1

Mathematische Grundbegriffe

1.1 Logische Zeichen

In vielen mathematischen Gebieten hat es sich als zweckmäßig erwiesen, bestimmte Formulierungen durch Verwendung *logischer Zeichen* zu formalisieren. Nachfolgend sind die von uns verwendeten wichtigsten Symbole in einer Tabelle zusammengefaßt:

Zeichen	Lesart
$\wedge$	und
$\vee$	oder
$\neg$	nicht
$\Longrightarrow$	wenn - dann; daraus folgt
$\Longleftrightarrow$	genau dann, wenn
$:=$	definitionsgleich
$:\Longleftrightarrow$	definitionsgemäß äquivalent
$\exists$	es existiert (mindestens) ein
$\exists!$	es existiert genau ein
$\forall$	für alle

Das Zeichen := benutzen wir, um z.B. die Bezeichnung A durch eine Formel φ zu erklären, wobei dann $A := \varphi$ geschrieben wird. Wird A dagegen durch einen umgangssprachlichen Satz S, der entweder wahr oder falsch ist, erklärt, schreiben wir $A \;:\Longleftrightarrow\; S$.

D. Lau, *Algebra und Diskrete Mathematik 1*, 3. Aufl., Springer-Lehrbuch,
DOI 10.1007/978-3-642-19443-6_1, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011

Um Klammern zu sparen, schreiben wir anstelle von $\exists x\,(\,E\,)$ (gelesen: „Es existiert ein x mit der Eigenschaft E“) kurz $\exists x : E$. Entsprechendes sei für Formeln, die das Zeichen $\forall$ enthalten, vereinbart. Außerdem steht $\forall x\ \exists y\ : ...$ für $\forall x\ (\exists y\,(...))$, usw.
Erste Anwendungen obiger Zeichen folgen im nächsten Abschnitt, so daß wir hier auf Beispiele verzichten können. Die mathematische Theorie zu diesen Zeichen ist Gegenstand der sogenannten *Aussagenlogik* und *Prädikatenlogik*, von denen wir Teile im Abschnitt 1.6 behandeln werden.

1.2 Elemente der Mengenlehre

Wir beginnen mit der Einführung des Mengenbegriffs nach dessen Begründer Georg Cantor[1]:

„Definition“ Eine **Menge** ist jede Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens – welche die **Elemente** dieser Menge genannt werden – zu einem Ganzen.

Das Wort Definition steht hier in Anführungszeichen, da der zu erklärende Begriff *Menge* mittels weiterer, undefinierter Begriffe (z.B. Objekt) erläutert wird. Unter einer echten Definition versteht man dagegen die Erklärung eines neuen Begriffs aus bereits definierten Begriffen. Wir werden weiter unten sehen, daß die obige Definition sehr schnell zu Unklarheiten und sogar zu logischen Widersprüchen (!) führt. Man hat deshalb versucht (bzw. man versucht immer noch), den Mengenbegriff exakter zu fassen. Das ist jedoch letztlich unmöglich, denn irgendwelche Begriffe muß man undefiniert lassen, um die erste Definition einer Theorie angeben zu können. Es ist jedoch gelungen[2], den Mengenbegriff so einzuführen, daß zumindest bis heute keine logischen Widersprüche herleitbar waren. Dieser exakte Weg der Begründung der Mengenlehre kann hier jedoch aus Platzgründen nicht angegeben werden. Wir bleiben also bei der obigen naiven „Definition“, müssen jedoch beim Umgang damit vorsichtig sein. Warum das so ist, wird nach der Angabe einiger Vereinbarungen und Bezeichnungen an zwei Beispielen erläutert.
Zunächst einige **Vereinbarungen**:

[1] Georg Cantor (1845–1918). Er schrieb von 1875 bis 1884 grundlegende Arbeiten zur Mengenlehre und legte damit das Fundament für das moderne Verständnis vom Wesen der Mathematik.
Wer mehr über Cantor und die später noch erwähnten Mathematikern wissen möchte, sei auf [Mes 73], [Wuß-A 89] oder [Wuß 2008] verwiesen. Einen ersten Überblick über die Geschichte der Mathematik mit vielen Verweisen auf weitere Literatur findet man in [Wuß 89]. Historische Anmerkungen zu den in diesem Band behandelten Teilgebieten der Mathematik, die über eine Kurzübersicht hinausgehen, entnehme man [Alt 2003], [Scr-S 2003] und [Bri 83].

[2] Siehe z.B. [Ass 75].

Bezeichnungen für Mengen:	große Buchstaben;
Bezeichnungen für die Elemente der Mengen:	kleine Buchstaben;
Kurzschreibweise für „x ist Element von M“:	$x \in M$;
Kurzschreibweise für „x ist nicht Element von M“:	$x \notin M$.

Eine Menge M kann man (u.a.) auf drei Arten angeben:

(1.) Durch eine (unmißverständliche) verbale Formulierung.

Beispiel M sei die Menge aller im Jahre 2000 an der Rostocker Universität immatrikulierten Studenten.

(2.) Durch Aufzählen (falls möglich) der Elemente $a_1, a_2, \ldots$ der Menge M. Wir schreiben: $M = \{a_1, a_2, \ldots\}$.

