jedes x ist $x + y = y + x$ für alle y" ist gleichwertig mit

$$\forall x\ \forall y : x + y = y + x$$

(e): „Jede ganze Zahl ist gerade oder ungerade" ist gleichwertig mit

$$\forall x \in \mathbb{Z}\, \exists k \in \mathbb{Z}(\ x = 2 \cdot k\ \vee\ x = 2 \cdot k + 1)$$

(f): „Nicht alle Primzahlen sind ungerade“ ist gleichwertig mit

$$\exists p \in \mathbb{P}\, \exists n \in \mathbb{N}_0 :\ p = 2 \cdot n$$

(g): „Zu jeder natürlichen Zahl gibt es eine größere Primzahl“ ist gleichwertig mit

$$\forall n \in \mathbb{N}\, \exists p \in \mathbb{P} :\ n < p$$

(h): „Die Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ hat kein größtes Element“ ist gleichwertig mit

$$\neg(\exists m \in M\, \forall x \in M :\ x \leq m)$$

(i): „Es gilt $x + z < y + z$, falls $x < y$ und x, y, z beliebige natürliche Zahlen sind“ ist gleichwertig mit

$$\forall x, y, z \in \mathbb{N} : (x < y \implies x + z < y + z)$$

(j): „Aus $x \leq y$ und $y \leq x$ folgt $x = y$ und umgekehrt“ ist gleichwertig mit

$$\forall x\, \forall y((x \leq y \ \wedge\ y \leq x) \iff x = y)$$

(k): „Es gibt genau eine Lösung $x \in \mathbb{N}$ der Gleichung $x^2 = 1$“ ist gleichwertig mit

$$\exists!\, x \in \mathbb{N} :\ x^2 = 1$$

oder

$$\exists x \in \mathbb{N} : (x^2 = 1 \ \wedge\ (\forall y \in \mathbb{N}\backslash\{x\} :\ y^2 \neq 1))$$

(l): „Für das Potenzieren der natürlichen Zahlen gilt das Kommutativgesetz $a^b = b^a$ nicht“ ist gleichwertig mit

$$\begin{array}{l} \neg(\forall a, b \in \mathbb{N} :\ a^b = b^a) \\ = \\ \exists a, b \in \mathbb{N} :\ a^b \neq b^a \end{array}$$

(m): „Jede der Zahlenmengen $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ enthält 0 oder 1 und -1“ ist nicht eindeutig aufschreibbar, da die Verwendung von *und* und *oder* z.B. die folgenden zwei Übersetzungen ermöglichen:

$$\begin{array}{l} \forall M \in \{\mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\} :\ 0 \in M \vee \{1, -1\} \subseteq M \\ \forall M \in \{\mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\} :\ (0 \in M \vee 1 \in M) \wedge -1 \in M. \end{array}$$

Negation von (h):

$$\exists m \in M\, \forall x \in M :\ x \leq m$$

Negation von (i):

$$\begin{array}{l} \neg(\forall x, y, z \in \mathbb{N}\, (x < y \implies x + z < y + z)) \\ = \\ \exists x, y, z \in \mathbb{N}\, (x < y \ \wedge\ \neg(x + z < y + z)) \end{array}$$

Negation von (k):

$$\neg(\exists x \in \mathbb{N} : (x^2 = 1 \ \wedge \ (\forall y \in \mathbb{N}\backslash\{x\} : \ y^2 \neq 1)))$$
$$=$$
$$\forall x \in \mathbb{N} : (x^2 \neq 1 \ \vee (\exists y \in \mathbb{N}\backslash\{x\} : y^2 = 1))$$

Beweistechniken

Mathematik ohne Beweise ist erstens langweilig und zweitens kaum zu verstehen. Im Buch werden deshalb sämtliche wesentlichen Dinge der behandelten mathematischen Gebiete bewiesen. Zum besseren Verstehen sollte der Leser aber auch in der Lage sein, eigene Beweise zu führen. Die folgenden Aufgaben dienen dazu, gewisse Beweistechniken (Beweis durch ein Gegenbeispiel, direkter Beweis, indirekter Beweis) anhand einfacher Beispiele zu trainieren. *Bekanntlich beweist ein Beispiel zu einer Behauptung nichts, jedoch ein Gegenbeispiel alles.* Dazu die folgende Aufgabe:

Aufgabe 1.4 *(Beweis mittels Gegenbeispiel)*
Man beweise, daß die folgenden Aussagen falsch sind:

(a) Jede Primzahl ist eine ungerade Zahl.
(b) Jede natürliche Zahl größer als 1 ist Primzahl oder die Summe von zwei Primzahlen.

Lösung. **(a):** 2 ist Primzahl, jedoch keine ungerade Zahl.
(b): 27 ist keine Primzahl und läßt sich auch nicht als Summe zweier Primzahlen darstellen. □

In Vorbereitung auf die folgenden drei Aufgaben lese man den Satz 1.2.2 mit Beweis.

Aufgabe 1.5 *(Beweis von Aussagen über natürliche Zahlen)*
Man beweise die folgenden Aussagen für natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$:

(a) Wenn n ungerade ist, so ist auch n^2 ungerade.
(b) Wenn n^2 gerade ist, so ist auch n gerade.

Lösung. **(a):** Sei $n \in \mathbb{N}$ eine (beliebig gewählte) ungerade Zahl. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}_0$ mit $n = 2k + 1$. Aus

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2 \cdot (2k^2 + 2k) + 1$$

folgt dann die Behauptung.

(b): Sei n^2 für $n \in \mathbb{N}$ eine gerade Zahl, d.h., es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $n^2 = 2 \cdot k$. Aus Satz 1.2.2 (siehe auch Aufgabe 1.6, (b)) folgt dann, daß 2 ein Teiler von n ist, womit n eine gerade Zahl ist.
Einfacher läßt sich (b) mit Hilfe von (a) indirekt beweisen:
Angenommen, es ist n^2 gerade und n ungerade für ein gewisses $n \in \mathbb{N}$. Nach (a) folgt jedoch aus der Eigenschaft „n ungerade", daß dann auch n^2 ungerade ist, ein Widerspruch zur Annahme. Also war die Annahme falsch und damit die Behauptung richtig.

Aufgabe 1.6 *(Beweis von zwei Aussagen über Primzahlen)*
Man beweise:

(a) Wenn $p \in \mathbb{P}$, $a \in \mathbb{N}$ und $a \notin \{n \cdot p \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, dann existieren $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ mit $\alpha \cdot p + \beta \cdot a = 1$.
(b) Wenn eine Primzahl ein Produkt aus zwei ganzen Zahlen teilt, dann teilt sie mindestens einen Faktor dieses Produktes.

Lösung. **(a):** Falls $p \in \mathbb{P}$, $a \in \mathbb{N}$ und $a \notin \{n \cdot p \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ gilt, ist der größte gemeinsame Teiler von p und a gleich 1. Damit folgt (a) aus Satz 2.2.3.

(b): Wir beweisen (b) indirekt. Angenommen, es gibt eine Primzahl p, die ein Teiler des Produkts $a_1 \cdot a_2$, wobei $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$, ist, jedoch weder a_1 noch a_2 teilt. Nach (a) existieren dann $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Z}$ mit $\alpha_i \cdot p + \beta_i \cdot a_i = 1$ für jedes $i \in \{1, 2\}$. Hieraus folgt $(\alpha_1 \cdot p + \beta_1 \cdot a_1) \cdot (\alpha_2 \cdot p + \beta_2 \cdot a_2) = 1$. Indem man die linke Seite dieser Gleichung ausmultipliziert, sieht man, daß die linke Seite der Gleichung (wegen $p \,|\, a_1 \cdot a_2$) durch p teilbar ist, was offenbar der Gleichung widerspricht. Also war die Annahme falsch und damit die Behauptung richtig.

Aufgabe 1.7 *(Beweis einer Aussage über Primzahlen)*
Man beweise: Für jede Primzahl $p \in \mathbb{P}$ gilt: $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$.
Hinweise: (1.) Für $p = 2$ läßt sich die Behauptung z.B. durch einen indirekten Beweis wie folgt zeigen: Angenommen, $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Dann existieren gewisse teilerfremde natürliche Zahlen s und t mit $\sqrt{2} = \frac{s}{t}$. Hieraus ergibt sich die Gleichung $2 \cdot t^2 = s^2$. Folglich ist s^2 gerade und (wegen Aufgabe 1.5, (b)) auch s gerade. Es gibt also eine natürliche Zahl α mit $s = 2 \cdot \alpha$. Aus $s = 2 \cdot \alpha$ und $s^2 = 2 \cdot t^2$ folgt dann die Gleichung $2 \cdot \alpha^2 = t^2$. Analog zu oben folgt aus der Gleichung $2 \cdot \alpha^2 = t^2$, daß 2 ein Teiler von t ist. Wir haben damit 2 als Teiler von s und t nachgewiesen, was jedoch unserer Voraussetzung „s und t sind teilerfremd" widerspricht. Also war die Annahme $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ falsch.
(2.) Für den allgemeinen Beweis verwende man Aufgabe 1.6, (b).

Lösung. Sei $p \in \mathbb{P}$ beliebig gewählt. Angenommen, $\sqrt{p} \in \mathbb{Q}$. Dann existieren gewisse teilerfremde natürliche Zahlen s und t mit $\sqrt{p} = \frac{s}{t}$. Hieraus ergibt sich die Gleichung $p \cdot t^2 = s^2$. Wegen der Aussage (b) aus Aufgabe 1.6 teilt p die Zahl s, d.h., es gibt eine natürliche Zahl α mit $s = p \cdot \alpha$. Aus $s = p \cdot \alpha$ und

$s^2 = p \cdot t^2$ folgt dann die Gleichung $p \cdot \alpha^2 = t^2$. Analog zu oben folgt aus der Gleichung $p \cdot \alpha^2 = t^2$, daß p ein Teiler von t ist. Wir haben damit p als Teiler von s und t nachgewiesen, was jedoch unserer Voraussetzung „s und t sind teilerfremd" widerspricht. Also war die Annahme $\sqrt{p} \in \mathbb{Q}$ falsch. □

Vollständige Induktion

Die vollständige Induktion ist eine wichtige Beweismethode für Aussagen, die in Abhängigkeit von natürlichen Zahlen formuliert sind. Grundlage dieser Methode ist Satz 1.2.1.

Aufgabe 1.8 *(Vollständige Induktion)*

Man beweise durch vollständige Induktion die folgenden Aussagen:

(a) $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.
(b) $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
(c) $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
(d) $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$.
(e) $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$.
(f) $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(3i-1)(3i+2)} = \frac{n}{2(3n+2)}$.
(g) $\forall n \in \mathbb{N}_0 \; \forall q \in \mathbb{R}\backslash\{1\} : \sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
(h) Es sei $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = \frac{1}{2}(3a_n - a_{n-1})$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$: $a_n = \frac{2^n - 1}{2^{n-1}}$.
(i) Jede natürliche Zahl n, welche größer als 7 ist, läßt sich mit geeigneten $a, b \in \mathbb{N}_0$ in der Form $n = 3a + 5b$ darstellen.
(j) $n^2 - 1$ ist für ungerade $n \geq 3$ durch 8 teilbar.
(k) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $n^3 - n$ durch 6 teilbar.
(l) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ durch 133 teilbar.
(m) Die Summe der dritten Potenzen dreier aufeinanderfolgender Zahlen aus $\mathbb{N}_0$ ist durch 9 teilbar.
(n) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 5$ gilt $2^n > n^2$.
(o) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 10$ gilt $2^n > n^3$.
(p) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ gilt: $n! > 2^{n-1}$.
(q) Sei $a > 0$ oder $-1 < a < 0$. Dann gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{1\} : (1+a)^n > 1 + n \cdot a \qquad (\text{„}\textit{Bernoullische Ungleichung}\text{“})$$

(r) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt: $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$.

Lösung. **(a):**
(I) $n = 1$: Offenbar gilt $1 = \frac{1\cdot 2}{2}$.

(II) $k \longrightarrow k+1$: Angenommen, $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$ für gewisses $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} i &= k+1+\sum_{i=1}^{k} i \\ &= k+1+\frac{k(k+1)}{2} \quad \text{(nach Annahme)} \\ &= \frac{k+1}{2}\cdot(2+k), \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

(b):
(I) $n = 1$: Offenbar gilt $1^2 = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}$.

(II) $k \longrightarrow k+1$: Angenommen, $\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ für gewisses $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} i^2 &= (k+1)^2+\sum_{i=1}^{k} i^2 \\ &= (k+1)^2+\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \qquad \text{(nach Annahme)} \\ &= \frac{k+1}{6}\cdot(6k+6+k(2k+1)) \\ &= \frac{k+1}{6}\cdot(2k^2+7k+6) \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}, \qquad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

(c):
(I) $n = 1$: Offenbar gilt $1^3 = \frac{1^2\cdot 2^2}{4}$.

(II) $k \longrightarrow k+1$: Angenommen, $\sum_{i=1}^{k} i^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$ für gewisses $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} i^3 &= (k+1)^3+\sum_{i=1}^{k} i^3 \\ &= (k+1)^3+\frac{k^2(k+1)^2}{4} \qquad \text{(nach Annahme)} \\ &= \frac{(k+1)^2}{4}\cdot(4k+4+k^2) \\ &= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}, \qquad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

(d):
(I) $n = 1$: Offenbar gilt $2\cdot 1-1 = 1^2$.

(II) $k \longrightarrow k+1$: Angenommen, $\sum_{i=1}^{k}(2i-1) = k^2$ für gewisses $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1}(2i-1) &= 2(k+1)-1+\sum_{i=1}^{k}(2i-1) \\ &= 2(k+1)-1+k^2 \qquad \text{(nach Annahme)} \\ &= k^2+2k+1 \\ &= (k+1)^2, \qquad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

(e):
(I) $n = 1$: Offenbar gilt $\frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$.

(II) $k \longrightarrow k+1$: Angenommen, $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{k}{k+1}$ für gewisses $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i(i+1)} &= \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i(i+1)} \\
&= \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \frac{k}{k+1} && \text{(nach Annahme)} \\
&= \frac{1}{(k+1)(k+2)} \cdot (1 + k(k+2)) \\
&= \frac{1}{(k+1)(k+2)} \cdot (k+1)^2 \\
&= \frac{k+1}{k+2}, && \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

(f):
(I) $n = 1$: Offenbar gilt $\frac{1}{(3-1)(3+2)} = \frac{1}{2\cdot 5}$.

(II) $k \longrightarrow k+1$: Angenommen, $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{(3i-1)(3i+2)} = \frac{k}{2(3k+2)}$ für gewisses $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{(3i-1)(3i+2)} &= \frac{1}{(3(k+1)-1)(3(k+1)+2)} + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{(3i-1)(3i+2)} \\
&= \frac{1}{(3(k+1)-1)(3(k+1)+2)} + \frac{k}{2(3k+2)} && \text{(nach Annahme)} \\
&= \frac{1}{2(3(k+1)+2)} \cdot \left(\frac{2}{3k+2} + \frac{k(3k+5)}{3k+2}\right) \\
&= \frac{1}{2(3(k+1)+2)} \cdot \frac{3k^2+5k+2}{3k+2} \\
&= \frac{1}{2(3(k+1)+2)} \cdot \frac{(k+1)(3k+2)}{3k+2} \\
&= \frac{k+1}{2(3(k+1)+2)}, && \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

(g):
(I) $n = 0$: Offenbar gilt $q^0 = \frac{1-q^1}{1-q}$.

(II) $k \longrightarrow k+1$: Angenommen, $\sum_{i=0}^{k} q^i = \frac{1-q^{k+1}}{1-q}$ für gewisses $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k+1} q^i &= q^{k+1} + \sum_{i=0}^{k} q^i \\
&= q^{k+1} + \frac{1-q^{k+1}}{1-q} && \text{(nach Annahme)} \\
&= \frac{1}{1-q} \cdot (q^{k+1}(1-q) + 1 - q^{k+1}) \\
&= \frac{1-q^{k+2}}{1-q}, && \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

(h):
(I) $n = 0$ und $n = 1$: Offenbar gilt die Behauptung für $n \in \{0, 1\}$.

(II) $k-1, k \longrightarrow k+1$: Angenommen, für gewisses $k \in \mathbb{N}$ ist $a_n = \frac{2^n-1}{2^{n-1}}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq n \leq k$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \tfrac{1}{2}(3a_k - a_{k-1}) \\ &= \tfrac{1}{2}(3\tfrac{2^k-1}{2^{k-1}} - \tfrac{2^{k-1}-1}{2^{k-2}}) && \text{(nach Annahme)} \\ &= \tfrac{1}{2^k}(3 \cdot 2^k - 3 - 2(2^{k-1} - 1)) \\ &= \tfrac{1}{2^k}(3 \cdot 2^k - 3 - 2^k + 2) \\ &= \tfrac{2^{k+1}-1}{2^k}, && \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

(i):
(I) $n = 8$: Offenbar gilt $8 = 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1$.

(II) $k \longrightarrow k+1$: Angenommen, es gilt $k = 3 \cdot a + 5 \cdot b$ für gewisses $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 8$ und passend gewählte $a, b \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} k+1 &= 3 \cdot a + 5 \cdot b + 1 && \text{(nach Annahme)} \\ &= 3 \cdot (a+2) + 5 \cdot (b-1) \end{aligned}$$

Im Fall $b \geq 1$ haben wir eine Darstellung der behaupteten Art für $k+1$ bereits vorliegen. Ist $b = 0$, so muß (wegen $k+1 \geq 9$) $a \geq 3$ sein, und unsere Behauptung ergibt sich aus

$$3 \cdot a + 5 \cdot b + 1 = 3 \cdot a + 1 = 3 \cdot (a-3) + 5 \cdot 2.$$

(j): Wir beweisen:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists t \in \mathbb{N}: \ (2n+1)^2 - 1 = 8 \cdot t.$$

(I) $n = 1$: Offenbar gilt unsere Behauptung für $n = 1$.

(II) $k \longrightarrow k+1$: Angenommen, es gilt $(2k+1)^2 - 1 = 8 \cdot t$ für gewisse $k, t \in \mathbb{N}$. Dann haben wir:

$$\begin{aligned} & (2(k+1)+1)^2 - 1 = ((2k+1)+2)^2 - 1 = (2k+1)^2 + 4(2k+1) + 3 \\ = \ & ((2k+1)^2 - 1) + 8(k+1) \\ = \ & 8 \cdot t + 8(k+1) && \text{(nach Annahme)} \\ = \ & 8 \cdot (t+k+1), && \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

(k): Wir beweisen:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists t \in \mathbb{N}_0: \ n^3 - n = 6 \cdot t.$$

(I) $n = 1$: Offenbar gilt unsere Behauptung für $n = 1$.