(3.) Durch eine charakteristische Eigenschaft E für Objekte aus einer Grundgesamtheit G, die genau den Elementen von M zukommen soll.

Wir schreiben: $M := \{x \mid x \in G \text{ erfüllt } E\}$ oder

$$M := \{x \in G \mid x \text{ erfüllt } E\}.$$

Beispiel $G := \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

(die Menge der natürlichen Zahlen),

$$M := \{x \in G \mid *x \text{ ist eine gerade Zahl}\}.$$

Nun zwei Beispiele zur Erläuterung der Schwierigkeiten mit dem oben definierten Mengenbegriff.

Erstes **Beispiel**

Ist

$$A := \underbrace{\ldots.\{\{\{\{\{\{\{}_{\substack{\text{unendlich}\\ \text{viele}\\ \text{Klammern}}}\ a\ \}\}\}\}\}\}\}\ldots.$$

eine Menge?
Diese Frage ist nach obiger Definition einer Menge nicht zu beantworten. Wer A als Menge akzeptieren will (er muß es nicht!), der hat als nächstes zu klären, ob $A \in A$ gilt.
Zweites **Beispiel**
Sei $M := \{x \mid x \text{ Menge } \wedge\ x \notin x\}$, d.h., M ist die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten. M ist nach obiger „Definition“ offensichtlich eine Menge. Jedoch
aus $M \in M$ folgt $M \notin M$ und
aus $M \notin M$ folgt $M \in M$.
Zitat aus [Lid-P 82]:

„Wie man sich dreht und wendet: es geht nicht – es bleibt uns nur der Strick!“

Das obige zweite Beispiel heißt nach Bertrand Russell (1872–1970) **Russellsches Paradoxon**, obwohl es nicht nur paradox ist, sondern in eine logische Sackgasse führt.

Halten wir also fest:

Vorsicht bei zu großzügiger Mengenbildung! Man vermeide unendlich viele Klammern (d.h., man bilde nur in endlich vielen Schritten aus bekannten Mengen neue Mengen) und definiere nicht so global, wie etwa „M sei die Menge aller Mengen“!

Besonders häufig auftretende Mengen erhalten von uns besondere **Bezeichnungen** und Namen:

$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{P} := \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$	Menge der Primzahlen
$\mathbb{Z} := \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q} := \{x \mid \exists a \in \mathbb{Z}\, \exists b \in \mathbb{N} : x = \frac{a}{b}\}$	Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{R} := \{x \mid x$ ist ein (endlicher oder unendlicher) Dezimalbruch$\}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{C} := \{x \mid \exists a \in \mathbb{R}\, \exists b \in \mathbb{R} : x = a + bi \wedge i^2 = -1\}$	Menge der komplexen Zahlen
	(Ausführlich wird $\mathbb{C}$ im Abschnitt 2.3 behandelt.)

$$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$
$$X^+ := \{x \in X \mid x > 0\} \text{ für } X \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$$
$$X_0^+ := \{x \in X \mid x \geq 0\} \text{ für } X \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$$
$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$
$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$
$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$
$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

Auf eine exakte Definition der Zahlenmengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ wollen wir an dieser Stelle verzichten und uns mit der naiven Vorstellung begnügen, daß man sich die reellen Zahlen geometrisch als Punkte auf einer Geraden vorstellen kann, wobei $\mathbb{Q}$ die Gerade noch nicht, jedoch $\mathbb{R}$ diese Gerade „ausfüllt“.
Die üblichen Rechenregeln für die Zahlenmengen $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ setzen wir nachfolgend als bekannt voraus. Als spezielle Eigenschaft von $\mathbb{N}$ (bzw. $\mathbb{N}_0$) sei le-

diglich genannt, daß jede Menge natürlicher Zahlen, die aus mindestens einem Element besteht, ein kleinstes Element enthält. Mit Hilfe dieser Eigenschaft läßt sich nun ein wichtiges Beweisverfahren, die sogenannte **vollständige Induktion**, begründen.

Satz 1.2.1 *Sei $A(n)$ eine Aussage über alle natürlichen Zahlen $n \geq a$ (a dabei aus $\mathbb{N}$ und fest gewählt). $A(n)$ ist für alle $n \geq a$ richtig, wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:*

(I) $A(a)$ ist richtig.

(II) Aus der Annahme der Gültigkeit von $A(n)$ für alle n mit $a \leq n \leq k$ folgt stets die Gültigkeit von $A(k+1)$.

Beweis.[3] Angenommen, (I) und (II) sind erfüllt, jedoch gilt $A(n)$ nicht für alle $n \geq a$. Dann gibt es ein kleinstes b, für das $A(b)$ falsch ist, wobei $b > a$ (wegen (I)). Folglich ist $A(b-1)$ richtig und $b - 1 \geq a$. Das ist jedoch ein Widerspruch zu (II). ■

(I) aus obigem Satz wird **Induktionsanfang** und (II) **Induktionsschritt** genannt, wobei die in (II) getroffene Annahme oft auch **Induktionsvoraussetzung** und die Begründung für (II) **Induktionsbeweis** heißt.
Man beachte, daß in (II) keine Aussage über die Begründung, mit der man von $A(n)$ für $a \leq n \leq k$ zu $A(k+1)$ gelangt, gemacht wird. Diese Begründung kann also im Prinzip für jedes n eine andere sein; das Versagen einer Beweisidee für gewisses k läßt also keinen Schluß auf das Versagen der vollständigen Induktion bei einer konkreten Aufgabenstellung zu. Außerdem kann es möglich sein, daß eine bestimmte Beweisidee beim Induktionsschritt die Richtigkeit der Behauptung für paarweise verschiedene Zahlen $n \leq k$ erfordert. In diesem Fall ist der Induktionsanfang (I) nicht nur für eine Zahl, sondern entsprechend für mehrere Zahlen durchzuführen. Ein Beispiel dazu findet man in der ÜA A.1.8, (h).
Die vollständige Induktion wird von uns vorrangig als Beweishilfsmittel Verwendung finden. Sie kann jedoch auch bei der sogenannten rekursiven Definition bzw. rekursiven Konstruktion von Objekten herangezogen werden:

Man definiert von n ($\in \mathbb{N}$) abhängige Objekte $Ob(n)$, indem man zuerst $Ob(1)$ angibt und dann ein Verfahren, mit dem man $Ob(n+1)$ aus $Ob(n)$ (bzw. $Ob(k)$ mit $k \leq n$) erhalten kann. Wegen Satz 1.2.1 ist damit $Ob(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert.

[3] Dies ist unser erstes Beispiel für einen sogenannten **indirekten Beweis**. Wir nehmen an, daß bei den gegebenen Voraussetzungen die Behauptung falsch ist, und zeigen, daß sich hieraus ein Widerspruch ergibt. Geht man davon aus, daß eine Behauptung entweder wahr oder falsch ist, folgt hieraus die Richtigkeit der Behauptung.

Der folgende Satz mit Eigenschaften von Primzahlen ist den meisten Lesern sicher aus der Schule her bekannt. Sein Beweis dient hier zur Erläuterung der bisher eingeführten Beweistypen (vollständige Induktion und indirekter Beweis). Wir werden später sehen, daß Primzahlen wichtige Anwendungen besitzen.

Satz 1.2.2

(a) Jede natürliche Zahl n mit $n \geq 2$ läßt sich auf eindeutige Weise als Produkt von Primzahlpotenzen darstellen:

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_r^{\alpha_r}, \tag{1.1}$$

wobei $p_1, p_2, ..., p_r \in \mathbb{P}$ mit $p_1 < p_2 < ... < p_r$ und $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r \in \mathbb{N}$.

(b) Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Beweis. (a): Wir beginnen mit dem Beweis der Existenz von (1.1) durch vollständige Induktion über $n \geq 2$.
(I) $n = 2$. Da 2 eine Primzahl ist, gilt offenbar (1.1) für $n = 2$.
(II) $k-1 \longrightarrow k$. Angenommen, für alle natürlichen Zahlen n mit $2 \leq n \leq k-1$ ist (1.1) richtig. Für $n = k$ sind zwei Fälle möglich:
Fall 1: $k \in \mathbb{P}$.
Dann gilt offenbar (1.1).
Fall 2: $k \notin \mathbb{P}$.
In diesem Fall existieren Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ mit $k = a \cdot b$, $1 < a < k$ und $1 < b < k$. Für a und b existieren laut Annahme Darstellungen in Form von Produkten aus Primzahlpotenzen. Wegen $k = a \cdot b$ besitzt dann auch k eine Darstellung als Produkt von Primzahlpotenzen.
Die Eindeutigkeit der Darstellung (1.1) läßt sich durch einen indirekten Beweis zeigen. Angenommen, für eine gewisse natürliche Zahl n existieren zwei verschiedene Darstellungen der im Satz angegebenen Art. Durch Division von gemeinsamen Potenzen gelangt man dann zu einem Widerspruch (ausführlich: ÜA).
(b): Angenommen, es gibt nur endlich viele Primzahlen, die mit $p_1, p_2, ..., p_t$ bezeichnet seien, wobei $p_1 < p_2 < ... < p_t$ gelte. Wir betrachten die natürliche Zahl

$$n := 1 + p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_t.$$

Nach (a) existieren gewisse $\alpha_1, ..., \alpha_t \in \mathbb{N}_0$ mit

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_t^{\alpha_t}.$$

Da $n > 1$, ist mindestens ein α_i mit $i \in \{1, 2, ..., t\}$ von 0 verschieden. Aus obigen Darstellungen von n folgt dann, daß p_i sowohl ein Teiler von n als auch von $n-1$ ist, d.h., es existieren $u, v \in \mathbb{N}$ mit $n = p_i \cdot u$ und $n - 1 = p_i \cdot v$. Folglich gilt auch $p_i \cdot (u - v) = 1$, was wegen $p_i > 1$ und $p_i, u, v \in \mathbb{N}$ nicht sein kann. Also war unsere Annahme falsch und damit die Behauptung richtig. ■

Wir kommen nun zu den Grundbegriffen bzw. wichtigen Begriffen der Mengenlehre.

Definitionen

- Die Menge, die aus gar keinem Element besteht, heißt **leere Menge** und wird mit $\emptyset$ bezeichnet, d.h., z.B.

$$\emptyset := \{x \mid x \neq x\}.$$

- A und B seien Mengen.