(II) $k \longrightarrow k+1$: Angenommen, es gilt $k^3 - k = 6 \cdot t$ für gewisse $k, t \in \mathbb{N}$. Dann haben wir:

$$\begin{aligned} & (k+1)^3 - (k+1) = k^3 + 3k^2 + 2k \\ = \ & (k^3 - k) + (3k^2 + 3k) \\ = \ & 6 \cdot t + 3k(k+1) && \text{(nach Annahme)} \\ = \ & 6 \cdot t + 6 \cdot \tbinom{k+1}{2} \\ = \ & 6 \cdot (t + \tbinom{k+1}{2}), && \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

(l): Wir beweisen:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \; \exists t \in \mathbb{N} : \; 11^{n+2} + 12^{2n+1} = 133 \cdot t.$$

(I) $n = 0$: Offenbar gilt unsere Behauptung für $n = 0$: $11^2 + 12 = 133$.
(II) $k \longrightarrow k+1$: Angenommen, es gilt $11^{k+2} + 12^{2k+1} = 133 \cdot t$ für gewisse für gewisse $k \in \mathbb{N}_0$ und $t \in \mathbb{N}$. Dann haben wir:

$$\begin{aligned} & 11^{k+1+2} + 12^{2(k+1)+1} \\ = \; & 11 \cdot 11^{k+2} + 12^2 \cdot 12^{2k+1} \\ = \; & 11 \cdot (11^{k+2} + 12^{2k+1}) + (144 - 11) \cdot 12^{2k+1} \\ = \; & 133 \cdot 11 \cdot t + 133 \cdot 12^{2k+1} && \text{(nach Annahme)} \\ = \; & 133 \cdot (11 \cdot t + 12^{2k+1}), && \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

(m): Wir beweisen:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \; \exists t \in \mathbb{N} : \; n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 9 \cdot t.$$

(I) $n = 0$: Offenbar gilt unsere Behauptung für $n = 0$: $0^3 + 1^3 + 2^3 = 9$.
(II) $k \longrightarrow k+1$:
Angenommen, es gilt $k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 = 9 \cdot t$ für gewisse für gewisse $k \in \mathbb{N}_0$ und $t \in \mathbb{N}$. Dann haben wir:

$$\begin{aligned} & (k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 \\ = \; & (k+1)^3 + (k+2)^3 + (k^3 + 9k^2 + 27k + 27) \\ = \; & (k^3 + (k+1)^2 + (k+2)^2) + 9 \cdot (k^2 + 3k + 3) \\ = \; & 9 \cdot t + 9 \cdot (k^2 + 3k + 3) && \text{(nach Annahme)} \\ = \; & 9 \cdot (t + k^2 + 3k + 3) && \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

(n):
(I) $n = 5$: Offenbar gilt unsere Behauptung für $n = 5$: $2^5 = 32 > 25 = 5^2$.
(II) $k \longrightarrow k+1$: Angenommen, es gilt $2^k > k^2$ für gewisses $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 5$. Dann haben wir:

$$\begin{aligned} & 2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \\ > \; & 2 \cdot k^2 = k^2 + k \cdot k && \text{(nach Annahme)} \\ \geq \; & k^2 + 5 \cdot k && \text{(wegen } k \geq 5\text{)} \\ > \; & k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2, && \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

(o): **(I)** $n = 10$: Die Behauptung gilt für $n = 10$, da $2^{10} = 1024 > 1000 = 10^3$.
(II) $k \longrightarrow k+1$: Angenommen, es gilt $2^k > k^3$ für gewisses $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 10$.

Dann haben wir:

$$\begin{aligned}
& 2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \\
> \ & 2 \cdot k^3 = k^3 + k \cdot k^2 && \text{(nach Annahme)} \\
\geq \ & k^3 + 10 \cdot k^2 && \text{(wegen } k \geq 10) \\
\geq \ & k^3 + 3k^2 + 7 \cdot k \cdot k \\
\geq \ & k^3 + 3k^2 + 70k && \text{(wegen } k \geq 10) \\
> \ & k^3 + 3k^2 + 3k + 1 = (k+1)^3, && \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

(p):
(I) $n = 3$: Offenbar gilt unsere Behauptung für $n = 3$: $3! = 6 > 2^2$.

(II) $k \longrightarrow k+1$: Angenommen, es gilt $k! > 2^{k-1}$ für gewisses $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 3$. Dann haben wir:

$$\begin{aligned}
& (k+1)! = (k!) \cdot (k+1) \\
> \ & 2^{k-1} \cdot (k+1) && \text{(nach Annahme)} \\
> \ & 2^{k-1} \cdot 2 = 2^k, && \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

(q):
(I) $n = 2$:
Linke Seite der Ungleichung: $(1+a)^2 = 1 + 2a + a^2$.
Rechte Seite der Ungleichung: $1 + 2a$.
Also gilt die Behauptung für $n = 2$, da $a^2 > 0$.

(II) $k \longrightarrow k+1$: Angenommen, es gilt $(1+a)^k > 1 + k \cdot a$ für gewisses $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$. Dann haben wir:

$$\begin{aligned}
& (1+a)^{k+1} = (1+a)^k \cdot (1+a) \\
> \ & (1 + k \cdot a) \cdot (1+a) && \text{(nach Annahme und wegen } 1 + a > 0) \\
> \ & 1 + k \cdot a + a + k \cdot a^2 \\
> \ & 1 + (k+1) \cdot a && \text{(da } k \cdot a^2 > 0) \\
& && \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

Bemerkung Ist $1+a < 0$, so gilt *nicht* $(1+a)^k \cdot (1+a) > (1+k \cdot a) \cdot (1+a)$, da z.B. für $a = -2$ und $k = 2$: $(1+a)^k \cdot (1+a) = -1$, $(1+k \cdot a) \cdot (1+a) = 3$.

(r): Für den Beweis der Behauptung (r) benötigen wir die folgende (leicht zu beweisende) Eigenschaft der Binomialkoeffizienten:

$$\binom{k}{i-1} + \binom{k}{i} = \binom{k+1}{i}. \tag{1.1}$$

Außerdem prüft man leicht nach, daß gilt:

$$\sum_{i=0}^{k-1} a_i = \sum_{i=1}^{k} a_{i-1}. \tag{1.2}$$

Die Behauptung

$$\forall n \in \mathbb{N}\, \forall a, b \in \mathbb{R}: \ (a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

läßt sich wie folgt durch vollständige Induktion beweisen:
(I) $n = 1$: Offenbar gilt:

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0} a + \binom{1}{1} b = \sum_{i=0}^{1} \binom{1}{i} a^{1-i} b^i.$$

(II) $k \longrightarrow k+1$: Angenommen, es ist $(a+b)^k = \sum_{i=0}^{n} \binom{k}{i} a^{k-i} b^i$ für gewisses $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
& (a+b)^{k+1} \\
= \ & (a+b) \cdot (a+b)^k \\
= \ & (a+b) \cdot \textstyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^{k-i} b^i && \text{(nach Annahme)} \\
= \ & \textstyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^{k+1-i} b^i + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^{k-i} b^{i+1} \\
= \ & a^{k+1} + (\textstyle\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} a^{k+1-i} b^i) + \\
& (\textstyle\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} a^{k-i} b^{i+1}) + b^{k+1} \\
= \ & a^{k+1} + (\textstyle\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} a^{k+1-i}) b^i) + \\
& (\textstyle\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i-1} a^{k-(i-1)} b^{i-1+1}) + b^{k+1} && \text{(wegen (1.2))} \\
= \ & a^{k+1} + (\textstyle\sum_{i=1}^{k} (\binom{k}{i} + \binom{k}{i-1}) a^{k+1-i} b^i) + b^{k+1} \\
= \ & a^{k+1} + (\textstyle\sum_{i=1}^{k} \binom{k+1}{i} a^{k+1-i} b^i) + b^{k+1} && \text{(wegen (1.1))} \\
= \ & \textstyle\sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} a^{k+1-i} b^i && \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

Aufgabe 1.9 *(Vollständige Induktion; Turm von Hanoi)*

Unter den Begriff „Turm von Hanoi“ faßt man einige Spiele zusammen, bei dem es um das Umsetzen von gelochten Scheiben, die auf einem Stab gesteckt sind auf einen anderen Stab nach gewissen Regeln geht. Die klassische Variante, die von dem französischen Mathematiker Édouard Lucas (1842–1891) stammen soll, läßt sich wie folgt beschreiben: Gegeben seien drei Stäbe, die senkrecht auf einer Unterlage befestigt sind. Außerdem sind n hölzerne Kreisscheiben mit Bohrungen durch die Mittelpunkte und paarweise verschiedenen Durchmessern gegeben, die auf dem ersten Stab der Größe nach gesteckt sind, wobei sich die größte Scheibe unten befindet. Ziel des

Spiels ist es, die n Scheiben auf einen anderen Stab so umzusetzen, daß sie sich in der gleichen Reihenfolge wie auf den ersten Stab befinden. Für das Umsetzen gelten folgende zwei Regeln: (1) Man darf in jedem Spielschritt immer nur eine Scheibe von einem Stab auf einen anderen Stab legen. (2) Man darf eine größere Scheibe nicht auf eine kleinere Scheibe legen. Wie viele Spielschritte reichen aus, um alle n Scheiben in der genannten Art vom ersten auf einen zweiten Stab (unter Verwendung des dritten Stabs) umzusetzen?

Lösung. Sei $u(n) := 2^n - 1$. Wir zeigen durch Induktion über n, daß $u(n)$ ($n \in \mathbb{N}$) Spielschritte ausreichen, um alle n Scheiben in der genannten Art vom ersten auf den zweiten Stab umzusetzen.

(I) $n = 1$: Offenbar genügt eine Bewegung, um eine Scheibe von einem Stab auf einen zweiten zu setzen.

(II) $k \longrightarrow k+1$: Angenommen, für alle $i \in \{1, 2, ..., k\}$ reichen $u(i)$ Bewegungen von Scheiben aus, um i der Größe nach geordnete Scheiben in der oben angegebenen Art umzusetzen.
Seien nun $k+1$ Scheiben (nach abnehmender Größe geordnet und mit $k+1, k, ..., 2, 1$ numeriert) auf Stab 1 gesteckt. Das Umsetzen der „Spitze“ (bestehend aus den Scheiben mit den Nummern $k, k-1, ..., 2, 1$ von Stab 1 auf Stab 3 erfordert (nach Annahme) $u(k)$ Bewegungen. Nach diesem Umsetzen, ist es dann möglich, die Scheibe mit der Nummer $k+1$ auf Stab 2 zu stecken. Abschließend sind noch einmal $u(k)$ Bewegungen erforderlich, um die Scheiben von Stab 3 auf Stab 2 umzusetzen (ebenfalls nach Annahme). Insgesamt sind dies

$$2 \cdot u(k) + 1 = 2 \cdot (2^k - 1) + 1 = 2^{k+1} - 1 = u(k+1)$$

Bewegungen, q.e.d.

Aufgabe 1.10 *(Vollständige Induktion)*
Wo steckt der Fehler im folgenden „Beweis“ durch vollständige Induktion:
Behauptung: Wenn von n Mädchen eines blaue Augen hat, dann haben alle n Mädchen blaue Augen ($n \in \mathbb{N}$).
Beweis:
1. Induktionsanfang: $n = 1$ richtig (klar!)
2. Induktionsannahme: Die Behauptung sei richtig für $k \leq n$.
3. Induktionsbehauptung: Die Behauptung ist richtig für $n + 1$.
4. Induktionsbeweis: Wir betrachten $n + 1$ Mädchen, von denen eins blauäugig ist und bezeichnen sie mit $M_1, M_2, ..., M_{n+1}$, wobei M_1 die Blauäugige sein soll. Wir betrachten die beiden Mengen $\{M_1, ..., M_n\}$ und $\{M_1, ..., M_{n-1}, M_{n+1}\}$. Beide enthalten M_1 und haben n Elemente, bestehen also laut Induktionsannahme aus lauter blauäugigen Mädchen. Da jedes der $n + 1$ Mädchen in einer dieser beiden Mengen vorkommt, sind alle $n + 1$ Mädchen blauäugig.

Lösung. Die Bildung der Mengen $\{M_1, ..., M_n\}$ und $\{M_1, ..., M_{n-1}, M_{n+1}\}$ ist nur für $n \geq 2$ möglich, da $M_{n-1} = M_0$ für $n = 1$ nicht definiert ist. Um obigen Induktionsbeweis führen zu können, ist folglich der Induktionsanfang für $n = 2$ erforderlich. Für zwei Mädchen ist aber obige Behauptung offensichtlich falsch!

Aufgabe 1.11 *(Vollständige Induktion)*

Beweisen Sie Satz 1.2.3: *Sei M eine endliche, nichtleere Menge und bezeichne $|M|$ die Anzahl ihrer Elemente. Dann gilt $|\mathfrak{P}(M)| = 2^{|M|}$.*

Lösung. **(I)** $n = 1$: Ist M einelementig, so gilt offenbar: $\mathfrak{P}(M) = \{\emptyset, M\}$ und damit $|\mathfrak{P}(M)| = 2 = 2^1$, d.h., unsere Behauptung ist für $n = 1$ richtig.

(II) $k \longrightarrow k+1$: Angenommen, die Potenzmenge jeder k-elementigen Menge hat die Mächtigkeit 2^k für gewisses $k \in \mathbb{N}$. Bezeichne M eine $(k+1)$-elementige Menge und sei a ein gewisses Element aus M. Dann läßt sich die Menge $\mathfrak{P}(M)$ wie folgt in zwei disjunkte Mengen M_1 und M_2 zerlegen:

$$\mathfrak{P}(M) = \underbrace{\{T \,|\, T \subseteq M \backslash \{a\}\}}_{=:M_1} \cup \underbrace{\{T \cup \{a\} \,|\, T \subseteq M \backslash \{a\}\}}_{=:M_2}.$$

Offenbar gilt $|M_1| = |M_2|$ und (nach Annahme) $|M_1| = 2^k$. Zusammengefaßt erhalten wir damit:

$$|\mathfrak{P}(M)| = |M_1| + |M_2| = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}, \text{ q.e.d.}$$

Aufgabe 1.12 *(Vollständige Induktion)*

Beweisen Sie Satz 1.2.5: Für beliebige nichtleere endliche Mengen A_1, A_2, ..., A_n gilt:

$$|A_1 \times A_2 \times ... \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot ... \cdot |A_n|.$$

Lösung. Sei n fest (aber beliebig) gewählt. Außerdem seien $m_1 := |A_1|$, ..., $m_n := |A_n|$. Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion über

$$t := m_1 + m_2 + ... + m_n.$$

Da die Mengen $A_1, ..., A_n$ alle nichtleer sind, ist $t \geq n$.

(I) $t = n$: In diesem Fall sind die Mengen A_i $(i = 1, 2, ..., n)$ alle einelementig und $A_1 \times A_2 \times ... \times A_m$ besteht ebenfalls nur aus einem Element, d.h., unsere Behauptung gilt für $t = n$.

(II) $k \longrightarrow k+1$: Angenommen, unsere Behauptung ist für alle t mit $n \leq t \leq k$ für gewisses $k \in \mathbb{N}$ richtig. Sei nun $m_1 + m_2 + ... + m_n = k + 1$. Dann gibt es unter den Mengen A_i mindestens eine mit mindestens zwei Elementen.

O.B.d.A. sei $|A_1| \geq 2$ und $a \in M_1$. Dann läßt sich die Menge $A_1 \times ... \times A_n$ wie folgt zerlegen:

$$\begin{aligned}
&A_1 \times ... \times A_n = \\
&\{(a, x_2, ..., x_n) \,|\, x_2 \in A_2 \ \wedge \ ... \ \wedge \ x_n \in A_n\} \cup \\
&\{(x_1, x_2, ..., x_n) \,|\, x_1 \in A_1 \backslash \{a\} \ \wedge \ x_2 \in A_2 \ \wedge \ ... \ \wedge \ x_n \in A_n\}.
\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich:

$$\begin{aligned}
&|A_1 \times ... \times A_n| \\
= \ &|\{a\} \times A_2 \times ... \times A_n| + |(A_1 \backslash \{a\}) \times A_2 \times ... \times A_n| \\
= \ &1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot ... \cdot m_n + (m_1 - 1) \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_n \qquad \text{(nach Annahme)} \\
= \ &(1 + m_1 - 1) \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_n \\
= \ &m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_n, \ \ \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

Aufgabe 1.13 *(Vollständige Induktion)*
Ermitteln Sie die Anzahl d_n der Diagonalen in einem (ebenen) n-Eck ($n \geq 4$) und beweisen Sie die gefundene Formel per Induktion.

Lösung. Wir beweisen:

$$\forall n \in \mathbb{N} \backslash \{1, 2, 3\} : \ d_n = \frac{n(n-3)}{2}.$$

(I) $n = 4$: Offenbar hat ein Viereck 2 Diagonalen und es ist $d_2 = \frac{4(4-3)}{2} = 2$, d.h., unsere Behauptung ist für $n = 4$ richtig.

(II) $k \longrightarrow k + 1$: Angenommen, es gilt $d_k = \frac{k(k-3)}{2}$ für gewisses $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 4$.
Bekanntlich ist jede Strecke von einem Eckpunkt P eines ebenen $(k + 1)$-Ecks zu einem anderen Eckpunkt Q, der kein Nachbarpunkt von P ist, eine Diagonale des betrachteten $(k+1)$-Ecks. Die Anzahl der Diagonalen in einem $(k + 1)$-Eck läßt sich durch

$$d_{k+1} = d_k + (k - 2) + 1, \tag{1.3}$$

berechnen, wie man sich wie folgt überlegen kann:
Man bilde aus einem k-Eck ein $(k + 1)$-Eck, indem man eine Kante $\overline{AB}$ des k-Ecks durch einen Punkt P und gewisse Strecken $\overline{AP}$ und $\overline{PB}$ ersetzt. Dann sind die Diagonalen des k-Ecks auch Diagonalen des $(k+1)$-Ecks und als neue Diagonalen kommen nur hinzu: alle Diagonalen, die von P ausgehen, sowie die Strecke $\overline{AB}$. Mit Hilfe von (1.3) und der Annahme folgt dann:

$$d_{k+1} = \frac{k(k-3)}{2} + k - 1 = \frac{1}{2} \cdot (k^2 - 3k + 2k - 2) = \frac{(k+1)(k-2)}{2}, \ \ \text{q.e.d.}$$

Mengen und Mengenoperationen

Aufgabe 1.14 *(Mengenbeschreibungen)*
Man beschreibe die folgenden Mengen durch die Angabe wenigstens einer Eigenschaft $E(x)$ in der Form $\{x \mid E(x)\}$.