  $A \subseteq B$ („A **ist Teilmenge von** B" bzw. „B **ist Obermenge von** A")

  $$:\Longleftrightarrow \forall x \in A : \ x \in B.$$

  $A = B :\Longleftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A.$

  $A \neq B :\Longleftrightarrow \neg(A = B).$

  $A \subset B$ („A **ist echte Teilmenge von** B") $:\Longleftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B.$

Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge. Außerdem gilt für beliebige Mengen A, B, C:

$$(A \subseteq B \ \wedge \ B \subseteq C) \Longrightarrow A \subseteq C.$$

Man beachte:

$$\{a\} \notin \{a\}, \text{ aber } \{a\} \subseteq \{a\} \text{ und } a \in \{a\}.$$

$$\{\{a\}\} \neq \{a\}.$$

Definition Sei A eine Menge. Die Menge

$$\mathfrak{P}(A) := \{M \mid M \subseteq A\}$$

aller Teilmengen von A heißt **Potenzmenge** von A.

Beispiel $A = \{0, 1\}$,

$$\mathfrak{P}(\{0, 1\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}.$$

Satz 1.2.3 *Sei M eine endliche, nichtleere Menge und bezeichne $|M|$ die Anzahl ihrer Elemente. Dann gilt*

$$|\mathfrak{P}(M)| = 2^{|M|}.$$

Beweis. ÜA A.1.11. ■

Die Aussage von Satz 1.2.3 motiviert auch folgende übliche Bezeichnung für die Potenzmenge einer Menge M:

$$2^M.$$

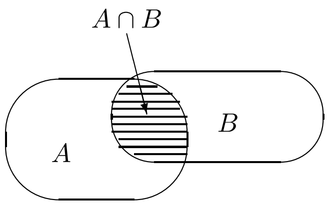
Für beliebige Mengen A, B kann man folgende vier

Mengenoperationen

definieren, die wir uns mittels sogenannter **Venn**[4]**-Diagramme (Eulersche**[5] **Kreise)** veranschaulichen:

- **Durchschnitt von** A **und** B:

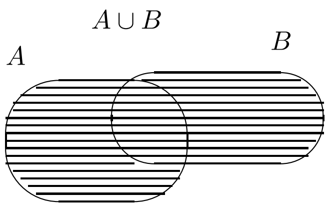
$$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$



Falls $A \cap B = \emptyset$, nennen wir A und B **disjunkt**.

- **Vereinigung von** A **und** B:

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

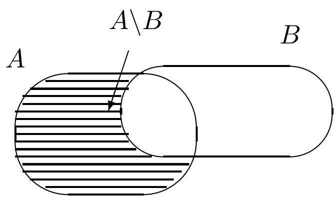


- **Differenz von** A **und** B:

$$A \backslash B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

[4] John Venn (1834–1923), englischer Philosoph.

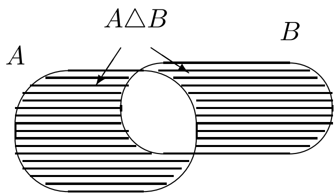
[5] Leonhard Euler (1701–1783), schweizer Mathematiker, Physiker, Astronom und Philosoph. Schrieb entscheidende Beiträge zu fast allen damaligen Gebieten der Mathematik, Physik und Astronomie. Verfasser hervorragender Lehrbücher. Einige von ihm eingeführte Begriffe und Bezeichnungen werden noch heute verwendet.



Bei einer fixierten Grundmenge G und $A \subseteq G$ bezeichnen wir $G\backslash A$ auch mit $\overline{A}$ und nennen diese Menge das **Komplement** von A (bez. G).

- **Symmetrische Differenz von A und B:**

$$A \triangle B := (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$$



Zusammenfassend geben wir die oben definierten Mengenoperationen noch in Form von Tabellen an, die man zum späteren Nachweis von Rechenregeln für diese Operationen heranziehen kann. Dazu schreiben wir die vier möglichen Fälle für ein beliebiges x:

$$\begin{array}{c} x \notin A \text{ und } x \notin B \\ x \notin A \text{ und } x \in B \\ x \in A \text{ und } x \notin B \\ x \in A \text{ und } x \in B \end{array}$$

kurz durch

A	B
0	0
0	1
1	0
1	1

auf.

Eine vollständige Charakterisierung der Mengen $A \cap B$, $A \cup B$, $A\backslash B$ und $A \triangle B$ liefert dann die nachfolgende Tabelle, in der eine 0 oder 1 in der entsprechenden Spalte unter $A \cap B, \ldots$ angibt, ob im jeweiligen Fall x zu dieser Menge nicht gehört oder gehört:

A	B	$A \cap B$	$A \cup B$	$A \backslash B$	$A \triangle B$
0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1
1	0	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0

Allgemeiner kann man für Mengen A_i (i aus einer Indexmenge) Durchschnitte und Vereinigungen durch

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{x \mid \forall i \in I : x \in A_i\} \text{ und}$$
$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x \mid \exists i \in I : x \in A_i\}$$

definieren. Auch üblich sind die Schreibweisen

$$\bigcap_{A \in S} A \quad \text{bzw.} \quad \bigcup_{A \in S} A,$$

wobei S ein Mengensystem (z.B. $S := \{A_i \mid i \in I\}$) bezeichnet.