(a) $\{7, 35, 14, 42, 28, 21\}$,
(b) $\{2, 3, 5, 9, 17, 33, 65\}$,
(c) $\{2, 11, 101, 1001, 10001\}$,
(d) $\{-12, -7, -2, 3, 8, 13, 18\}$,
(e) $\{a, bab, bbabb, bbbabbb, bbbbabbbb\}$,
(f) $\{\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}\}$,
(g) $\{1, -1\}$.

Lösung. Z.B.:
(a): $\{x \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \{1,2,3,4,5,6\} : \; x = 7 \cdot k\}$,
(b): $\{x \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \{0,1,2,3,4,5,6\} : \; x = 2^k + 1\}$,
(c): $\{x \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \{0,1,2,3,4\} : x = 10^n + 1\}$,
(d): $\{x \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \{-3,-2,-1,0,1,2,3\} : \; x = 3 + 5 \cdot k\}$,
(e): $\{x \mid \exists k \in \{0,1,2,3,4\} : \; x = \underbrace{bb...b}_{k\text{-mal}} \; a \; \underbrace{bb...b}_{k\text{-mal}}\}$
(f): $\{x \in \mathbb{Q} \mid \exists k \in \{1,2,3,4\} : \; x = \frac{k}{5-k}\}$,
(g): $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 1\}$.

Aufgabe 1.15 *(Venn-Diagramme)*
Für die Menge aller Dreiecke G seien folgende Teilmengen definiert:

$$\begin{aligned}
A &:= \{x \in G \mid x \;\text{ ist gleichseitiges Dreieck}\}\\
B &:= \{x \in G \mid x \;\text{ ist gleichschenkliges Dreieck}\}\\
C &:= \{x \in G \mid x \;\text{ ist rechtwinkliges Dreieck}\}\\
D &:= \{x \in G \mid x \;\text{ ist Dreieck mit wenigstens einem } 45^\circ\text{-Winkel}\}
\end{aligned}$$

Man stelle die Beziehungen zwischen diesen Mengen durch ein Venn-Diagramm dar!

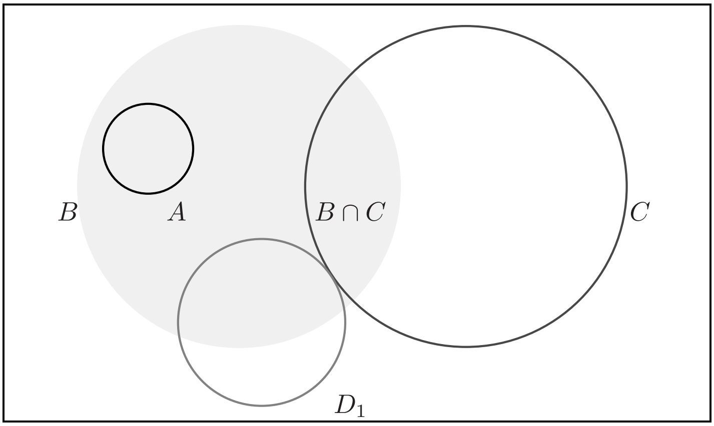
Lösung. Offenbar gilt:

$$\forall X, Y \in \{A, B, C, D\} : \; (X \subset Y \implies (X = A \;\wedge\; Y = B))$$

und

$$B \cap C \neq \emptyset, \; A \cap C = \emptyset, \; A \cap D = \emptyset, \; D \cap C = B \cap C, ...$$

Damit ergibt sich folgendes Venn-Diagramm, wobei $D_1 := \{x \in D \mid x \notin B \cap C\}$ und $D = (B \cap C) \cup D_1$:



Aufgabe 1.16 *(Verwendung der Zeichen $\in, \subseteq, \subset$)*
Gegeben seien die Mengen

$$A := \{1,2\},\ B := \{1,2,3,4\},\ C := \{2\}, D := \{1, A, B, C\}.$$

Welche der folgenden Beziehungen sind richtig?

$(a)\ 4 \in B$	$(b)\ A \subset B$	$(c)\ A \in D$	$(d)\ A \subset D$	$(e)\ 2 \in D$
$(f)\ 1 \in D$	$(g)\ \emptyset \in C$	$(h)\ \emptyset \subset D$	$(i)\ C \in B$	$(j)\ 1 \subset D$
$(k)\ \{1, B\} \subseteq D$	$(l)\ A \cup C \subset B$	$(m)\ C \subset D$	$(n)\ C \in D$	$(o)\ \{C\} \subset D$

Lösung. Richtig sind: (a), (b), (c), (f), (h), (k), (l), (n), (o).
(Falsch: (d), (e), (g), (i), (j), (m).)

Aufgabe 1.17 *(Beweise für Mengengleichungen)*
Welche der folgenden Mengengleichungen sind für beliebige Mengen A, B und C richtig?

(a) $(A \backslash B) \backslash C = A \backslash (B \cup C)$,
(b) $(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$,
(c) $(A \Delta B) \backslash C = (A \cup B) \Delta (B \cup C)$.

Lösung. Im Beweis von Satz 1.2.4 findet man ausführlich erläutert, auf welche Weise man mittels 0,1-Tabellen die obigen Mengengleichungen beweisen kann. Die folgende Tabelle gibt deshalb nur die Ergebnisspalten zu obigen Aufgaben an, wobei man feststellt, daß die Aussage (c) falsch ist:

A	B	C	(a)	(b)	$(A\Delta B)\backslash C$	$(A\cup C)\Delta(B\cup C)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	1	0	0

Aufgabe 1.18 *(Beweise für Mengengleichungen)*
Seien A, B, C Mengen. Man beweise:

(a) $(A\backslash B)\times C=(A\times C)\backslash(B\times C)$,
(b) $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$,
(c) $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$.

Lösung. Die bei der Lösung von Aufgabe 1.17 verwendete Beweismethode ist für das Lösen der vorliegenden Aufgabe ungeeignet.
Da zwei Mengen X und Y nach Definition genau dann gleich sind, wenn $X\subseteq Y$ und $Y\subseteq X$ gilt, ergibt sich der Beweis für (a) aus dem Beweis für zwei Mengeninklusionen:
$(A\backslash B)\times C\subseteq(A\times C)\backslash(B\times C)$ folgt aus

$$\begin{aligned}
&(x,y)\in(A\backslash B)\times C\\
\Longrightarrow\ &(x\in A\setminus B)\ \wedge\ (y\in C)\\
\Longrightarrow\ &(x\in A\ \wedge\ x\notin B)\ \wedge\ (y\in C)\\
\Longrightarrow\ &((x,y)\in A\times C)\ \wedge\ ((x,y)\notin(B\times C)\\
\Longrightarrow\ &(x,y)\in(A\times C)\backslash(B\times C),
\end{aligned}$$

$(A\times C)\backslash(B\times C)\subseteq(A\backslash B)\times C$ folgt aus

$$\begin{aligned}
&(x,y)\in(A\times C)\backslash(B\times C)\\
\Longrightarrow\ &((x,y)\in A\times C)\ \wedge\ ((x,y)\notin B\times C)\\
\Longrightarrow\ &(x\in A\ \wedge\ y\in C)\wedge(x\notin B\ \vee\ y\notin C)\\
\Longrightarrow\ &(x\in A\ \wedge\ y\in C)\ \wedge\ x\notin B\\
\Longrightarrow\ &(x\in A\setminus B)\ \wedge y\in C\\
\Longrightarrow\ &(x,y)\in(A\setminus B)\times C.
\end{aligned}$$

Die Behauptungen (b) und (c) beweist man analog.

Aufgabe 1.19 *(Beweis einer Mengeninklusion)*
Seien A_1, A_2, B_1, B_2 Mengen. Man beweise

$$(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) \subseteq (A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2) \tag{1.4}$$

und gebe ein Beispiel an, für das in (1.4) $\subset$ anstelle von $\subseteq$ steht.

Lösung. (1.4) folgt aus

$$\begin{aligned}
& (x, y) \in (A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) \\
\Longrightarrow\ & ((x, y) \in A_1 \times B_1) \ \vee \ ((x, y) \in A_2 \times B_2) \\
\Longrightarrow\ & (x \in A_1 \ \wedge y \in B_1) \ \vee \ (x \in A_2 \ \wedge \ y \in B_2) \\
\Longrightarrow\ & (x \in A_1 \cup A_2) \wedge (y \in B_1 \cup B_2) \\
\Longrightarrow\ & (x, y) \in (A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2)
\end{aligned}$$

Z.B. steht $\neq$ in (1.4) für die Mengen $A_i := \{a_i\}$ und $B_i := \{b_i\}$ $(i \in \{1, 2\})$ mit $a_1 \neq a_2$ und $b_1 \neq b_2$, da in diesem Fall

$$(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2)\}$$

und

$$(A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2) = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_1, b_2), (a_2, b_1)\}.$$

Aufgabe 1.20 *(Beweis einer Mengeneigenschaft)*
Seien A, B, C Mengen. Folgt aus $A \cup B = A \cup C$, daß $B = C$ ist? Folgt aus $A \cap B = A \cap C$, daß $B = C$ ist?

Lösung. Beide Aussagen sind falsch, wie man anhand folgender Beispiele sieht:
Seien $A = \{a, b, c\}$, $B_1 = \{c, d\}$, $B_2 = \{c\}$, $C_1 = \{d\}$ und $C_2 = \{c, d\}$. Dann gilt:

$$A \cup B_1 = A \cup C_1 = \{a, b, c, d\}, \ B_1 \neq C_1$$

und

$$A \cap B_2 = A \cap C_2 = \{c\}, \ B_2 \neq C_2.$$

Aufgabe 1.21 *(Mächtigkeit von Mengen)*
Ein Meinungsforscher sendet seinem Chef das Ergebnis seiner Umfrage über die Beliebtheit von Bier und Wein:

Anzahl der Befragten:	100
Anzahl derer, die Bier trinken:	75
Anzahl derer, die Wein trinken:	68
Anzahl derer, die beides trinken:	42

Warum wurde der Mann entlassen? (Begründung mittels Mengen!)

Lösung. Sei P die Menge der befragten Personen und bezeichne B die Menge der Biertrinker aus P sowie W die Menge der Weintrinker aus P. Dann gilt nach obigen Angaben:

$$|B \cap W| = 42,\ |B \setminus (B \cap W)| = 75 - 42 = 33,\ |W \setminus (B \cap W)| = 68 - 42 = 26.$$

Damit erhalten wir einen Widerspruch zu $|P| = 100$ wie folgt:

$$|P| \geq |B \cup W| = |B \setminus (B \cap W)| + |W \setminus (B \cap W)| + |B \cap W| = 33 + 26 + 42 = 101.$$

Aufgabe 1.22 *(Beweis einer Mengengleichung)*
Man zeige, daß die Mengen $\{\{x_1, y_1\}, \{x_1\}\}$ und $\{\{x_2, y_2\}, \{x_2\}\}$ genau dann gleich sind, wenn $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$ gilt.

Lösung. „$\Longrightarrow$“: Sei

$$\{\{x_1, y_1\}, \{x_1\}\} = \{\{x_2, y_2\}, \{x_2\}\}. \tag{1.5}$$

Folgende zwei Fälle sind dann möglich:
Fall 1: $x_1 \neq y_1$.
Wegen (1.5) gilt dann $\{x_1, y_1\} = \{x_2, y_2\}$ und $\{x_1\} = \{x_2\}$, womit $x_1 = x_2$ und dann auch $y_1 = y_2$ ist. Also gilt unsere Behauptung im Fall 1.
Fall 2: $x_1 = y_1$.
In diesem Fall folgt aus (1.5) $x_2 = y_2 = x_1$. Also gilt auch im Fall 2 unsere Behauptung.
„$\Longleftarrow$“: Es sei $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$.
Dann gilt offensichtlich (1.5). □

Binäre Relationen

Aufgabe 1.23 *(Eigenschaften binärer Relationen)*
Welche der Eigenschaften

Symmetrie, Asymmetrie, Reflexivität, Antisymmetrie, Transitivität

sind bei den folgenden Relationen vorhanden?

(a) $R_1 := \{(x, y) \,|\, x \in \mathbb{R} \ \wedge\ y \in \mathbb{R} \ \wedge\ x = y\}$,
(b) $R_2 := \{(X, Y) \,|\, X \subseteq M \ \wedge\ Y \subseteq M \ \wedge\ Y = M \setminus X\}$ (M bezeichne eine gewisse nichtleere Menge),
(c) $R_3 := \{(x, y) \,|\, x \in \mathbb{R} \ \wedge\ y \in \mathbb{R} \ \wedge\ x < y\}$,
(d) $R_4 := \{(x, y) \,|\, x \in \mathbb{N} \ \wedge\ y \in \mathbb{N} \ \wedge\ x \text{ teilt } y\}$,
(e) $R_5 := \{(x, y) \,|\, x \in \mathbb{Z} \ \wedge y \in \mathbb{Z} \ \wedge\ x + y \,\text{gerade}\}$.

Lösung.

	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5
Symmetrie	+	+	−	−	+
Asymmetrie	−	−	+	−	−
Reflexivität	+	−	−	+	+
Antisymmetrie	+	−	+	+	−
Transitivität	+	−	+	+	+

(+: Eigenschaft vorhanden; −: Eigenschaft nicht vorhanden)

Aufgabe 1.24 *(Binäre Relation)*
Welche Relation $R \subseteq A \times A$ (A nichtleere Menge) ist reflexiv, symmetrisch, transitiv und antisymmetrisch?

Lösung. Es gibt nur eine Relation mit den oben angegebenen Eigenschaften: $R := \{(x,x) \mid x \in A\}$.

Aufgabe 1.25 *(Binäre Relation)*
Man gebe auf der Menge $A := \{1,2,3,4\}$ eine binäre Relation R an, die nicht reflexiv, nicht irreflexiv, jedoch transitiv und symmetrisch ist.

Lösung. Ein mögliches Beispiel ist $R := \{(1,1)\}$.

Aufgabe 1.26 *(Finden eines Fehlers in einem Beweis)*
Man begründe, wo in dem folgenden „Beweis“ der Herleitung der Reflexivität aus der Symmetrie und Transitivität einer binären Relation R über der Menge A der Fehler steckt.
Behauptung: Jede symmetrische und transitive Relation $R \subseteq A \times A$ ist auch reflexiv (d. h., $\forall\, a \in A:\ aRa$).
„Beweis“: Wir betrachten ein beliebiges a aus A und ein $b \in A$ mit aRb. Wegen der Symmetrie von R ist dann auch bRa und aus aRb und bRa folgt dann wegen der Transitivität von R die Beziehung aRa. Daher ist R reflexiv.

Lösung. Der Fehler steckt im ersten Satz. Nicht zu jedem $a \in A$ muß ein $b \in A$ mit $(a,b) \in R$ existieren (z.B. für $R = \emptyset$).

Aufgabe 1.27 *(Binäre Relationen)*
Sei M die Menge aller Menschen (tot oder lebendig). Seien die Relationen R und S definiert durch:

$$\begin{aligned}(x,y) \in R \quad &:\Longleftrightarrow \quad x \ \text{ ist Schwester von } \ y,\\ (x,y) \in S \quad &:\Longleftrightarrow \quad x \ \text{ ist Vater von } \ y.\end{aligned}$$

Was bedeuten umgangssprachlich $(x,y) \in R\square S$ und $(x,y) \in S\square R$?

Lösung. Aus den Definitionen der Relationen R und S ergibt sich:

$$\begin{aligned}(x,y) \in R\Box S &\iff \exists z \in M: \quad \underbrace{(x,z) \in R}_{\substack{x \text{ ist}\\ \text{Schwester}\\ \text{von } z}} \quad \wedge \quad \underbrace{(z,y) \in S}_{\substack{z \text{ ist}\\ \text{Vater}\\ \text{von } y}} \\ &\iff x \text{ ist Tante (väterlicherseits) von } y\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(x,y) \in S\Box R &\iff \exists z \in M: \quad \underbrace{(x,z) \in S}_{\substack{x \text{ ist}\\ \text{Vater}\\ \text{von } z}} \quad \wedge \quad \underbrace{(z,y) \in R}_{\substack{z \text{ ist}\\ \text{Schwester}\\ \text{von } y}} \\ &\iff x \text{ ist Vater von } y \text{ und } y \text{ hat eine Schwester.}\end{aligned}$$

Aufgabe 1.28 *(Mathematisieren von Sachverhalten)*

Ein Theater verfüge über 27 Reihen zu je 19 Plätzen. Jeder Platz ist durch seine Reihennummer r und seine Sitznummer s, also das Paar (r,s) eindeutig festgelegt. Seien $R := \{1,2,...,27\}$ und $S := \{1,2,...,19\}$. Demzufolge kann man jede Vorstellung M als Menge der verkauften Plätze ansehen und es gilt $M \subseteq R \times S$. Man mathematisiere damit folgende Sachverhalte:
(a) von jeder Reihe wurde mindestens ein Platz verkauft; (b) die Vorstellung ist ausverkauft; (c) die Menge aller möglichen Vorstellungen; (d) keine Karte wurde verkauft; (e) wenigstens eine Reihe ist vollständig besetzt; (f) keine Reihe ist vollständig besetzt.

Lösung.
(a): $D(M) = R$
(b): $M = R \times S$
(c): $\mathfrak{P}(R \times S)$
(d): $M = \emptyset$
(e): $\exists r \in \{1,2,...,27\}: \ \{x \in S \,|\, (r,x) \in M\} = S$
(f): $\forall r \in \{1,2,...,27\}: \{x \in S \,|\, (r,x) \in M\} \neq S$

Aufgabe 1.29 *(Beweis einer Mengengleichung)*

Seien R, S und T binäre Relationen über A. Man beweise:

(a) $(R \cup S)\Box T = (R\Box T) \cup (S\Box T)$,
(b) $(R\backslash S)^{-1} = R^{-1}\backslash S^{-1}$.

Lösung. **(a)** folgt aus:

$$\begin{aligned}
(x,y) \in (R \cup S)\Box T &\iff \exists z \in A:\ (x,z) \in R \cup S \ \wedge\ (z,y) \in T \\
&\iff \exists z \in A:\ ((x,z) \in R \ \vee\ (x,z) \in S) \ \wedge\ (z,y) \in T \\
&\iff (\exists z \in A:\ (x,z) \in R \ \wedge\ (z,y) \in T) \vee \\
&\qquad (\exists z \in A:\ (x,z) \in S \ \wedge\ (z,y) \in T) \\
&\iff (x,y) \in R\Box T \ \vee\ (x,y) \in S\Box T \\
&\iff (x,y) \in (R\Box T) \cup (S\Box T)
\end{aligned}$$

(b) folgt aus:

$$\begin{aligned}
(x,y) \in (R\backslash S)^{-1} &\iff (y,x) \in R\backslash S \\
&\iff (y,x) \in R \ \wedge\ (y,x) \notin S \\
&\iff (x,y) \in R^{-1} \ \wedge\ (x,y) \notin S^{-1} \\
&\iff (x,y) \in R^{-1}\backslash S^{-1}
\end{aligned}$$

Äquivalenzrelationen

Aufgabe 1.30 *(Äquivalenzrelation)*
Sei $A := \{1,3,4,5,7,8,9\}$. Wie hat man $x, y \in A$ zu wählen, damit

$$\begin{aligned}
R \ := \ &\{(x,7),(1,8),(4,4),(9,8),(7,3),(5,5),(9,1), \\
&(8,9),(8,1),(1,9),(3,3),(8,8),(7,7),(1,1),(y,y)\}
\end{aligned}$$

eine Äquivalenzrelation auf A ist? Man gebe außerdem

(a) die Äquivalenzklassen von R,
(b) die zu R gehörende Zerlegung Z von A und
(c) die zu den Äquivalenzrelationen $Q \subset R$ gehörenden Zerlegungen

an!