Eine weitere Beschreibung für die Menge $\bigcap_{A \in S} A$ (bzw. $\bigcup_{A \in S} A$) ist

$$\bigcap \{A \mid A \in S\} \quad \left(\bigcup \{A \mid A \in S\} \right).$$

Im nachfolgenden Satz fassen wir wesentliche Eigenschaften der oben definierten Mengen zusammen.

Satz 1.2.4 *Für beliebige Teilmengen A, B, C eines Grundbereichs G gilt:*

(a) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$ *(Assoziativgesetze)*

(b) $A \cap B = B \cap A$
$A \cup B = B \cup A$
$A \triangle B = B \triangle A$ *(Kommutativgesetze)*

(c) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A \cap (B \,\Delta\, C) = (A \cap B) \,\Delta\, (A \cap C)$ *(Distributivgesetze)*

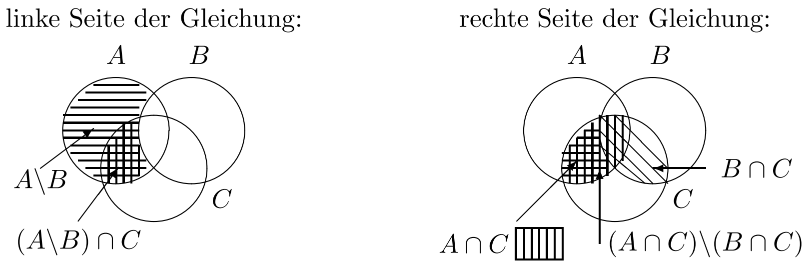
(d) $A \cup A = A$
$A \cap A = A$ *(Idempotenzgesetze)*

(e) $(A \backslash B) \cap C = (A \cap C) \backslash (B \cap C)$
$A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$
$(A \backslash B) \cup B = A \cup B$
$A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$

(f) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ *(Morgansche Gesetze)*

(g) $\overline{\overline{A}} = A$.

Beweis. Wir wollen hier nur $(A \backslash B) \cap C = (A \cap C) \backslash (B \cap C)$ beweisen. Die Begründungen für die anderen Aussagen verlaufen analog.
Zunächst eine Veranschaulichung unserer Behauptung durch ein Venn-Diagramm:



Diese Veranschaulichung läßt vermuten, daß unsere Behauptung richtig ist. Sie ist jedoch kein Beweis! Nachfolgend werden zwei Beweise angegeben. Im ersten Beweis wird gezeigt, daß $(A \backslash B) \cap C \subseteq (A \cap C) \backslash (B \cap C)$ und $(A \cap C) \backslash (B \cap C) \subseteq (A \backslash B) \cap C$ gilt, woraus sich nach der Definition der Gleichheit von zwei Mengen die Behauptung $(A \backslash B) \cap C = (A \cap C) \backslash (B \cap C)$ ergibt.
$(A \backslash B) \cap C \subseteq (A \cap C) \backslash (B \cap C)$ folgt aus

$$\begin{aligned} x \in (A \backslash B) \cap C &\Longrightarrow x \in A \setminus B \ \wedge \ x \in C \\ &\Longrightarrow (x \in A \ \wedge \ x \notin B) \ \wedge \ x \in C \\ &\Longrightarrow x \in A \cap C \ \wedge \ x \notin B \cap C \\ &\Longrightarrow x \in (A \cap C) \setminus (B \cap C). \end{aligned}$$

$(A \cap C) \backslash (B \cap C) \subseteq (A \backslash B) \cap C$ folgt aus

$$\begin{aligned} x \in (A \cap C) \setminus (B \cap C) &\Longrightarrow x \in A \cap C \ \wedge \ x \notin B \cap C \\ &\Longrightarrow (x \in A \ \wedge \ x \in C) \ \wedge \ (x \notin B \ \vee \ x \notin C) \\ &\Longrightarrow x \in A \ \wedge \ x \in C \ \wedge \ x \notin B \\ &\Longrightarrow x \in A \setminus B \ \wedge \ x \in C \\ &\Longrightarrow x \in (A \setminus B) \cap C. \end{aligned}$$

Ein weiterer Beweis wird durch die folgende Tabelle erbracht, indem – die oben vereinbarte Codierung benutzend – für die möglichen 8 Fälle der Zugehörigkeit bzw. Nichtzugehörigkeit eines beliebigen Elements x zu den Mengen A, B und C aufgeschrieben wird, welche Zugehörigkeit/Nichtzugehörigkeit von x zu den in der ersten Zeile angegebenen Mengen sich hieraus ergibt. Die Gleichheit der unterstrichenen Spalten liefert die Behauptung.