Lösung. Wegen $(7,3) \in R$ und $(3,7) \notin R$ muß $x = 3$ sein, damit R symmetrisch ist. R ist nur für $y = 9$ reflexiv. Man prüft leicht nach, daß mit den so gewählten x, y die Relation R auch transitiv ist.

(a): $[1] = \{1,8,9\} = [8] = [9]$, $[3] = \{3,7\} = [7]$, $[4] = \{4\}$, $[5] = \{5\}$.

(b): $Z = \{\, \{1,8,9\}, \{3,7\}, \{4\}, \{5\}\,\}$

(c):

$$
\begin{aligned}
&\{\{1\},\{8,9\},\{3,7\},\{4\},\{5\}\},\\
&\{\{1,9\},\{8\},\{3,7\},\{4\},\{5\}\},\\
&\{\{1,8\},\{9\},\{3,7\},\{4\},\{5\}\},\\
&\{\{1,8,9\},\{3\},\{7\},\{4\},\{5\}\},\\
&\{\{1\},\{8\},\{9\},\{3,7\},\{4\},\{5\}\},\\
&\{\{1\},\{8,9\},\{3\},\{7\},\{4\},\{5\}\},\\
&\{\{1,9\},\{8\},\{3\},\{7\},\{4\},\{5\}\},\\
&\{\{1,8\},\{9\},\{3\},\{7\},\{4\},\{5\}\},\\
&\{\{1\},\{8\},\{9\},\{3\},\{7\},\{4\},\{5\}\}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 1.31 *(Satz 1.3.2)*

Man gebe die durch die folgenden Zerlegungen Z_i ($i \in \{1,2,3\}$) der Menge $\mathbb{R}$ charakterisierten Äquivalenzrelationen R_i an:

(a) $Z_1 := \{\{x,-x\} \mid x \in \mathbb{R}\}$,
(b) $Z_2 := \{\{y+x \mid x \in \mathbb{R} \;\wedge\; 0 \le x < 1\} \mid y \in \mathbb{Z}\}$,
(c) $Z_3 := \{\{y+x \mid y \in \mathbb{Z}\} \mid x \in \mathbb{R} \;\wedge\; 0 \le x < 1\}$.

Lösung. **(a):** $R_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = |y|\}$
(b): $R_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists z \in \mathbb{Z} :\ \{x,y\} \subset [z,z+1)\}$
(c): $R_3 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x-y \in \mathbb{Z}\}$

Aufgabe 1.32 *(Binäre Relationen; Satz 1.3.2)*

Man gebe Eigenschaften der nachfolgenden Relationen $R \subseteq A \times A$ an und bestimme, falls R eine Äquivalenzrelation ist, die zugehörige Zerlegung von A.

(a) $\{((a,b),(c,d)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2 \mid a+c = b+d\}$,
(b) $\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \mid a \cdot b$ ist eine gerade Zahl oder $a = b\}$,
(c) $\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \mid a \cdot b$ ist eine ungerade Zahl oder $a = b\}$,
(d) $\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \mid \exists c \in \mathbb{N} :\ b = c \cdot a\}$,
(e) $\{((a,b),(c,d)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2 \mid (a < c \;\vee\; a = c) \;\wedge\; b \le d\}$.

Lösung. **(a):** R ist offenbar symmetrisch, jedoch nicht reflexiv (da z.B. $((1,2),(1,2)) \notin R$ wegen $1+1 \ne 2+2$) und auch nicht transitiv, da z.B. $((1,2),(3,2)) \in R$, $((3,2),(5,6)) \in R$, jedoch $((1,2),(5,6)) \notin R$ gilt.
(b): R ist reflexiv, symmetrisch und nicht transitiv, da $(3,2) \in R$ und $(2,5) \in R$, jedoch $(3,5) \notin R$.
(c): R ist eine Äquivalenzrelation, da R offenbar reflexiv, symmetrisch und (da ein Produkt von Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ genau dann ungerade ist, wenn a und b ungerade) transitiv ist. Die zu R gehörende Zerlegung ist

$$\{\{x \in \mathbb{N} \,|\, x \text{ ist ungerade}\}\} \cup \{\{x\} \,|\, x \in \mathbb{N} \text{ ist gerade}\}.$$

(d): Offenbar ist $(a, b) \in R$ identisch mit der Forderung: a teilt b. Die Teilbarkeitsrelation ist reflexiv, transitiv, aber nicht symmetrisch.

(e): R ist offenbar reflexiv, nicht symmetrisch und transitiv.

Aufgabe 1.33 *(Eigenschaft von Äquivalenzrelationen)*
Es seien R und Q Äquivalenzrelationen auf der Menge A. Man beweise, daß dann $R \cap Q$ ebenfalls eine Äquivalenzrelation auf A ist und beschreibe die Äquivalenzklassen von $R \cap Q$ durch die von R und Q. Ist $R \cup Q$ auch eine Äquivalenzrelation auf A?

Lösung. Sind R und Q Äquivalenzrelationen, so ist $R \cap Q$ offenbar reflexiv und symmetrisch. Die Transitivität von $R \cap Q$ folgt aus:

$$\begin{aligned}&\{(a, b), (b, c)\} \subseteq R \cap Q \implies \{(a, b), (b, c)\} \subseteq R \,\wedge\, \{(a, b), (b, c)\} \subseteq Q \\ &\implies (a, c) \in R \,\wedge\, (a, c) \in Q \implies (a, c) \in R \cap Q.\end{aligned}$$

Die Äquivalenzklassen von $R \cap Q$ erhält man durch Durchschnittsbildung:

$$[a]_{R\cap Q} = [a]_R \cap [a]_Q$$

$(a \in A)$.
$R \cup Q$ ist im allgemeinen keine Äquivalenzrelation, wie folgendes Beispiel zeigt: Sei $A = \{1, 2, 3\}$. Dann sind

$$R := \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$$

und

$$Q := \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 3), (3, 1)\}$$

Äquivalenzrelationen auf A, jedoch ist $R \cup Q$ keine transitive Relation, womit $R \cup Q$ keine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 1.34 *(Beispiel für eine Äquivalenzrelation)*
Auf der Menge $A := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sei die Relation R wie folgt erklärt:

$$(a, b)R(c, d) \;:\Longleftrightarrow\; a^2 + b^2 = c^2 + d^2$$

$(a, b, c, d \in \mathbb{R})$.

(a) Man zeige, daß R eine Äquivalenzrelation auf A ist.
(b) Wie lauten die Äquivalenzklassen von R?
(c) Man gebe eine geometrische Deutung der Äquivalenzklassen von R an.

Lösung. **(a):** R ist eine Äquivalenzrelation, da $=$ eine Äquivalenzrelation ist. Ausführlich:

R ist reflexiv, da $a^2 + b^2 = a^2 + b^2$ für alle $(a,b) \in A$.
R ist symmetrisch, da

$$(a,b)R(c,d) \implies a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \implies c^2 + d^2 = a^2 + b^2 \implies (c,d)R(a,b).$$

R ist transitiv, da

$$\begin{aligned}(a,b)R(c,d) \,\wedge\, (c,d)R(e,f) &\implies a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \,\wedge\, c^2 + d^2 = e^2 + f^2 \\ &\implies a^2 + b^2 = e^2 + f^2 \\ &\implies (a,b)R(e,f).\end{aligned}$$

(b), (c): Zu jedem $r \in \mathbb{R}$ mit $r \geq 0$ gibt es eine Äquivalenzklasse:

$$\{(x,y) \in A \mid x^2 + y^2 = r\},$$

die gedeutet werden kann als die Menge aller Punkte in der Ebene, die auf einen Kreis mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung und dem Radius $\sqrt{r}$ liegen.

Aufgabe 1.35 *(Eigenschaft von Äquivalenzrelationen)*
Man wähle auf alle Arten zwei der drei Bedingungen „reflexiv“, „symmetrisch“, „transitiv“ aus und gebe jeweils ein Beispiel für eine Relation an, die diese zwei Bedingungen, aber nicht die dritte Bedingung erfüllt.

Lösung. Sei $A := \{1,2,3\}$. Dann ist die Relation

$$R_1 := \{(1,1)\}$$

nicht reflexiv, aber symmetrisch und transitiv (ein weiteres Beispiel ist die leere Menge); die Relation

$$R_2 := \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,3),(1,3)\}$$

nicht symmetrisch, aber reflexiv und transitiv; und die Relation

$$R_3 := \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2)\}$$

nicht transitiv, aber reflexiv und symmetrisch.

Aufgabe 1.36 *(Beispiel für eine Äquivalenzrelation)*
Man zeige, daß die sogenannte Kongruenz modulo n (Bezeichnung: $\equiv_n$) eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ ist, die mit der üblichen Addition und Multiplikation auf $\mathbb{Z}$ verträglich (kompatibel) ist.

Lösung. Nach Definition haben wir

$$(a,b) \in \equiv_n \;:\Longleftrightarrow\; \exists p,q,r \in \mathbb{Z}: \; a = p \cdot n + r \;\wedge\; b = q \cdot n + r \;\wedge\; 0 \le r < n$$

beziehungsweise

$$(a,b) \in \equiv_n \;:\Longleftrightarrow\; n \mid (a-b).$$

$\equiv_n$ ist reflexiv, da $n \,|(a-a)$ für alle $a \in \mathbb{Z}$ gilt.
$\equiv_n$ ist symmetrisch, da

$$(a,b) \in \equiv_n \Longrightarrow n \,|(a-b) \Longrightarrow n \,|(b-a) \Longrightarrow (b,a) \in \equiv_n .$$

$\equiv_n$ ist transitiv, da

$$\begin{aligned}
(a,b) \in \equiv_n \wedge (b,c) \in \equiv_n \Longrightarrow\; & \exists p,q,r,s \in \mathbb{Z}: \\
& a = p \cdot n + r \;\wedge\; b = q \cdot n + r \;\wedge\; c = s \cdot n + r \;\wedge \\
& 0 \le r < n \\
\Longrightarrow\; & n \mid (a-c) \\
\Longrightarrow\; & (a,c) \in \equiv_n .
\end{aligned}$$

Zwecks Nachweis der Verträglichkeit von $\equiv_n$ mit den Operationen $+$ und $\cdot$ seien $(a,b),(a',b') \in \equiv_n$ beliebig gewählt. Wir haben $(a+a', b+b'), (a \cdot a', b \cdot b') \in \equiv_n$ zu zeigen. Aus $(a,b),(a',b') \in \equiv_n$ folgt zunächst

$$\begin{aligned}
& \exists q, q', r, r' \in \mathbb{Z}: \\
& a = p \cdot n + r \;\wedge\; b = q \cdot n + r \;\wedge\; 0 \le r < n \quad \wedge \\
& a' = p' \cdot n + r' \;\wedge\; b' = q' \cdot n + r' \;\wedge\; 0 \le r' < n.
\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
(a+a') - (b+b') &= (p \cdot n + r + p' \cdot n + r') - (q \cdot n + r + q' \cdot n + r') \\
&= (p + p' - q - q') \cdot n
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
(a \cdot a') - (b \cdot b') &= (p \cdot n + r) \cdot (p' \cdot n + r') - (q \cdot n + r) \cdot (q' \cdot n + r') \\
&= ((p \cdot p' \cdot n + p \cdot r' + r \cdot p') \cdot n + r \cdot r') - \\
&\quad\; ((q \cdot q' \cdot n + q \cdot r' + r \cdot q') \cdot n + r \cdot r') \\
&= (p \cdot p' \cdot n + p \cdot r' + r \cdot p' - q \cdot q' \cdot n - q \cdot r' - r \cdot q') \cdot n,
\end{aligned}$$

woraus $(a+a', b+b') \in \equiv_n$ und $(a \cdot a', b \cdot b') \in \equiv_n$ folgt, d.h., $+$ und $\cdot$ sind mit $\equiv_n$ verträglich.

Aufgabe 1.37 *(Kongruenzen)*
Man bestimme alle Äquivalenzrelationen auf $\{1,2,3,4\}$, die mit der folgenden inneren Verknüpfung $\circ$ auf $\{1,2,3,4\}$ verträglich sind:

$\circ$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	2	4
3	3	2	1	4
4	4	4	4	4

Lösung. Man prüft leicht nach, daß die zu den folgenden Zerlegungen der Menge $A := \{1,2,3,4\}$ gehörenden Äquivalenzrelationen mit $\circ$ kompatibel sind:

$$\begin{aligned} Z_1 &:= \{\{x\} \mid x \in A\}, \\ Z_2 &:= \{\{1,3\},\{2\},\{4\}\}, \\ Z_3 &:= \{\{2,4\},\{1\},\{3\}\}, \\ Z_4 &:= \{\{1,2,3,4\}\}, \end{aligned}$$

Angenommen, es gibt noch eine von den oben beschriebenen Relationen verschiedene Äquivalenzrelation R auf der Menge A, die mit $\circ$ kompatibel ist. Dann gilt

$$R \cap \{(1,2),(1,4),(2,3),(3,4)\} \neq \emptyset.$$

Folgende Fälle sind damit möglich:
Fall 1: $(1,2) \in R$.
Dann gilt $(1 \circ 2, 2 \circ 2) = (2,4) \in R$ und $(1 \circ 3, 2 \circ 3) = (3,2) \in R$, womit $R = Z_4$ ist, was wir ausgeschlossen hatten. Also ist Fall 1 nicht möglich.
Fall 2: $(1,4) \in R$.
Dann gilt $(1 \circ 2, 4 \circ 2) = (2,4) \in R$ und $(1 \circ 3, 4 \circ 3) = (3,4) \in R$, womit $R = Z_4$ ist, was wir ausgeschlossen hatten. Also ist Fall 2 nicht möglich.
Fall 3: $(2,3) \in R$.
Dann gilt $(2 \circ 2, 3 \circ 2) = (4,2) \in R$ und $(2 \circ 3, 3 \circ 3) = (2,1) \in R$, womit $R = Z_4$ ist, was wir ausgeschlossen hatten. Also ist Fall 3 nicht möglich.
Fall 4: $(3,4) \in R$.
Dann gilt $(3 \circ 2, 4 \circ 2) = (2,4) \in R$ und $(3 \circ 3, 4 \circ 3) = (1,4) \in R$, womit $R = Z_4$ ist, was wir ausgeschlossen hatten. Also ist Fall 4 ebenfalls nicht möglich.
Folglich gibt es nur die oben angegebenen Äquivalenzrelationen, die mit $\circ$ verträglich sind.

Aufgabe 1.38 *(Anzahl von Äquivalenzrelationen)*

(a) Man gebe alle Äquivalenzrelationen auf der Menge $M := \{1,2,3,...,m\}$ für $m \in \{2,3,4\}$ an.

(b) Bezeichne $\mu(k)$ die Anzahl aller Äquivalenzrelationen auf einer k-elementigen Menge ($k \in \mathbb{N}$). Nach der von W. Harnau gefundenen Formel kann man $\mu(k)$ wie folgt berechnen:

$$\mu(k) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \sum_{t=1}^{i} (-1)^t \frac{t^k}{t!(i-t)!}. \tag{1.6}$$

Mit Hilfe von (1.6) berechne man $\mu(k)$ für $k \in \{2,3,4,5,6,7\}$.

Lösung. **(a):** Die trivialen Äquivalenzrelationen auf der Menge M sind nachfolgend mit $\kappa_0 := \{(x,x) \mid x \in M\}$ und $\kappa_1 := M \times M$ bezeichnet.
Indem man sich die möglichen Zerlegungen auf einer k-elementigen Menge ($k \in \{2,3,4\}$) überlegt, erhält man die folgenden Äquivalenzrelationen auf M für $k \in \{2,3,4\}$:
$k = 2$: κ_0, κ_1.
$k = 3$: κ_0, κ_1, $\kappa_0 \cup \{(1,2),(2,1)\}$, $\kappa_0 \cup \{(1,3),(3,1)\}$, $\kappa_0 \cup \{(2,3),(3,2)\}$.
$k = 4$: κ_0, κ_1; sechs Relationen der Form $\kappa_0 \cup \{(a,b),(b,a)\}$ mit $a, b \in M$ und $a \neq b$; vier Relationen der Form $\kappa_0 \cup \{(a,b),(a,c),(b,c),(b,a),(c,a),(c,b)\}$ mit $\{a,b,c\} \subset M$ und a,b,c paarweise verschieden; drei Relationen der Form $\kappa_0 \cup \{(a,b),(b,a),(c,d),(d,c)\}$, wobei $(a,b,c,d) \in \{(1,2,3,4),(1,3,2,4),(1,4,2,3)\}$.

(b): Es gilt (unter Beachtung von $0! := 1$):

$$\begin{aligned}\mu(2) &= \textstyle\sum_{i=1}^{2} (-1)^i \sum_{t=1}^{i} (-1)^t \frac{t^2}{t!(i-t)!} \\ &= (-1)^1 \underbrace{\sum_{t=1}^{1} (-1)^t \frac{t^2}{t!(1-t)!}}_{=-1} + (-1)^2 \underbrace{\sum_{t=1}^{2} (-1)^t \frac{t^2}{t!(2-t)!}}_{-1+2} \\ &= 2.\end{aligned}$$

Analog berechnet man die anderen Werte für $\mu(k)$ der folgenden Tabelle.

k	2	3	4	5	6	7
$\mu(k)$	2	5	15	52	203	877

Aufgabe 1.39 *(Eigenschaft von Äquivalenzrelationen)*
Es seien R und Q Äquivalenzrelationen auf der Menge A. Man beweise: $R \square Q$ ist genau dann eine Äquivalenzrelation, wenn $R \square Q = Q \square R$ gilt.