A	B	C	$A\backslash B$	$(A\backslash B)\cap C$	$A\cap C$	$B\cap C$	$(A\cap C)\backslash(B\cap C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	$\underline{0}$	1	1	$\underline{0}$

■

Definitionen Seien A und B nichtleere Mengen. Die Menge

$$A \times B := \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

heißt **kartesisches Produkt** der Mengen A, B.
Die Elemente (a,b) von $A \times B$ nennt man **geordnete Paare**, wobei

$$(a,b) = (c,d) :\Longleftrightarrow (a = c \ \wedge \ b = d).$$

Allgemeiner:
Seien $A_1, A_2, \ldots, A_n$ nichtleere Mengen.
Die Menge

$$\begin{aligned} A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n &= \bigotimes_{i=1}^{n} A_i \text{ (oder } = \prod_{i=1}^{n} A_i) \\ &:= \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid \forall i \in \{1,2,\ldots,n\} : \ a_i \in A_i\} \end{aligned}$$

heißt **kartesisches Produkt** der Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Die Elemente von $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ nennt man (geordnete) n-**Tupel**, wobei

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n) :\Longleftrightarrow \forall i \in \{1, \ldots, n\} : a_i = b_i.$$

Weiter seien $A^1 := A$, $A^2 := A \times A$, $A^3 := A \times A \times A, \ldots$.
Man beachte, daß $A \times (A \times A) = A \times A^2 \neq A^3$ ist.
Falls $A_i = \emptyset$ für ein gewisses $i \in \{1, 2, ..., n\}$, sei $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \emptyset$.

Beispiel Wählt man $A = \{0,1\}$ und $B = \{\emptyset, a\}$, so gilt
$A \times B = \{(0,\emptyset), (1,\emptyset), (1,a), (0,a)\}$,
$A^3 = \{(a,b,c) \,|\, a,b,c \in \{0,1\}\}$ und
$A \times A^2 = \{(a,b) \,|\, a \in A \ \wedge \ b \in A^2\}$.

Satz 1.2.5 *Für beliebige nichtleere endliche Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ gilt:*

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n|.$$

Beweis. ÜA 1.1.12. ■

1.3 Relationen

Zwischen den Elementen einer Menge können gewisse Beziehungen („Relationen“) wie z.B. „$<$“, „teilt“, „ist Summe von“, u.ä. bestehen. Exakt (und ziemlich abstrakt) läßt sich so etwas mathematisch mit Hilfe des folgenden Begriffes beschreiben:

Definition Es sei A eine nichtleere Menge und $k \in \mathbb{N}$.
R heißt **k-stellige (k-äre) Relation in** $A :\Longleftrightarrow R \subseteq A^k$.

Beispiel Sei $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Relationen in A sind dann

$$\begin{aligned}
R_1 &:= \emptyset, \\
R_2 &:= \{(a, a) \mid a \in A\}, \\
R_3 &:= \{(a, b) \in A^2 \mid a|b\} \\
&= R_2 \cup \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 4), (2, 6), (3, 6)\}, \\
R_4 &:= \{(a, b, c) \in A^3 \mid a^2 + b^2 = c^2\} = \{(3, 4, 5), (4, 3, 5)\}.
\end{aligned}$$

Besonders wichtig sind zweistellige Relationen R in A, die auch

binäre Relationen

genannt werden, und mit denen wir uns im weiteren beschäftigen wollen. Als Schreibweise für $(a, b) \in R$ ($\subseteq A^2$) ist bei binären Relationen auch üblich:

$$aRb.$$

Mögliche Eigenschaften binärer Relationen R in A sind:

R **reflexiv**	$:\Longleftrightarrow$	$\forall a \in A: \ (a, a) \in R;$
R **irreflexiv**	$:\Longleftrightarrow$	$\forall a \in A: \ (a, a) \notin R;$
R **symmetrisch**	$:\Longleftrightarrow$	$\forall a, b \in A: \ (a, b) \in R \Longrightarrow (b, a) \in R;$
R **antisymmetrisch**	$:\Longleftrightarrow$	$\forall a, b \in A: \ ((a, b) \in R \Longrightarrow (b, a) \notin R \vee a = b);$
R **asymmetrisch**	$:\Longleftrightarrow$	$\forall a, b \in A: \ (a, b) \in R \Longrightarrow (b, a) \notin R;$
R **transitiv**	$:\Longleftrightarrow$	$\forall a, b, c \in A:$ $((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R) \Longrightarrow (a, c) \in R;$
R **linear**	$:\Longleftrightarrow$	$\forall a, b \in A: \ (a, b) \in R \vee (b, a) \in R.$

Man beachte, daß die leere Menge stets die obigen Bedingungen der Form ... $\Longrightarrow$ ... erfüllt. Außerdem bedeutet die Schreibweise (a, b) nicht automatisch, daß $a \neq b$ ist. Damit ist z.B. die Relation $\{(x, x) \,|\, x \in A\}$ nicht nur eine reflexive, sondern auch eine transitive, symmetrische und antisymmetrische Relation in A.
Eine lineare Relation ist offensichtlich auch reflexiv.

Mit Hilfe der oben eingeführten Bezeichnungen kann man gewisse Klassen von Relationen einführen:

Definitionen

R heißt **reflexive teilweise Ordnung auf** A

$:\Longleftrightarrow$ R ist reflexiv, transitiv und antisymmetrisch;

R heißt **lineare Ordnung** (**totale Ordnung**)

$:\Longleftrightarrow$ R ist transitiv, antisymmetrisch und linear;

R heißt **irreflexive teilweise Ordnung auf** A

$:\Longleftrightarrow$ R ist irreflexiv und transitiv;

R heißt **Äquivalenzrelation auf** A

$:\Longleftrightarrow$ R ist reflexiv, symmetrisch und transitiv.