Lösung. Offenbar gilt für eine beliebige Relation $S \subseteq A \times A$:

$$\begin{aligned}&S \text{ ist symmetrisch} \iff S^{-1} = S; \\ &S \text{ ist transitiv} \iff S \square S \subseteq S; \\ &S \text{ ist reflexiv und transitiv} \implies S \square S = S.\end{aligned}$$

Sei nachfolgend $S := R \Box Q$, wobei R und Q Äquivalenzrelationen bezeichnen. Die Reflexivität von S folgt unmittelbar aus der Reflexivität von R und Q sowie der Definition von $\Box$. Wegen der Eigenschaft

$$(F \Box G)^{-1} = G^{-1} \Box F^{-1}$$

(siehe Satz 1.4.1, (2)) und obiger Bemerkung haben wir

$$\begin{aligned} S \ \text{symmetrisch} &\iff S^{-1} = S \\ &\iff (R \Box Q)^{-1} = Q^{-1} \Box R^{-1} = Q \Box R = R \Box Q \end{aligned}$$

Sei nun $R \Box Q = Q \Box R$. Unter Verwendung des Assoziativgesetzes für $\Box$ (siehe Satz 1.4.1, (1)) läßt sich dann die Transitivität von S wie folgt zeigen:

$$(R \Box Q) \Box (R \Box Q) = R \Box (Q \Box R) \Box Q = R \Box (R \Box Q) \Box Q = (R \Box R) \Box (Q \Box Q) = R \Box Q.$$

Zusammenfassend haben wir damit bewiesen:

$$R \Box Q = Q \Box R \implies S \ \text{ist Äquivalenzrelation.}$$

Zwecks Beweis der Umkehrung obiger Aussage sei $R \Box Q$ eine Äquivalenzrelation. Dann gilt:

$$R \Box Q = (R \Box Q)^{-1} = Q^{-1} \Box R^{-1} = Q \Box R,$$

d.h., $R \Box Q = Q \Box R$. □

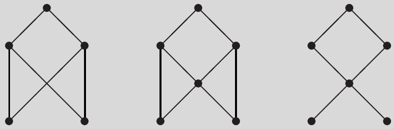
Ordnungsrelationen

Aufgabe 1.40 *(Beispiele für Ordnungsrelationen)*
Bei welchen der folgenden Relationen R_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ handelt es sich um eine reflexive, teilweise Ordnung auf der Menge $A := \{1, 2, 3\}$?

$$\begin{aligned} R_1 &:= \{(1,1), (1,2), (2,2)\}, \\ R_2 &:= \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,3), (3,3)\}, \\ R_3 &:= \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3)\}, \\ R_4 &:= \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3)\}. \end{aligned}$$

Lösung. Reflexive Halbordnungen sind R_1 und R_3. R_2 ist nicht transitiv. R_4 ist nicht antisymmetrisch.

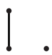
Aufgabe 1.41 *(Beispiele für Ordnungsrelationen)*
Welche der folgenden Diagramme sind Hasse-Diagramme einer halbgeordneten Menge?



Lösung. Nur das zweite Diagramm ist kein Hasse-Diagramm, da Beziehungen, die sich durch Transitivität ergeben, teilweise durch Striche angegeben sind.

Aufgabe 1.42 *(Reflexive Halbordnung)*
Auf $A = \{a, b, c\}$ sei eine reflexive, teilweise Ordnung R definiert. Welche Möglichkeiten gibt es dann für das zugehörige Hasse-Diagramm H_R dieser Relation, wobei die Knoten (Punkte) dieses Diagramms nicht bezeichnet sein sollen. Man gebe für jedes gefundene Diagramm auch ein Beispiel für $R \subseteq A^2$ in Relationenschreibweise an.

Lösung.

H_R	Beispiel für R
	$R_1 := \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$
	$R_1 \cup \{(a, b)\}$
	$R_1 \cup \{(a, c), (b, c)\}$
	$R_1 \cup \{(a, b), (a, c)\}$
	$R_1 \cup \{(a, b), (a, c), (b, c)\}$

Aufgabe 1.43 *(Irreflexive Halbordnung)*
Sei $A := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Auf A seien durch

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$
$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$$

eine Addition und eine Multiplikation definiert. Man zeige, daß man auf A *keine* irreflexive Halbordnung $<$ mit den folgenden drei Eigenschaften definieren kann:

(a) $\forall z \in A : \ z = (0,0) \ \vee \ z < (0,0) \ \vee (0,0) < z$,
(b) $\forall z, w \in A : (((0,0) < z \ \wedge \ (0,0) < w) \implies ((0,0) < z \cdot w \ \wedge \ (0,0) < z + w))$,
(c) $\forall z, w \in A : ((z < (0,0) \ \wedge \ w < (0,0)) \implies (0,0) < z \cdot w)$.

Lösung. Angenommen, es gibt eine irreflexive Halbordnung $<$ auf A mit den oben angegebenen Eigenschaften (a), (b) und (c).
Sei $z := (x, y) \neq (0,0)$. Dann ist wegen (a) entweder $z < (0,0)$ oder $(0,0) < z$. Mit (b) und (c) folgt $z \cdot z = (x^2 - y^2, 2xy) > (0,0)$. Speziell bedeutet dies für $z \in \{(1,0), (0,1)\}$:

$$(0,0) < (1,0) \cdot (1,0) = (1,0) \ \text{ und } \ (0,0) < (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0).$$

Bildet man nun $(1,0) + (-1,0) = (0,0)$, so muß nach (b) und dem oben Gezeigten $(0,0) < (0,0)$ gelten, was nicht sein kann.
Also ist unsere Annahme falsch und damit die Behauptung richtig.

Aufgabe 1.44 *(Eigenschaft von Halbordnungen)*
Man wähle auf alle Arten zwei der drei Bedingungen „reflexiv“, „antisymmetrisch“, „transitiv“ aus und gebe jeweils ein Beispiel für eine Relation an, die diese zwei Bedingungen, aber nicht die dritte Bedingung erfüllt.

Lösung. Sei $A := \{1, 2, 3\}$. Dann ist die Relation

$$R_1 := \{(1,2), (1,3), (2,3)\}$$

nicht reflexiv, aber antisymmetrisch und transitiv; die Relation

$$R_2 := \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1)\}$$

nicht antisymmetrisch, aber reflexiv und transitiv; und die Relation

$$R_3 := \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,3)\}$$

nicht transitiv, aber reflexiv und antisymmetrisch. $\square$

Korrespondenzen, Abbildungen und Verknüpfungen

Aufgabe 1.45 *(Hintereinanderausführen von Abbildungen)*
Seien $A := \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 \le x \le 1\}$ und

$$\begin{aligned} f_1 &: A \longrightarrow A,\ x \mapsto \sin x, \\ f_2 &: A \longrightarrow A,\ x \mapsto x^2, \\ f_3 &: A \longrightarrow A,\ x \mapsto \sqrt{x}. \end{aligned}$$

Durch welche Zuordnungsvorschriften sind dann $f_i \Box f_j$ für $\{i,j\} \subset \{1,2,3\}$ und $i \neq j$ bestimmt?

Lösung. Es gilt

$$\begin{aligned} f_1 \Box f_2 &= \{(x,y) \in [0,1]^2 \,|\, \exists z \in [0,1] : \underbrace{(x,z) \in f_1}_{\substack{\text{d.h.,} \\ z = \sin x}} \ \wedge\ \underbrace{(z,y) \in f_2}_{\substack{\text{d.h.,} \\ y = z^2}} \} \\ &= \{(x,y) \in [0,1]^2 \,|\, y = (\sin x)^2\} \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$f_1 \Box f_2 : A \longrightarrow A,\ x \mapsto (\sin x)^2.$$

Analog kann man sich überlegen:

$$\begin{aligned} f_2 \Box f_1 &: A \longrightarrow A,\ x \mapsto \sin x^2, \\ f_1 \Box f_3 &: A \longrightarrow A,\ x \mapsto \sqrt{\sin x}, \\ f_3 \Box f_1 &: A \longrightarrow A,\ x \mapsto \sin \sqrt{x}, \\ f_2 \Box f_3 &: A \longrightarrow A,\ x \mapsto x, \\ f_3 \Box f_2 &: A \longrightarrow A,\ x \mapsto x. \end{aligned}$$

Aufgabe 1.46 *(Injektive, surjektive und bijektive Abbildungen)*
Man untersuche, ob die angegebene Abbildung f injektiv, surjektiv oder bijektiv ist:

(a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto 2n+1$,
(b) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $z \mapsto -z+3$,
(c) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $q \mapsto 5q+9$,
(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $r \mapsto (r-1)(r-2)(r-3)$.

Lösung.
(a): f ist injektiv, nicht surjektiv und damit auch nicht bijektiv.

(b): f ist injektiv, surjektiv und damit bijektiv.

(c): f ist injektiv, surjektiv und damit bijektiv.

(d): f ist nicht injektiv (z.B. wegen $f(1) = f(2) = 0$), surjektiv (da ein Polynom 3. Grades immer eine reelle Nullstelle hat, womit die Gleichung

$$(r-1)(r-2)(r-3) = s$$

für jedes $s \in \mathbb{R}$ stets mindestens eine reelle Lösung r besitzt) und damit nicht bijektiv.

Aufgabe 1.47 *(Surjektive Abbildung)*
Man gebe eine Abbildung $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ an, die surjektiv, aber nicht bijektiv ist.

Lösung. Z.B. ist die Abbildung f mit

$$f(1) = f(2) = 1, \; \forall x \in \mathbb{N} \backslash \{1, 2\} : f(x) = x - 1$$

surjektiv, aber nicht injektiv, womit sie nicht bijektiv ist.

Aufgabe 1.48 *(Surjektive und injektive Abbildung)*
Man löse die folgende Aufgabe für die Menge
(a) $A = \mathbb{Z}$,
(b) $A = \mathbb{Q}$.
Sei $c \in A$ und f_c die durch

$$f_c : \; A \longrightarrow A, \; x \mapsto x + c - x \cdot c$$

definierte Abbildung. Für welche $c \in A$ ist
(1) f_c surjektiv;
(2) f_c injektiv?

Lösung. **(a), (1):** f_c ist nur für $c \in \{0, 2\}$ surjektiv, da kein $x \in \mathbb{Z}$ mit $f_c(x) = (1-c)x + c = 0$ und $c \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 2\}$ existiert.

(a), (2): Offenbar ist f_1 nicht injektiv. Jedoch ist f_c injektiv für alle $c \in \mathbb{Z} \backslash \{1\}$, da im Fall $c \neq 1$ gilt:

$$(1-c) \cdot x_1 + c = (1-c) \cdot x_2 + c \implies x_1 = x_2.$$

(b), (1): f_c ist genau dann surjektiv, wenn $c \neq 1$ ist.

(b), (2): f_c ist genau dann injektiv, wenn $c \neq 1$ ist.

Aufgabe 1.49 *(Bijektive Abbildung)*
Sei f eine Abbildung von $A := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ in $B := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ vermöge

$$(x, y) \mapsto (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y),$$

wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gewisse fest gewählte Zahlen aus $\mathbb{R}$ sind. Unter welchen Bedingungen für $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ist f eine bijektive Abbildung? Wie lautet in diesem Fall f^{-1}?

Lösung. f ist offenbar genau dann bijektiv, wenn man für jedes $(y_1, y_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ genau ein $(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} \alpha x_1 &+ \beta x_2 &= y_1 \\ \gamma x_1 &+ \delta x_2 &= y_2 \end{aligned}$$

finden kann. Analog zur Rechnung zu Beginn von Abschnitt 3.1 (siehe auch Satz 3.1.11) erhalten wir hieraus:

$$f \text{ ist bijektiv} \iff \alpha \cdot \delta - \gamma \cdot \beta \neq 0.$$

Falls $\alpha \cdot \delta - \gamma \cdot \beta \neq 0$, lautet die inverse Abbildung

$$f^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \ (y_1, y_2) \mapsto \left(\frac{y_1\delta - y_2\beta}{\alpha \cdot \delta - \gamma \cdot \beta}, \frac{\alpha y_2 - \gamma y_1}{\alpha \cdot \delta - \gamma \cdot \beta} \right).$$

Aufgabe 1.50 *(Abbildungen)*
Welche der folgenden Relationen R_i ($i \in \{1, 2, ..., 6\}$) sind Abbildungen von $D(R_i) \subseteq \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$?

(a) $R_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sin x\}$, $D(R_1) := \mathbb{R}$;
(b) $R_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \tan x\}$, $D(R_2) := \mathbb{R}$;
(c) $R_3 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \ \wedge \ y = \frac{1}{x^2-1}\}$, $D(R_3) := [0, 1]$;
(d) $R_4 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \ \wedge \ y = \ln x\}$, $D(R_4) := \mathbb{R}^+$;
(e) $R_5 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -5 \leq x \leq 5 \ \wedge \ x^2 + y^2 = 25\}$, $D(R_5) = [-5, 5]$;
(f) $R_6 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y + x = 0\}$, $D(R_6) = \mathbb{R}$.

Lösung. Nur R_1, R_4 und R_6 sind Abbildungen. R_2 ist keine Abbildung von $\mathbb{R}$, da z.B. $x = \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R}$ kein Bildelement hat. R_3 ist keine Abbildung, da $\frac{1}{x^2-1}$ für $x \in \{1, -1\}$ nicht definiert ist. R_5 ist keine Abbildung, da z.B. die Paare $(3, 4)$ und $(3, -4)$ jeweils die Relationsvorschrift $x^2 + y^2 = 25$ erfüllen.

Aufgabe 1.51 *(Eigenschaft von Abbildungen)*
Es sei A eine endliche Menge und $f : A \longrightarrow A$ eine Abbildung. Man beweise:

$$f \text{ ist injektiv} \iff f \text{ ist surjektiv} \iff f \text{ ist bijektiv}.$$

Lösung. „f ist injektiv $\Longrightarrow$ f ist surjektiv“: Da f eine Abbildung ist, gilt $D(f) = A$. Da f außerdem injektiv, folgt hieraus $|W(f)| = |D(f)| = |A|$. Wegen der Endlichkeit von A geht dies nur im Fall $W(f) = A$, d.h., f ist surjektiv.

„f ist surjektiv $\Longrightarrow$ f ist bijektiv“: Da f eine surjektive Abbildung ist, haben wir $D(f) = W(f) = A$. Wegen der Endlichkeit von A geht dies nur, wenn f auch injektiv, d.h., bijektiv ist.

„f ist bijektiv $\Longrightarrow$ f ist injektiv“: Dies folgt unmittelbar aus der Definition von „bijektiv“.

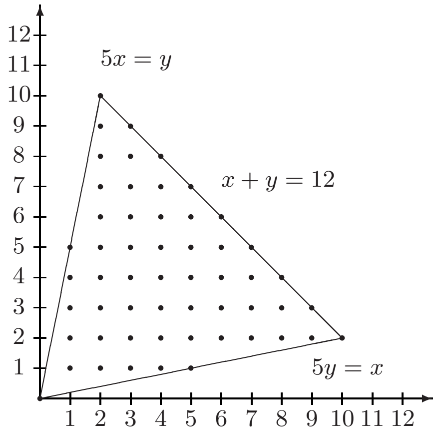
Aufgabe 1.52 *(Korrespondenz)*

Es sei F die Menge der Paare $(x, y) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, die den folgenden Ungleichungen genügen:

$$10x - 2y \geq 0,\ 10y - 2x \geq 0,\ x + y \leq 12.$$

Offenbar ist F eine Korrespondenz aus $\mathbb{N}_0$ in $\mathbb{N}_0$ und die Elemente $(x, y) \in F$ kann man als Koordinaten von Punkten in der x, y-Ebene auffassen. Man gebe (a) eine Skizze für F an und bestimme (b) $D(F)$ und $W(F)$, (c) F^{-1}, (d) $F \square F$.

Lösung. **(a):** Die möglichen Elemente $(x, y) \in F$ kann man sich wie folgt als Punkte in der Ebene geometrisch veranschaulichen:



(b): $D(F) = W(F) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

(c): $F^{-1} = F$

(d): $F \square F = \{(0, 0)\} \cup \{(x, y) \,|\, x, y \in \{1, 2, ..., 10\}\}$, da

$$\forall x, z \in \{1, 2, ..., 10\} :\ (x, 2) \in F\ \wedge\ (2, z) \in F$$

(siehe obige Zeichnung) und folglich

$$\begin{aligned} F\Box F &= \{(x,z)\in D(F)\times W(F)\,|\,\exists y:\ (x,y)\in F\ \wedge\ (y,z)\in F\} \\ &= \{(0,0)\}\cup\{(x,y)\,|\,x,y\in\{1,2,...,10\}\}. \end{aligned}$$

Aufgabe 1.53 *(Eigenschaft von Abbildungen)*
Seien $f: A \longrightarrow B$, $g: B \longrightarrow C$ Abbildungen. Man beweise:

$$f, g \text{ surjektiv (injektiv)} \Longrightarrow f\Box g \text{ surjektiv (injektiv).}$$

Lösung. Seien f und g surjektiv. Angenommen, $f\Box g$ ist nicht surjektiv. Dann gibt es ein $c \in C$ mit der Eigenschaft, daß $(f\Box g)(x) \neq c$ für alle $x \in A$. Da g und f surjektiv sind, existiert ein $b \in B$ mit $g(b) = c$ und dazu passend ein $a \in A$ mit $f(a) = b$. Folglich gilt $(f\Box g)(a) = g(f(a)) = g(b) = c$ im Widerspruch zu unserer Annahme. Also gilt die Behauptung.

Seien f und g injektiv. Angenommen, $(f\Box g)(a_1) = f\Box g)(a_2)$ für gewisse $a_1, a_2 \in A$, d.h., es gilt $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$. Da g injektiv ist, ergibt sich hieraus $f(a_1) = f(a_2)$. Da auch f injektiv ist, folgt $a_1 = a_2$. Also ist $f\Box g$ injektiv. □

Mächtigkeit von Mengen

Aufgabe 1.54 *(Unendliche Menge)*
Man beweise: Ist M eine unendliche Menge, dann ist auch $\mathfrak{P}(M)$ eine unendliche Menge.

Lösung. Sei M eine unendliche Menge. Nach Definition gibt es folglich eine bijektive Abbildung f von M auf eine echte Teilmenge N von M. Mit Hilfe von f läßt sich eine bijektive Abbildung g von $\mathfrak{P}(M)$ auf die Menge

$$P := \{\,\{x\}\,|\,x \in N\} \cup \{A \in \mathfrak{P}(M)\,|\,|A| \geq 2\} \subset \mathfrak{P}(M)$$

wie folgt definieren:

$$\begin{aligned} &g:\ \mathfrak{P}(M) \longrightarrow P, \\ &\forall x \in M:\ \{x\} \mapsto \{f(x)\}, \\ &\forall X \in \{A \in \mathfrak{P}(M)\,|\,|A| \geq 2\}:\ X \mapsto X. \end{aligned}$$

Aufgabe 1.55 *(Gleichmächtigkeit von gewissen Intervallen aus $\mathbb{R}$)*
Man beweise, daß die Intervalle $(0,1)$ und $[0,1]$ aus reellen Zahlen gleichmächtig sind.