Einige **Bemerkungen** und **Beispiele** zu den **Ordnungsrelationen** (kurz **Ordnungen** genannt):

Ordnungen sind Verallgemeinerungen der üblichen „$\leq$“- bzw. „$<$“-Beziehung von reellen Zahlen. Bekanntlich gilt:
$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$:

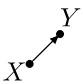
$$\begin{array}{ll}
a \leq a & \text{(d.h., } \leq \text{ ist reflexiv)} \\
a \leq b \Longrightarrow (\neg(b < a) \vee a = b) & \text{(d.h., } \leq \text{ ist antisymmetrisch)} \\
(a \leq b \wedge b \leq c) \Longrightarrow a \leq c & \text{(d.h., } \leq \text{ ist transitiv)} \\
a < b \Longrightarrow a \neq b & \text{(d.h., } < \text{ ist irreflexiv)} \\
(a < b \wedge b < c) \Longrightarrow a < c & \text{(d.h., } < \text{ ist transitiv)} \\
a \leq b \ \vee \ b \leq a & \text{(d.h., } \leq \text{ ist linear).}
\end{array}$$

Allgemein kann man Ordnungen in einer Menge A als Festlegungen einer „Rangfolge“ von Elemente der Menge A auffassen, wobei Ordnungen nicht unbedingt linear sein müssen, d.h., nicht für jedes Paar von Elementen aus A muß festgelegt sein, welches vom „größeren Rang“ ist. Gilt für eine Ordnung R in A und gewissen Elementen $a, b \in A$, daß $(a, b) \notin R$ und $(b, a) \notin R$ ist, so nennt man die Elemente a und b bezüglich R **unvergleichbar**.
Dazu ein **Beispiel**

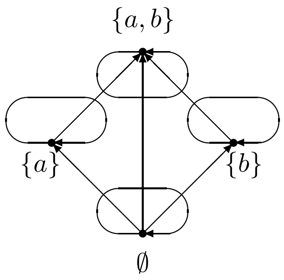
Sei $A := \mathfrak{P}(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. Die Relation

$$\begin{aligned}
R &:= \{(X, Y) \in A \times A \mid X \subseteq Y\} \\
&= \{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \{a\}), (\emptyset, \{b\}), (\emptyset, \{a, b\}), (\{a\}, \{a\}), (\{a\}, \{a, b\}), \\
&\qquad (\{b\}, \{b\}), (\{b\}, \{a, b\}), (\{a, b\}, \{a, b\})\}
\end{aligned}$$

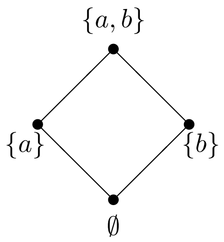
ist offenbar eine reflexive teilweise Ordnung.

Indem man sich die Elemente von A durch Punkte symbolisiert und 

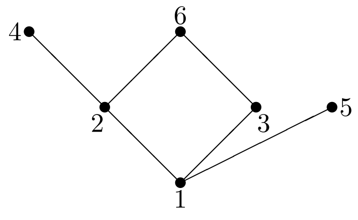
zeichnet, falls (X, Y) zu R gehört, kann man sich R wie folgt veranschaulichen:



Verzichtet man auf diejenigen Pfeile, die sich aus der Transitivität und Reflexivität ergeben und vereinbart man, die „größeren“ Elemente oberhalb der „kleineren“ Elemente anzuordnen, so genügt zur Veranschaulichung der Relation R folgende Zeichnung:



Eine solche Darstellung einer reflexiven teilweisen Ordnung nennt man **Hasse[6]-Diagramm**.
So gehört z.B. zum Hasse-Diagramm



die Relation

$$\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),$$
$$(1,6),(2,4),(2,6),(3,6)\}$$
$$(= \{(a,b) \in \{1,2,3,4,5,6\}^2 \mid a \text{ teilt } b\}).$$

Ein **Beispiel** für eine irreflexive teilweise Ordnung ist

$$\{(X,Y) \in (\mathfrak{P}(A))^2 \mid X \subset Y\}.$$

[6] Helmut Hasse (1898–1979), deutscher Mathematiker.

Auch für solche Relationen kann man Hasse-Diagramme vereinbaren, wobei die Irreflexivität extra anzugeben ist.
Es sei noch bemerkt, daß man anstelle von $(a, b) \in R$ (R sei Ordnungsrelation) auch oft

$$\begin{array}{ll} a \leq_R b, & \text{falls } R \text{ reflexiv, und} \\ a <_R b, & \text{falls } R \text{ irreflexiv ist,} \end{array}$$

schreibt.
Weitere Begriffe und Bezeichnungen zu den Ordnungsrelationen führen wir später an den Stellen ein, wo sie benötigt werden. Wer mehr über die Ordnungstheorie wissen möchte, dem sei [Ern 82] empfohlen.

Weiter mit

Eigenschaften von Äquivalenzrelationen

Äquivalenzrelationen sind „verallgemeinerte Gleichheiten“, da „=“ (definiert für Elemente einer gewissen Menge A) folgende Eigenschaften besitzt:
$\forall a, b, c \in A$:

$$\begin{array}{ll} a = a & \text{(d.h., = ist reflexiv)} \\ a = b \Longrightarrow b = a & \text{(d.h., = ist symmetrisch)} \\ (a = b \wedge b = c) \Longrightarrow a = c & \text{(d.h., = ist transitiv).} \end{array}$$

Auf jeder Menge A kann man stets zwei sogenannte **triviale Äquivalenzrelationen** definieren:

$$\begin{array}{rcl} R_0 & := & \{(a, a) \mid a \in A\} \text{ und} \\ R_1 & := & A \times A. \end{array}$$

Ein nicht-triviales Beispiel für eine Äquivalenzrelation auf der Menge $A := \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, die man als Menge aller Brüche auffassen kann, ist

$$\{((a, b), (c, d)) \in A \times A \mid a \cdot d = b \cdot c\},$$

die bekannte Gleichheit von Brüchen.