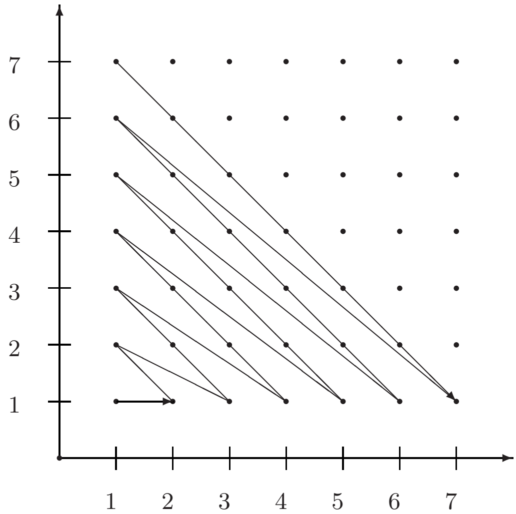
Lösung. Obige Behauptung ist ein Spezialfall von Satz 1.5.5, (b).

Aufgabe 1.56 *(Abzählbare Mengen)*
Man beweise: Je zwei der Mengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ sind gleichmächtig (und damit abzählbar).

Lösung. Eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{N}_0$ ist z.B.

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}_0, x \mapsto x - 1.$$

Zwecks Nachweis, daß $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar ist, deute man die Paare $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ als Punkte in der x, y-Ebene und „zähle" die Punkte mit $(1, 1)$ beginnend über die „Diagonalen" wie folgt ab:



Die Abzählbarkeit von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ läßt sich aber auch wie folgt zeigen:
Für $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ wollen wir die Zahl $x + y$ als Höhe von (x, y) bezeichnen. Die Anzahl aller Paare mit gegebener Höhe h (> 1) ist gleich $h - 1$, da nur genau die folgenden Paare die Höhe h besitzen:

$$(1, h - 1),\ (2, h - 2),\ ...,\ (h - 1, 1).$$

Bezeichne P_h die Menge aller Paare der Höhe h. Dann ist $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \bigcup_{h=2}^{\infty} P_h$ als Vereinigung von abzählbar vielen endlichen Mengen wieder eine abzählbare Menge (siehe Satz 1.5.3, (c) bzw. die folgenden Aufgabe).

Die Abzählbarkeit von $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ beweist man analog.

Aufgabe 1.57 *(Abzählbare Mengen)*
Seien A_i für alle $i \in \mathbb{N}$ abzählbare Mengen. Man beweise, daß dann auch $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ eine abzählbare Menge ist.

Lösung. Da unsere vorgegebenen Mengen abzählbar sind, können wir sie wie folgt beschreiben:

$$\begin{aligned}
&A_1 := \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, ..., a_{1n}, ...\},\\
&A_2 := \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, ..., a_{2n}, ...\},\\
&A_3 := \{a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}, ..., a_{3n}, ...\},\\
&A_4 := \{a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{44}, ..., a_{4n}, ...\},\\
&....................\\
&A_m := \{a_{m1}, a_{m2}, a_{m3}, a_{m4}, ..., a_{mn}, ...\},\\
&....................
\end{aligned}$$

Dann kann man die Menge $A := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ wie folgt als abzählbare Folge schreiben:

$$a_{11};\ a_{12}, a_{21};\ a_{13}, a_{22}, a_{31};\ a_{14}, a_{23}, a_{32}, a_{41};\ ...$$

(siehe Beweis von Satz 1.5.3, (b)).

Aufgabe 1.58 *(Überabzählbare Menge)*
Man beweise: Die Menge

$$F := \{(a_1, a_2, a_3, ..., a_i, ...) \mid \forall i \in \mathbb{N}:\ a_i \in \{0, 1\}\}$$

(Menge aller Folgen, deren Folgeglieder 0 oder 1 sind) ist nicht abzählbar.
(*Hinweis*: $(a_1, a_2, ..., a_i, ...) = (b_1, b_2, ..., b_i, ...) \ :\Longleftrightarrow\ \forall i \in \mathbb{N} : a_i = b_i$)

Lösung. Angenommen, F ist abzählbar, d.h., es existiert eine bijektive Abbildung

$$f:\ \mathbb{N} \longrightarrow F,\ n \mapsto (a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, ...).$$

Wählt man dann $b := (b_1, b_2, b_3, ...) \in F$ mit

$$b_i := \begin{cases} 0 & \text{falls } a_{ii} = 1, \\ 1 & \text{falls } a_{ii} = 0 \end{cases}$$

$(i \in \mathbb{N})$, so sieht man leicht, daß $b \neq (a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, ...) = f(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, womit f keine bijektive Abbildung ist, im Widerspruch zu unserer Annahme. Also gilt unsere Behauptung.

Aufgabe 1.59 *(Gleichmächtige Mengen)*
Sei F wie in Aufgabe 1.58 definiert. Man zeige, daß die Menge $F \times F$ zu F gleichmächtig ist.

Lösung. Eine bijektive Abbildung von $F \times F$ auf F ist z.B. die Abbildung

$$g: \; F \times F \longrightarrow F, \; (\,(a_1, a_2, a_3, ...), (b_1, b_2, b_3, ...)\,) \mapsto (a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, ...).$$

Aufgabe 1.60 *(Gleichmächtige Mengen)*
Sei F wie in Aufgabe 1.58 definiert. Man zeige, daß F sowohl zu $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ als auch zu $\mathfrak{P}(\mathbb{Z})$ gleichmächtig ist.

Lösung. Bezeichne A ein beliebiges Element aus $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$. Dann läßt sich der Menge A auf eineindeutige Weise das Tupel

$$(a_1, a_2, a_3, ...) \in F$$

mit

$$a_i := \begin{cases} 0 & \text{falls} \;\; i \notin A, \\ 1 & \text{falls} \;\; i \in A \end{cases}$$

$(i \in \mathbb{N})$ zuordnen. Folglich gibt es eine bijektive Abbildung

$$g : \mathfrak{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow F, \; A \mapsto g(A) := (a_1, a_2, a_3, ...),$$

d.h., $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ und F sind gleichmächtig.

Die zweite Behauptung beweist man analog:
Offenbar gibt es eine bijektive Abbildung f von $\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{N}$ (siehe dazu Beispiel (2.) für gleichmächtige Mengen aus Abschnitt 1.5 und Aufgabe 1.56). Mit Hilfe dieser Abbildung und der gerade oben definierten Abbildung g läßt sich dann die Abbildung $h : \mathfrak{P}(\mathbb{Z}) \longrightarrow F$ wie folgt definieren:

$$\forall A \in \mathfrak{P}(\mathbb{Z}) : \; h(A) := g(\{f(a) \,|\, a \in A\}).$$

Man prüft leicht nach, daß h eine bijektive Abbildung von $\mathfrak{P}(\mathbb{Z})$ auf F ist.

Aufgabe 1.61 *(Gleichmächtige Mengen)*
Sei F wie in Aufgabe 1.58 definiert und bezeichne $F^\star$ die Menge derjenigen Tupel aus F, die keine 1-Periode besitzen, d.h., für kein $(a_1, a_2, a_3, ...) \in F^\star$ existiert ein $k \in \mathbb{N}_0$, so daß $a_{k+1} = a_{k+2} = ... = 1$ ist. Man beweise, daß F und $F^\star$ gleichmächtig sind.

Lösung. Sei $T_k := \{(a_1, a_2, ..., a_k, 1, 1, 1, ...) \,|\, \{a_1, ..., a_k\} \subseteq \{0, 1\}\}$ $(k \in \mathbb{N}_0)$. Offenbar gilt

$$F^\star = F \backslash (\bigcup_{k=0}^{\infty} T_k).$$

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist T_k eine endliche Menge und damit $\bigcup_{k=0}^{\infty} T_k$ eine abzählbare Menge. Die Menge F ist dagegen nach Satz 1.5.5 eine überabzählbare Menge. Unsere Behauptung folgt damit aus Satz 1.5.5.

Aufgabe 1.62 *(Gleichmächtige Mengen)*

Man beweise, daß die Menge M aller reellen Zahlen x mit $0 < x < 1$ zur Menge F (siehe Aufgabe 1.58) gleichmächtig ist.

Lösung. Sei $a \in M$. Dann existieren gewisse $a_1, a_2, ... \in \{0, 1\}$ mit

$$x = a_1 \cdot \frac{1}{2} + a_2 \cdot \frac{1}{2^2} + a_3 \cdot \frac{1}{2^3} + ...$$

Genauer:

$$x = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \frac{1}{2^i}.$$

Diese Darstellung ist nur dann eineindeutig, wenn $(a_1, a_2, a_3, ...)$ keine 1-Periode besitzt. Folglich ist M zu $F^\star$ (siehe Aufgabe 1.61) gleichmächtig. Unsere Behauptung folgt dann aus der Lösung von Aufgabe 1.61.

Aufgabe 1.63 *(Gleichmächtige Mengen)*

Man beweise, daß $\mathbb{R}$ zur Menge $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ gleichmächtig ist.

Lösung. Im Abschnitt 1.5 wurde gezeigt, daß $\mathbb{R}$ zur Menge $M := \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 < x < 1\}$ gleichmächtig ist. Unsere Behauptung ergibt sich damit aus den Lösungen der Aufgaben 1.62 und 1.60. □

Boolesche Funktionen und Aussagenlogik

Aufgabe 1.64 *(Aufschreiben eines Satzes der Umgangssprache als aussagenlogische Formel)*

Man überführe die folgende Aussage A in einen aussagenlogischen Term: *Sonntags besuchen wir unsere Freunde und, sofern es nicht gerade regnet, machen wir eine Wanderung oder eine Radpartie.*

Lösung. A läßt sich wie folgt in die Einzelaussagen B, C, D, E, F zerlegen:

B: *Es ist Sonntag.*
C: *Wir besuchen unsere Freunde.*
D: *Es regnet.*
E: *Wir machen eine Wanderung.*
F: *Wir machen eine Radpartie.*

Logisch präzise lautet dann A:

Wenn *es Sonntag ist,* **dann**
besuchen wir unsere Freunde **und**,
falls *es nicht regnet,* **dann**
machen wir eine Wanderung **oder** *wir machen eine Radpartie.*

beziehungsweise

$$B \Longrightarrow (C \wedge (\neg D \Longrightarrow (E \vee F))).$$

Aufgabe 1.65 *(Logische Analyse von zwei Sätzen der Umgangssprache)*
Oft sind Sätze der Umgangssprache unpräzise oder mehrdeutig, was man meist erst bei der logischen Analyse entdeckt. Man erläutere dies anhand der folgenden zwei Aussagen A_1 und A_2.
A_1: *Unsere Zimmer sind mit Fernseher und Telefon oder Internetanschluß ausgestattet.*
A_2: *Werktags außer samstags verkehrt um 23.20 Uhr entweder ein Zug oder ein Bus von X nach Y.*

Lösung. Wir benutzen die folgenden Teilaussagen von A_1:

B: *Unsere Zimmer sind mit Fernseher ausgestattet.*
C: *Unsere Zimmer sind mit Telefon ausgestattet.*
D: *Unsere Zimmer sind mit Internetanschluß ausgestattet.*

Der Term $B \wedge C \vee D$ ist kein zulässiger Ausdruck! Korrekte Terme sind $(B \wedge C) \vee D$ oder $B \wedge (C \vee D)$, deren zugehörigen Boolesche Funktionen voneinander verschieden sind. Damit hat obiger Satz A_1 zwei unterschiedliche logische Interpretationen:

- $(B \wedge C) \vee D$: *Unsere Zimmer sind mit Fernseher und Telefon – oder mit Internetanschluß ausgestattet.*
- $B \wedge (C \vee D)$: *Unsere Zimmer sind mit Ferseher – und zusätzlich mit Telefon oder Internetanschluß ausgestattet.*

Kommen wir nun zur logischen Analyse von A_2, wobei wir die folgenden Teilaussagen von A_2 benutzen:

B: *Es ist werktags.*
C: *Es ist sonntags.*
D: *Es verkehrt um 23.20 Uhr ein Zug von X nach Y.*
E: *Es verkehrt um 23.20 Uhr ein Bus von X nach Y.*

Übersetzt man die obige Aussage ohne viel Überlegung, so erhält man:

$$\varphi := (B \wedge (\neg C)) \Longrightarrow ((D \wedge (\neg E)) \vee ((\neg D) \wedge E).$$

Dies ist zwar eine aussagenlogisch korrekte Formel, sie stimmt aber nicht mit dem überein was mit A_2 offenbar gemeint ist. Denn, wählt man z.B. $B = 0$ und $C = 0$ („*sonntags*“), so ist $\varphi = 1$, was

Sonntags verkehrt ... ein Zug und ein Bus ...

als wahre Aussage zur Folge hat. So will aber obiger Text sicher nicht verstanden werden! Eine mögliche Textergänzung bei A zwecks Eindeutigkeit ist

... und falls es nicht werktags außer samstags ist, dann verkehrt um 23.20 Uhr weder ein Zug noch ein Bus ...

beziehungsweise formalisiert:

$$\psi := \neg(B \wedge (\neg C)) \Longrightarrow ((\neg D) \wedge (\neg E)).$$

Der korrekte Ersatzausdruck für A_2 lautet dann

$$\varphi \ \wedge \ \psi,$$

wie man anhand folgender Tabelle überprüfen kann:

B	C	D	E	φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$	Bemerkung
0	0	0	0	1	1	1	werktags
0	0	0	1	1	0	0	
0	0	1	0	1	0	0	
0	0	1	1	1	0	0	
0	1	0	0	1	1	1	nicht
0	1	0	1	1	0	0	interpretierbar
0	1	1	0	1	0	0	
0	1	1	1	1	0	0	
1	0	0	0	0	1	0	werktags
1	0	0	1	1	1	1	
1	0	1	0	1	1	1	
1	0	1	1	0	1	0	
1	1	0	0	1	1	1	samstags
1	1	0	1	1	0	0	
1	1	1	0	1	0	0	
1	1	1	1	1	0	0	

Aufgabe 1.66 *(Überprüfen einer Schlußfolgerung mittels Aussagenlogik)*
Man entscheide, ob der folgende Schluß korrekt ist, wenn man die Voraussetzungen als Aussagen aufschreibt und nachprüft, ob die Konjunktion dieser Aussagen die Behauptung impliziert.
Falls die Beschäftigten eines Betriebes nicht streiken, so ist eine notwendige und hinreichende Bedingung für eine Gehaltserhöhung, daß die Arbeitsstundenzahl erhöht wird. Im Falle einer Gehaltserhöhung wird nicht gestreikt. Falls die Arbeitsstundenzahl erhöht wird, so gibt es keine Gehaltserhöhung. Folglich werden die Gehälter nicht erhöht.

Lösung. Wir benutzen folgende Abkürzungen:

S: *Die Beschäftigten des Betriebes streiken.*
G: *Es gibt eine Gehaltserhöhung.*
A: *Die Arbeitsstundenzahl wird erhöht.*

Die obigen Voraussetzungen sind damit wie folgt beschreibbar:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &:= (\neg S) \Longrightarrow (G \Longleftrightarrow A),\\ \varphi_2 &:= G \Longrightarrow (\neg S),\\ \varphi_3 &:= A \Longrightarrow (\neg G).\end{aligned}$$

Die Folgerung lautet dann $\neg G$.
Der oben angegebene Schluß ist korrekt, da

$$\varphi := (\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3) \Longrightarrow (\neg G)$$

eine Tautologie ist, was man z.B. mit Hilfe einer Wahrheitswertetabelle nachprüfen kann:

S	G	A	φ_1	φ_2	φ_3	$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$	$\neg G$	φ
0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	0	0	0	0	1

Etwas schneller zum Beweis kommt man durch folgende Überlegung:
Angenommen, es gibt $s, g, a \in \{0, 1\}$ mit

$$(((\neg s \Longrightarrow (g \Longleftrightarrow a)) \wedge (g \Longrightarrow \neg s) \wedge (a \Longrightarrow \neg g)) \Longrightarrow \neg g) = 0.$$

Dann gilt $(\neg s \Longrightarrow (g \Longleftrightarrow a)) \wedge (g \Longrightarrow \neg s) \wedge (a \Longrightarrow \neg g) = 1$ und $\neg g = 0$.
Folglich haben wir $g = 1$ und

$$(\neg s \Longrightarrow (g \Longleftrightarrow a)) = (g \Longrightarrow \neg s) = (a \Longrightarrow \neg g) = 1.$$

Aus $(g \Longrightarrow \neg s) = 1$ und $g = 1$ folgt dann $s = 0$. Wegen $(\neg s \Longrightarrow (g \Longleftrightarrow a)) = 1$ folgt hieraus $g = a = 1$. Die Gleichung $(a \Longrightarrow \neg g) = 1$ liefert dann den Widerspruch $g = 0$.

Aufgabe 1.67 *(Lösen einer Aufgabe mittels Aussagenlogik)*
Ein Polizeibericht enthält folgende Informationen über einen Einbruchs:
Der/Die Täter ist/sind mit Sicherheit unter den drei Personen A, B, C zu finden.
Wenn A und B nicht beide zugleich am Einbruch beteiligt waren, scheidet C als Täter aus.
Ist B schuldig oder C unschuldig, so kommt A als Täter nicht in Frage.
Wer hat den Einbruch begangen?

Lösung. Wir benutzen die folgenden Bezeichnungen für die angegebenen Aussagen:

X: *A ist Täter*,
Y: *B ist Täter*,
Z: *C ist Täter.*

Der oben angegebene Polizeibericht läßt sich dann in der Form

$$\varphi := (X \vee Y \vee Z) \wedge (\overline{X \wedge Y} \Longrightarrow \overline{Z}) \wedge ((Y \vee \overline{Z}) \Longrightarrow \overline{X}) = 1$$

aufschreiben. Mit Hilfe einer Wahrheitswertetabelle prüft man leicht nach, daß diese Gleichung nur für $X = Z = 0$ und $B = 1$ gilt:

X	Y	Z	$X \vee Y \vee Z$	$\overline{X \wedge Y} \Longrightarrow \overline{Z}$	$(Y \vee \overline{Z}) \Longrightarrow \overline{X}$	φ
0	0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	0	0

Also ist B der Täter.

Aufgabe 1.68 *(Übersetzen von umgangssprachlichen Sätzen in die Sprache der Aussagenlogik)*

Man überführe den folgenden Satz in einen aussagenlogischen Term und untersuche, unter welchen Umständen das Verhalten eines Teilnehmers an der Klausur nach dieser Formulierung korrekt ist:

> A: *Zugelassene Hilfsmittel bei der Klausur sind Vorlesungsmitschriften oder das Buch zur Vorlesung.*

Lösung. Wir formalisieren die Aussage A mit Hilfe von

> V: *Die Vorlesungsmitschrift wird vom Studenten benutzt.*,
> B: *Das Buch zur Vorlesung wird vom Studenten benutzt.*

in der Form

$$A(V, B) = 1 \iff \text{das Verhalten des Studenten ist korrekt.}$$

Der Ausdruck $A(V, B) = V \vee B$ ist falsch, da $A(0, 0) = 0$ und dies sicher nicht dem Anliegen von A entspricht. Richtig ist dagegen:

$$A(V, B) = (V \wedge B) \vee (V \wedge (\neg(B)) \vee ((\neg V) \wedge B) \vee ((\neg(V) \wedge (\neg(B)).$$

Was ist aber, wenn der Student einen Laptop oder ein Buch ($\neq$ Buch zur Vorlesung) benutzt? Im Sinne der mathematischen Logik handelt er trotzdem korrekt, da obiges A eine Tautologie ist. Um dies zu vermeiden, muß A ergänzt werden durch:

Weitere Hilfsmittel sind nicht erlaubt.

Formal benötigen wir also noch

H: *Ein weiteres Hilfsmittel wird benutzt.*

und erhalten

$$A(V, B, H) = 1 \iff \neg H.$$

Aus rechtslogischer Sicht sieht dies etwas anders aus:

> § 133 BGB:
>
> „Bei der Auslegung ist der wirkliche Wille zu erforschen und nicht an dem buchstäblichen Sinne des Ausdrucks zu haften.“

Ein Jurist würde in obiger Aussage außerdem das *oder* im Sinne von *entweder–oder* interpretieren. Ist unser aussagenlogisches *oder* gemeint, so würde ein Jurist anstelle von A die Aussage A': „*Zugelassene Hilfsmittel bei einer Klausur sind Vorlesungsmitschriften und das Buch zur Vorlesung.*“ verwenden.

Aufgabe 1.69 *(Übersetzen von umgangssprachlichen Sätzen in die Sprache der Aussagenlogik)*

Gegeben seien die Aussagen

A_1: *Die Sonne scheint.*
A_2: *Ein Auftrag liegt vor.*
A_3: *Miss Peel übt Karate.*
A_4: *Miss Peel besucht Mr. Steed.*
A_5: *Mr. Steed spielt Golf.*
A_6: *Mr. Steed luncht mit Miss Peel.*

Mit Hilfe der Aussagen $A_1, ..., A_6$ und Aussagenverbindungen stelle man die folgenden Aussagen dar.

A: *Wenn die Sonne scheint, spielt Mr. Steed Golf.*
B: *Wenn die Sonne nicht scheint und kein Auftrag vorliegt, luncht Mr. Steed mit Miss Peel.*
C: *Entweder übt Miss Peel Karate oder sie besucht Mr. Steed.*
D: *Miss Peel übt Karate genau dann, wenn Mr. Steed Golf spielt – oder ein Auftrag liegt vor.*
E: *Entweder scheint die Sonne und Mr. Steed spielt Golf – oder Miss Peel besucht Mr. Steed und dieser luncht mit ihr.*
F: *Es trifft nicht zu, daß Miss Peel Mr. Steed besucht, wenn ein Auftrag vorliegt.*
G: *Nur dann, wenn kein Auftrag vorliegt, luncht Mr. Steed mit Miss Peel.*

Lösung. Z.B. kann man die obigen Aussagen wie folgt darstellen:
$A = (A_1 \Longrightarrow A_5)$,

$B = ((\neg A_1 \wedge \neg A_2) \Longrightarrow A_6)$,

$C = ((A_3 \wedge \neg A_4) \vee (\neg A_3 \wedge A_4))$,

$D = ((A_3 \Longleftrightarrow A_5) \vee A_2)$,

$E = (((A_1 \wedge A_5) \wedge \neg(A_4 \wedge A_6)) \vee (\neg(A_1 \wedge A_5) \wedge (A_4 \wedge A_6)))$,

$F = (\neg(A_2 \Longrightarrow A_4))$,

$G = (A_6 \Longrightarrow \neg A_2)$.

Aufgabe 1.70 *(Interpretation von aussagenlogischen Formeln)*

Man gebe für jede der folgenden Äquivalenzen eine sprachliche (verbale) Interpretation anhand eines Beispiels an!

(a) $(x \wedge x) \Longleftrightarrow x$,
(b) $(\neg\neg x) \Longleftrightarrow x$,
(c) $(\neg(x \wedge y)) \Longleftrightarrow (\neg x \vee \neg y)$,
(d) $(\neg x \vee y) \Longleftrightarrow (x \Longrightarrow y)$,

(e) $(x \wedge (x \vee y)) \Longleftrightarrow x$,
(f) $((x \Longrightarrow y) \wedge (y \Longrightarrow x)) \Longleftrightarrow (x \Longleftrightarrow y)$.

Lösung. (a): Linke Seite: „Es regnet und regnet.“. Rechte Seite: „Es regnet“.

(b): L.S.: „Eva ist nicht unbegabt.“, R.S.: „Eva ist begabt.“

(c): L.S.: „Es trifft nicht zu, daß Adam raucht und trinkt“, R.S.: „Adam raucht nicht oder Adam trinkt nicht“.

(d): L.S.: „Das Haus ist nicht neu oder groß.“, R.S.: „Wenn das Haus neu ist, dann ist es auch groß.“

(e): L.S.: „20 ist durch 10 teilbar und 20 ist durch 10 oder 2 teilbar.“, R.S.: „20 ist durch 10 teilbar.“

(f): L.S.: „Wenn zwei Mengen äquivalent sind, dann haben sie die gleiche Mächtigkeit – und wenn sie die gleiche Mächtigkeit haben, dann sind sie äquivalent.“, R.S.: „Zwei Mengen sind genau dann äquivalent, wenn sie die gleiche Mächtigkeit haben.“

Aufgabe 1.71 *(Beschreibung von Booleschen Funktionen durch unterschiedliche Formeln)*

Die Booleschen Funktionen f bzw. g seien durch

$$f(x,y) := (\overline{x} \Rightarrow \overline{y}) \wedge (\overline{x} \vee y)$$

bzw.

$$g(x,y,z) := (x \Leftrightarrow \overline{z}) + y$$

definiert.

(a) Man gebe die Wertetabellen und die disjunktiven Normalformen von f und g an.
(b) Wie läßt sich f nur unter Verwendung der Zeichen $\wedge$ und $^-$ darstellen?

Lösung. **(a):**

x	y	$f(x,y)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x	y	z	$g(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Die disjunktiven Normalformen dieser Funktionen sind:

$$f(x,y) = (\overline{x} \wedge \overline{y}) \vee (x \wedge y),$$
$$g(x,y,z) = (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge \overline{z}) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}) \vee (x \wedge y \wedge z).$$

(b): $f(x,y) = \overline{\overline{(\overline{x} \wedge \overline{y})} \wedge \overline{(x \wedge y)}}$.

Aufgabe 1.72 *(Vereinfachung Boolescher Terme)*

Man vereinfache mit Hilfe der algebraischen Methode die folgenden Booleschen Terme:

(a) $t_1(x,y) := ((x \wedge y) \vee (x \wedge \overline{y})) \vee (\overline{x} \vee y)$,
(b) $t_2(x,y,z) := \overline{((x \vee y) \vee z) \wedge (\overline{x} \vee z)}$,
(c) $t_3(x,y,z) := \overline{(x \wedge (y \wedge z)) \vee (\bar{x} \wedge (\bar{y} \wedge \bar{z})) \vee ((x \vee \bar{y}) \wedge (x \vee \bar{z}))}$,
(d) $t_4(x,y,z,u) := ((\overline{(x \wedge y) \vee \bar{z}}) \vee \overline{((\bar{x} \wedge \bar{z}) \vee (\overline{\bar{y} \wedge u}))})$.

Lösung. (a): $t_1(x,y) = 1$,
(b): $t_2(x,y,z) = \overline{(y \wedge \overline{x}) \vee z} = (\overline{y} \vee x) \wedge \overline{z}$,
(c): $t_3(x,y,z) = \overline{x} \wedge (y \vee z)$,
(d): $t_4(x,y,z,u) = (\overline{x} \wedge z) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge u) \vee (\overline{y} \wedge z)$.

Aufgabe 1.73 *(Tautologien, Kontradiktionen, Kontingenzen)*

Eine Aussage, deren Negation eine Tautologie ist, heißt *Kontradiktion.* Eine Aussage, die weder eine Tautologie noch eine Kontradiktion ist, nennt man *Kontingenz.* Man entscheide anhand von Wahrheitstafeln, welche der folgenden Aussagen Tautologien, Kontradiktionen oder Kontingenzen sind.

(a) $(x \Longrightarrow (y \Longrightarrow z)) \Longleftrightarrow ((x \Longrightarrow y) \Longrightarrow z)$,
(b) $((x \wedge z) \vee (y \wedge \overline{z})) \Longleftrightarrow ((x \wedge \overline{z}) \wedge (y \vee z))$,
(c) $((x \wedge y) \vee (x \wedge \overline{y})) \vee (\overline{x} \wedge y)$,
(d) $(x \wedge \overline{x}) \wedge ((y \vee \overline{y}) \Longrightarrow z)$,
(e) $(x \Longrightarrow (y \Longrightarrow z)) \Longrightarrow ((x \wedge y) \Longrightarrow z)$,
(f) $(x \vee \overline{x}) \wedge ((y \wedge \overline{y}) \Longrightarrow z)$.

Lösung. Tautologien sind (e) und (f). Nur(d) ist eine Kontradiktion. Kontingenzen sind (a), (b) und (c).

Aufgabe 1.74 *(Vereinfachung Boolescher Terme)*

Für Abstimmungen in einem vierköpfigen Gremium gelten folgende Regeln: Stimmenthaltung unzulässig; die Abstimmung erfolgt dadurch, daß jedes Mitglied des Gremiums einen bei seinem Platz angebrachten Schalter in eine der beiden möglichen Stellungen „Ja“ oder „Nein“ bringt. Ein grünes Licht leuchtet bei Annahme eines Antrags auf, ein rotes bei Ablehnung. Bei Stimmengleichheit leuchten beide Lichter auf. Man erstelle die disjunktiven Normalformen der beiden Stromführungsfunktionen und vereinfache diese.

Lösung. Bezeichne g die Stromführungsfunktion für die grüne Lampe und bezeichne r die Funktion für die rote Lampe. Dann gilt:

x	y	z	u	$g(x,y,z,u)$	$r(x,y,z,u)$
0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0
1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	1	0
1	1	1	0	1	0
1	1	1	1	1	0

Die disjunktiven Normalformen der Funktionen g und r lauten folglich (unter Verwendung der Schreibweise xy anstatt $x \wedge y$ und der Vereinbarung, daß $\wedge$ stärker bindet als $\vee$)

$$\begin{aligned} g(x,y,z,u) \;=\; & \overline{x}\,\overline{y}zu \vee \overline{x}y\overline{z}u \vee \overline{x}yz\overline{u} \vee \overline{x}yzu \vee x\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{u} \vee x\overline{y}z\overline{u} \vee x\overline{y}zu \\ & \vee xy\overline{z}\,\overline{u} \vee xy\overline{z}u \vee xyz\overline{u} \vee xyzu \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} r(x,y,z,u) \;=\; & \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{u} \vee \overline{x}\,\overline{yz}u \vee \overline{x}\,\overline{y}z\overline{u} \vee \overline{x}\,\overline{y}zu \vee \overline{x}y\overline{z}\,\overline{u} \vee \overline{x}y\overline{z}u \vee \overline{x}yz\overline{u} \\ & \vee x\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{u} \vee x\overline{y}\,\overline{z}u \vee x\overline{y}z\overline{u} \vee xy\overline{z}\,\overline{u}. \end{aligned}$$

Vereinfachen lassen sich obige Darstellungen für die Funktionen g und r nach dem in Abschnitt 1.6 angegebenen Verfahren.
Zunächst für g:

1. geordnete Liste:

1.	$xyzu$
2.	$xyz\overline{u}$
3.	$xy\overline{z}u$
4.	$x\overline{y}zu$
5.	$\overline{x}yzu$
6.	$\overline{x}\,\overline{y}zu$
7.	$\overline{x}y\overline{z}u$
8.	$\overline{x}yz\overline{u}$
9.	$x\overline{y}\,\overline{z}u$
10.	$x\overline{y}z\overline{u}$
11.	$xy\overline{z}\,\overline{u}$

1. Zusammenfassung:

1., 2.	xyz
1., 3.	xyu
1., 4.	xzu
1., 5.	yzu
2., 8.	$yz\overline{u}$
2., 10.	$xz\overline{u}$
2., 11.	$xy\overline{u}$
3., 7.	$y\overline{z}u$
3., 9.	$x\overline{z}u$
3., 11.	$xy\overline{z}$
4., 6.	$\overline{y}zu$
4., 9.	$x\overline{y}u$
4., 10.	$x\overline{y}z$
5., 6.	$\overline{x}zu$
5., 7.	$\overline{x}yu$
5., 8.	$\overline{x}yz$

2. geordnete Liste:

1.	xyz
2.	$xy\overline{z}$
3.	$x\overline{y}z$
4.	$\overline{x}yz$
5.	xyu
6.	$xy\overline{u}$
7.	$x\overline{y}u$
8.	$\overline{x}yu$
9.	xzu
10.	$xz\overline{u}$
11.	$x\overline{z}u$
12.	$\overline{x}zu$
13.	yzu
14.	$yz\overline{u}$
15.	$y\overline{z}u$
16.	$\overline{y}zu$

2. Zusammenfassung:

1., 2.	xy
1., 3.	xz
1., 4.	yz
5., 6.	xy
5., 7.	xu
5., 8.	yu
9., 10.	xz
9., 11.	xu
9., 12.	zu

Da keine weiteren Zusammenfassungen mehr möglich sind, erhalten wir

$$g(x,y,z,u) = xy \vee xz \vee yz \vee xu \vee yu \vee zu.$$

Analog läßt sich nun die Beschreibung von r vereinfachen:

1. geordnete Liste:

1.	$xy\overline{z}\,\overline{u}$
2.	$x\overline{y}z\overline{u}$
3.	$\overline{x}yz\overline{u}$
4.	$x\overline{y}\,\overline{z}u$
5.	$\overline{x}y\overline{z}u$
6.	$\overline{x}\,\overline{y}zu$
7.	$x\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{u}$
8.	$\overline{x}y\overline{z}\,\overline{u}$
9.	$\overline{x}\,\overline{y}z\overline{u}$
10.	$\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}u$
11.	$\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{u}$

1. Zusammenfassung:

1., 7.	$x\overline{z}\,\overline{u}$
1., 8.	$y\overline{z}\,\overline{u}$
2., 7.	$x\overline{y}\,\overline{u}$
2., 9.	$\overline{y}z\overline{u}$
3., 8.	$\overline{x}y\overline{u}$
3., 9.	$\overline{x}z\overline{u}$
4., 7.	$x\overline{y}\,\overline{z}$
4., 10.	$\overline{y}\,\overline{z}u$
5., 8.	$\overline{x}y\overline{z}$
5., 10.	$\overline{x}\,\overline{z}u$
6., 9.	$\overline{x}\,\overline{y}z$
6., 10.	$\overline{x}\,\overline{y}u$
7., 11.	$\overline{y}\,z\,\overline{u}$
8., 11.	$\overline{x}\,\overline{z}\,\overline{u}$
9., 11.	$\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{u}$
10., 11.	$\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$

2. geordnete Liste:

1.	$x\overline{y}\,\overline{z}$
2.	$\overline{x}y\overline{z}$
3.	$\overline{x}\,\overline{y}z$
4.	$\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$
5.	$x\overline{y}\,\overline{u}$
6.	$\overline{x}\,y\,\overline{u}$
7.	$\overline{x}\,\overline{y}\,u$
8.	$\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{u}$
9.	$y\overline{z}\,\overline{u}$
10.	$\overline{y}z\overline{u}$
11.	$\overline{y}\,\overline{z}u$
12.	$\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{u}$
13.	$x\overline{z}\,\overline{u}$
14.	$\overline{x}z\overline{u}$
15.	$\overline{x}\,\overline{z}u$
16.	$\overline{x}\,\overline{z}\,\overline{u}$

2. Zusammenfassung:

1., 4.	$\overline{y}\,\overline{z}$
2., 4.	$\overline{x}\,\overline{z}$
3., 4.	$\overline{x}\,\overline{y}$
5., 8.	$\overline{y}\,\overline{u}$
6., 8.	$\overline{x}\,\overline{u}$
7., 8.	$\overline{x}\,\overline{y}$
9., 12.	$\overline{z}\,\overline{u}$
10., 12.	$\overline{y}\,\overline{u}$
11., 12.	$\overline{y}\,\overline{z}$
13., 16.	$\overline{z}\,\overline{u}$
14., 16.	$\overline{x}\,\overline{u}$
15., 16.	$\overline{x}\,\overline{z}$

Da weitere Zusammenfassungen nicht mehr möglich sind, erhalten wir

$$r(x,y,z,u) = \overline{x}\,\overline{y} \vee \overline{x}\,\overline{z} \vee \overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{u} \vee \overline{y}\,\overline{u} \vee \overline{z}\,\overline{u}.$$

Man prüft leicht nach, daß in den verkürzten Darstellungen für g und r keine Konjunktionen weggelassen werden können.

Aufgabe 1.75 *(Eigenschaften Boolescher Funktionen)*
Eine n-stellige Boolesche Funktion f heißt *selbstdual* (oder *autodual*), wenn für alle $x_1, ..., x_n \in \{0, 1\}$ gilt:

$$f(x_1, ..., x_n) = \overline{f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n})}.$$

Eine n-stellige Boolesche Funktion f heißt *linear*, wenn es gewisse $a_0, a_1, ..., a_n \in \{0, 1\}$ gibt, so daß

$$f(x_1, ..., x_n) = a_0 + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + ... + a_n \cdot x_n \pmod 2$$

für alle $x_1, ..., x_n \in \{0, 1\}$ gilt.
Eine n-stellige Boolesche Funktion f heißt *monoton*, wenn

$$\begin{gathered}\forall a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n \in \{0, 1\} : \\ ((\forall i \in \{1, 2, ..., n\} : a_i \leq b_i) \implies (f(a_1, ..., a_n) \leq f(b_1, ..., b_n)))\end{gathered}$$

gilt.

(a) Wie viele selbstduale ein- oder zweistellige Boolesche Funktionen gibt es?
(b) Wie viele lineare ein- oder zweistellige Boolesche Funktionen gibt es?
(c) Wie viele monotone ein- oder zweistellige Boolesche Funktionen gibt es?
(d) Man beweise: Eine lineare n-stellige Boolesche Funktion f mit

$$f(x_1, ..., x_n) = a_0 + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + ... + a_n \cdot x_n \pmod 2$$

ist genau dann selbstdual, wenn

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = 1 \pmod 2$$

gilt.
(e) Man beweise: Eine lineare, n-stellige Boolesche Funktion f der Form

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) := a_0 + x_1 + x_2 + a_3 \cdot x_3 + ... + a_n \cdot x_n,$$

wobei $a_0, a_3, a_4, ..., a_n \in \{0, 1\}$, ist nicht monoton.
(f) Welche der folgenden Booleschen Funktionen sind selbstdual, welche Funktionen sind linear und welche Funktionen sind monoton?
- $f_1(x, y, z) := (x \iff y) \iff z$,
- $f_2(x, y, z) := (x \implies y) \implies z$,
- $f_3(x, y, z) := (x \iff y) + z$,
- $f_4(x, y, z) := (x + y) \iff z$,
- $f_5(x, y, z) := (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$.

Lösung. In den folgenden drei Tabellen sind die möglichen ein- und zweistelligen Booleschen Funktionen angegeben:

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

.

x	y	$g_1(x,y)$	$g_2(x,y)$	$g_3(x,y)$	$g_4(x,y)$	$g_5(x,y)$	$g_6(x,y)$	$g_7(x,y)$	$g_8(x,y)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

.

x	y	$h_1(x,y)$	$h_2(x,y)$	$h_3(x,y)$	$h_4(x,y)$	$h_5(x,y)$	$h_6(x,y)$	$h_7(x,y)$	$h_8(x,y)$
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

.

(a)–(c): Von den oben angegebenen Funktionen sind genau
6 selbstdual: $f_3, f_4, g_4, g_6, h_3, h_5$;
12 linear: $f_1, f_2, f_3, f_4, g_1, g_4, g_6, g_7, h_2, h_3, h_5, h_6$;
9 monoton: $f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_4, g_6, g_8, h_8$.

(d): Es sei $f(x_1, ..., x_n) := a_0 + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + ... + a_n \cdot x_n \pmod 2$ und $f_\star(x_1, ..., x_n) := \overline{f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n})}$. Wegen $\overline{x} = x + 1 (\mathrm{mod}\, 2)$ haben wir

$$\begin{aligned} & f_\star(x_1, ..., x_n) \\ = \; & (a_0 + a_1 \cdot (x_1 + 1) + ... + a_n \cdot (x_n + 1)) + 1 \pmod 2 \\ = \; & 1 + a_0 + a_1 + ... + a_n + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + ... + a_n \cdot x_n \pmod 2 \\ = \; & 1 + a_1 + a_2 + ... + a_n + f(x_1, ..., x_n) \pmod 2. \end{aligned}$$

Folglich gilt:

$$f = f_\star \iff a_1 + a_2 + ... + a_n = 1 \pmod 2.$$

(e): Sei $f(x_1, x_2, ..., x_n) := a_0 + x_1 + x_2 + a_3 \cdot x_3 + ... + a_n \cdot x_n \pmod 2$. Dann gilt $f(\overline{a_0}, 0, 0, ..., 0) = 1$ und $f(\overline{a_0}, 1, 0, ..., 0) = 0$, womit f nicht monoton ist.

(f): Wegen $f_1(x, y, z) = x + y + z \pmod 2$ ist f_1 selbstdual und linear, jedoch nicht monoton.
Anhand einer Wertetabelle von f_2 oder mittels $f_2(x, y, z) = (x \vee y \vee z) + (x \wedge y \wedge \overline{z})$ prüft man leicht nach, daß f_2 nicht selbstdual, nicht linear und auch nicht monoton ist.
Wegen $x \iff y = x + y + 1 \pmod 2$ gilt $f_3(x, y, z) = f_4(x, y, z) = x + y + z + 1 \pmod 2$, womit f_3 und f_4 linear, selbstdual und nicht monoton sind.
Die Funktion f_5 ist selbstdual, monoton, jedoch nicht linear. □

Prädikatenlogik erster Stufe

Aufgabe 1.76 *(Prädikat)*
Sei M eine nichtleere Menge und R eine reflexive und symmetrische Relation auf M. Man gebe das durch R induzierte zweistelliges Prädikat P auf M an. Wie überträgt sich die Reflexivität und die Symmetrie von R auf P?

Lösung. Nach Definition ist P eine Abbildung von M^2 in $\{0,1\}$ mit $P(x,y) = 1$ genau dann, wenn $(x,y) \in R$ gilt. Da R reflexiv ist, gilt $P(x,x) = 1$ für alle $x \in M$. Aus der Symmetrie von R folgt $P(y,x) = 1$, falls $P(x,y) = 1$.

Aufgabe 1.77 *(Beispiel einer wahren Formel in einer Struktur)*
Es sei $\mathfrak{A}$ eine Struktur, zu der eine einstellige Operation $f : A \longrightarrow A$, die bijektiv ist, und eine zweistellige Relation $R := \{(a,a)\,|a \in A\}$ gehört. Man beschreibe die Eigenschaft „f ist bijektiv“ durch eine prädikatenlogischen Formel, die in $\mathfrak{A}$ wahr ist.

Lösung. Es sei P das durch R induzierte Prädikat. Die folgende Formel ist in der Struktur $\mathfrak{A}$ wahr, da f bijektiv (d.h., injektiv und surjektiv) ist:

$$((\forall x_1(\forall x_2(P(f(x_1), f(x_2))))) \Longrightarrow P(x_1, x_2))) \wedge (\forall x_3(\exists x_4 P(f(x_4), x_3))).$$

Aufgabe 1.78 *(Äquivalenz von Formeln)*
Man beweise, daß für beliebige $\alpha, \beta \in FORM$ die folgenden Äquivalenzen nicht gelten:
(a) $(\forall x_k\, \alpha) \vee (\forall x_k\, \beta) \equiv \forall x_k(\alpha \vee \beta)$,
(b) $(\exists x_k\, \alpha) \wedge (\exists x_k\, \beta) \equiv \exists x_k(\alpha \wedge \beta)$.

Lösung. Wir setzen $x := x_k$, $A := \{a,b\}$, $a \neq b$, $\alpha := P(x)$ und $\beta := \neg P(x)$, wobei $P(a) := 1$ und $P(b) := 0$. In der Struktur $\mathfrak{A}$ mit dem Prädikat P gilt dann für beliebiges $u : A \longrightarrow \{0,1\}$:

$$v_{\mathfrak{A},u}((\forall x\, P(x)) \vee (\forall x(\neg P(x))) = (P(a) \wedge P(b)) \vee ((\neg P(a)) \wedge (\neg P(b))) = 0 \neq$$
$$v_{\mathfrak{A},u}(\forall x\, (P(x) \vee (\neg P(x)))) = (P(a) \vee (\neg P(a))) \wedge (P(b) \vee (\neg P(b))) = 1.$$

Folglich ist die Formel (a) nicht allgemeingültig. Analog zeigt man, daß auch (b) nicht allgemeingültig ist.

Aufgabe 1.79 *(Erfüllbare und allgemeingültige Formeln)*
Bei der Beschreibung der nachfolgenden Formeln aus $FORM$ sind $\alpha, \beta \in FORM$, $\{x,y,z\} \subseteq Var$ und das Operationszeichen f wie auch das Prädikatzeichen P zweistellig. Welche der folgenden Formeln aus $FORM$ sind dann

erfüllbar und welche sind allgemeingültig?
(a) $P(x,y) \wedge P(y,x)$,
(b) $\forall x\, \forall y\, \forall z\, P(f(f(x,y),z), f(x,f(y,z)))$,
(c) $(\forall x\, P(x,z)) \Longrightarrow (\forall y\, (P(y,z))$,
(d) $\neg((\neg(\exists x\, \alpha)) \Longrightarrow (\forall x(\neg\alpha)))$,
(e) $\neg((\exists x\, \alpha) \vee (\forall y\, \beta)) \Longleftrightarrow ((\forall x\, \neg\alpha) \wedge (\forall y\, \neg\beta))$

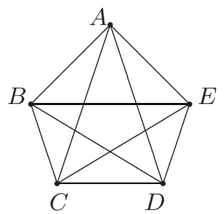
Lösung. (a) und (b) sind nicht allgemeingültig. (a) ist offenbar in einer Struktur, in der dem Prädikat P eine symmetrische Relation entspricht, erfüllbar. (b) ist z.B. erfüllbar in einer Struktur $\mathfrak{A}$ mit einer zweistelligen assoziativen Operation f und einer dem Prädikat P zugeordneten Relation $R := \{(x,x) \,|\, x \in A\}$.
(c) ist allgemeingültig, da $v_{\mathfrak{A},u}(\forall x\, P(x,z)) = v_{\mathfrak{A},u}(\forall y\, P(y,z))$ für beliebige $\mathfrak{A}$ und u gilt.
(d): Wegen $\neg(\exists\, \alpha) \equiv \forall x(\neg\alpha)$ gilt $v_{\mathfrak{A},u}((\neg(\exists x\, \alpha)) \Longrightarrow (\forall x(\neg\alpha))) = 1$, womit (d) unerfüllbar ist.
(e) ist allgemeingültig, was sich mit Hilfe von $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv (\neg\alpha) \wedge (\neg\beta)$ und Satz 1.6.3, (a) leicht beweisen läßt. □

Graphen

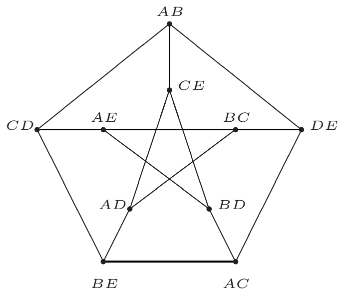
Aufgabe 1.80 *(Anwendung von Graphen)*

Geplant ist ein Tischtennisturnier mit den 5 Teilnehmern A, B, C, D, E und nur einer Tischtennisplatte. Außerdem soll gelten:
(1.) Jeder Teilnehmer spielt gegen jeden anderen genau einmal,
(2.) kein Teilnehmer spielt in zwei aufeinanderfolgenden Spielen.
Mittels Graphen kläre man, ob ein solches Tischtennisturnier möglich ist.

Lösung. Die Teilnehmer des Turniers kann man als Knoten eines Graphen auffassen und eine Kante zwischen zwei Knoten x und y gibt an, daß x und y miteinander spielen. Wegen Bedingung (1.) erhalten wir:



Folglich muß das Turnier aus 10 Spielen bestehen.
Zu Veranschaulichung von (2.) kann man einen Graphen verwenden, dessen Knoten die Spiele sind und eine Kante zwei Knoten genau dann verbindet, wenn sie keine gemeinsamen Spieler haben:



Die Linie, die die folgenden Knoten

$$AB, CD, BE, AC, DE, BC, AE, BD, CE, AD$$

verbindet, gibt dann eine Lösung für die Bedingungen (1.) und (2.) an.

Aufgabe 1.81 *(Anzahl von Graphen mit gewissen Eigenschaften)*
Man gebe die Menge aller Bäume mit der Knotenmenge $\{1, 2, 3, 4\}$ an und zerlege diese Menge in Klassen bez. Isomorphie, d.h., man entscheide, welche der Bäume untereinander isomorph sind.

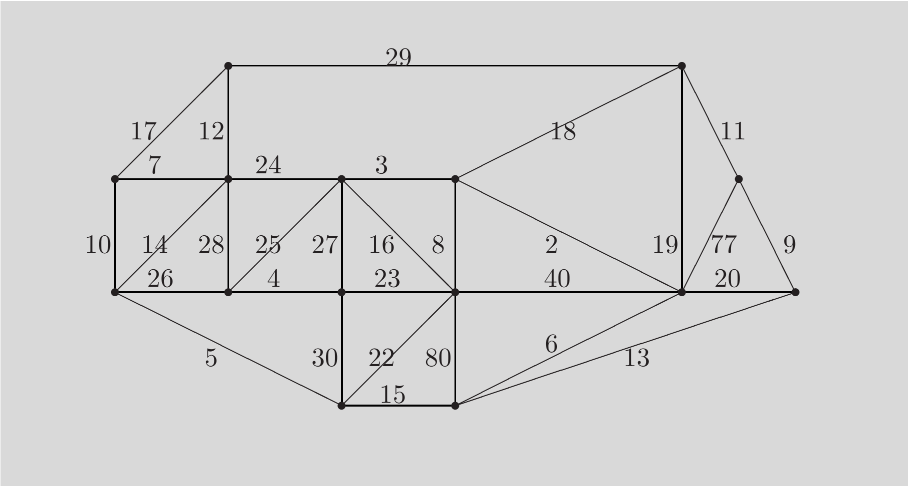
Lösung. Bäume sind zusammenhängende Graphen ohne Kreise. Haben diese Graphen genau 4 Knoten($\in \{1, 2, 3, 4\}$), so gibt es, falls die Knoten noch nicht bezeichnet sind, genau zwei Möglichkeiten:

Damit ist

$$\begin{aligned} B \;:=\; & \{\, (\{1,2,3,4\}, \{\, \{a,b\}, \{b,c\}, \{c,d\} \,\}) \mid \{a,b,c,d\} = \{1,2,3,4\} \,\} \\ & \cup \{\, (\{1,2,3,4\}, \{\, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\} \,\}) \mid \{a,b,c,d\} = \{1,2,3,4\} \,\} \end{aligned}$$

die Menge aller Bäume mit der Knotenmenge $\{1, 2, 3, 4\}$, die oben auch bereits in zwei Klassen untereinander isomorpher Graphen zerlegt wurde.

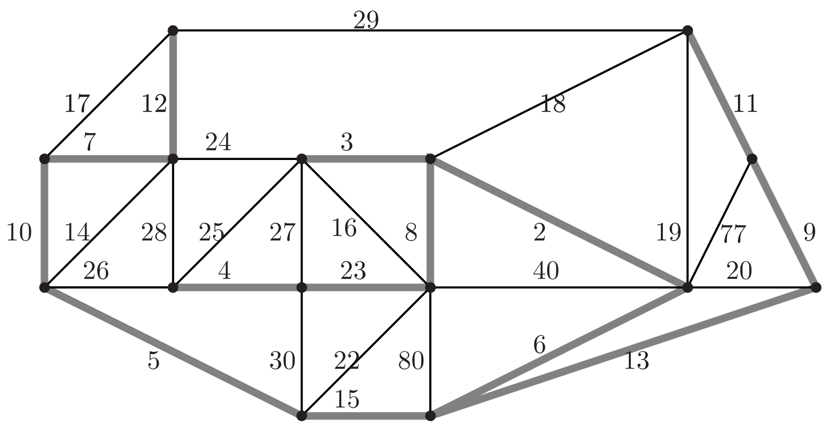
Aufgabe 1.82 *(Bestimmen eines Minimalgerüstes eines Graphen)*
Mit Hilfe der im Abschnitt 1.7 beschriebenen zwei Verfahren ermittle man ein Minimalgerüst für folgenden Graphen (Zwischenschritte angeben!).



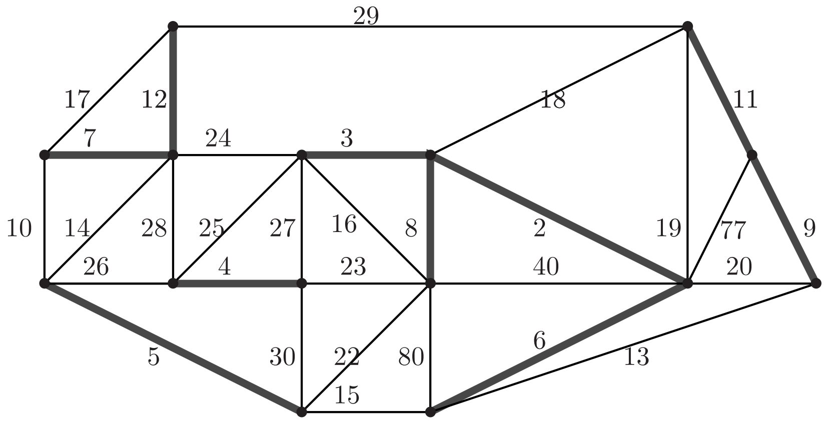
Lösung. Das erste Verfahren liefert eine Folge von Kanten mit den Bewertungen

2, 3, 6, 8, 13, 9, 11, 15, 5, 10, 7, 12, 23, 4,

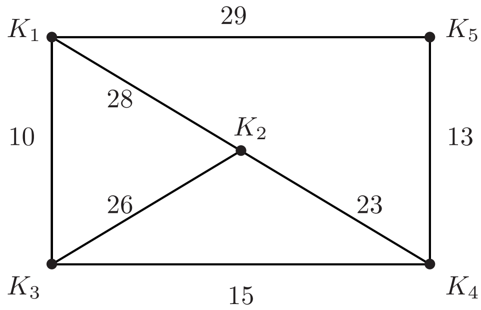
die das folgende Minimalgerüst charakterisieren:



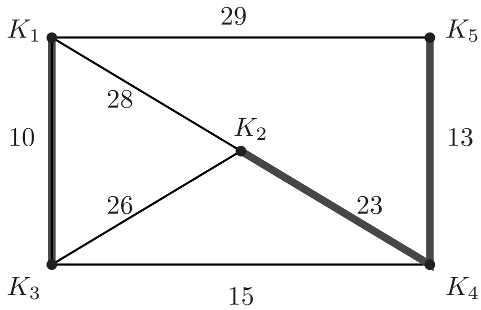
Das **zweite Verfahren** liefert im ersten Schritt den (nachfolgend mit stärkerer Strichdicke gezeichneten) Teilgraphen G_1 von G, der aus den Komponenten K_1 (2 Kanten mit den Bewertungen 7 und 12), K_2 (Kante mit der Bewertung 4), K_3 (Kante mit der Bewertung 5), K_4 (4 Kanten) und K_5 (2 Kanten mit den Bewertungen 11 und 9) besteht:



Führt man dann den im zweiten Verfahren beschriebenen zweiten Schritt durch, erhält man:



Wiederholt man für den obigen Graphen G_2 den Schritt 1, so erhält man einen gewissen Teilgraphen G_3 von G_2, dessen Kanten nachfolgend fett gezeichnet sind:



Da der Graph mit den fett gezeichneten Kanten nicht zusammenhängend ist, hat man für obigen Graphen nochmals Schritt 1 und dann Schritt 2 durchzuführen. Man erhält

Da der obige Graph zusammenhängend und kreislos ist, sind wir fertig. Die Vereinigung der fett gezeichneten Kanten liefert nämlich ein Minimalgerüst des Ausgangsgraphen G, das mit dem Gerüst aus dem ersten Verfahren übereinstimmt.