Zur näheren Beschreibung von Äquivalenzrelationen benötigen wir die Begriffe *Äquivalenzklasse* und *Zerlegung*, die als nächstes definiert werden sollen.

Definition Sei $a \in A$ und R eine Äquivalenzrelation auf A. Die Menge

$$[a]_R := \{b \in A \mid (a, b) \in R\}$$

(kurz nur mit $[a]$ bezeichnet)

heißt **Äquivalenzklasse** von a (bez. R).

Einige **Beispiele**
Für die trivialen Äquivalenzrelationen R_0 und R_1 auf einer Menge A und für jedes Element $a \in A$ gilt:

$$[a]_{R_0} = \{a\} \text{ und } [a]_{R_1} = A.$$

Falls $A := \{0, 1, 2, 3\}$ und

$$R := \{(0,0), (1,1), (2,2), (3,3), (0,1), (1,0), (0,3), (3,0), (1,3), (3,1)\},$$

haben wir

$$[0]_R = \{0, 1, 3\} = [1]_R = [3]_R \text{ sowie } [2]_R = \{2\}.$$

Eigenschaften von Äquivalenzklassen sind zusammengefaßt im

Satz 1.3.1 *Sei R eine Äquivalenzrelation auf einer Menge A. Dann ist*

(1) $\bigcup_{a \in A} [a]_R = A$;

und für beliebige $a, b \in A$ gilt:

(2) $[a]_R = [b]_R \iff (a, b) \in R$;

(3) $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset \ \vee \ [a]_R = [b]_R$.

Beweis. (1) gilt, da $a \in [a]_R$ für jedes $a \in A$.
(2): „$\Longrightarrow$": Sei $[a] = [b]$. Dann ist $b \in [a]$ und folglich $(a, b) \in R$.
„$\Longleftarrow$": Sei $(a, b) \in R$. Aus der Symmetrie von R ergibt sich hieraus auch $(b, a) \in R$.
Wir zeigen $[b] \subseteq [a]$. Bezeichne x ein beliebiges Element aus $[b]$. Dann gilt $(b, x) \in R$. Wegen $(a, b) \in R$ und der Transitivität von R ergibt sich hieraus $(a, x) \in R$, d.h., $x \in [a]$. Also gilt $[b] \subseteq [a]$.
Analog zeigt man $[a] \subseteq [b]$. Folglich haben wir $[a] = [b]$.
(3): Angenommen, es existieren $a, b \in A$ mit $[a] \cap [b] \neq \emptyset$ und $[a] \neq [b]$. Dann gibt es ein c, das sowohl zu $[a]$ als auch zu $[b]$ gehört, d.h., es gilt $(a, c) \in R$ und $(b, c) \in R$. Wegen der Symmetrie von R haben wir $(c, b) \in R$ und (wegen der Transitivität von R) $(a, b) \in R$. Nach (2) gilt dann $[a] = [b]$, im Widerspruch zur Annahme. ■

Definition Sei A eine nichtleere Menge. Nichtleere Mengen A_i $(i \in I)$ nennt man eine **Zerlegung** (**Partition**, **Klasseneinteilung**) der Menge A, wenn

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i \qquad \wedge \qquad (\forall i, j \in I : \ A_i = A_j \ \vee \ A_i \cap A_j = \emptyset)$$

gilt. Man sagt „A ist die **disjunkte Vereinigung der Mengen** A_i". Eine Zerlegung wird manchmal auch in der Form

$$Z := \{A_i \,|\, i \in I\}$$

angegeben, und die Elemente der Menge Z nennt man **Blocks**.

Beispiele
Nach Satz 1.3.1, (1), (3) bilden die Äquivalenzklassen einer Äquivalenzrelation auf A eine Zerlegung der Menge A.

Betrachtet man speziell die Äquivalenzrelation

$$R = \{(0,0),(1,1),(2,2),(0,2),(2,0)\}$$

auf $A = \{0,1,2\}$, so ist die zu R gehörende Zerlegung der Menge A:

$$A_1 = \{0,2\}, A_2 = \{1\}.$$

Mit Hilfe von A_1, A_2 kann man auch wieder zur Relation R gelangen, indem man

$$\{(a,b) \in A^2 \mid \{a,b\} \subseteq A_1 \vee \{a,b\} \subseteq A_2\} \; (= R)$$

bildet, womit man von R zu einer Zerlegung und von dieser Zerlegung wieder zu R gelangen kann. Allgemein gilt der

Satz 1.3.2 (Hauptsatz über Äquivalenzrelationen)
Sei A eine nichtleere Menge. Dann gilt:

(1) Ist R eine Äquivalenzrelation auf A, so bilden die Äquivalenzklassen $[a]_R$ ($a \in A$) eine Zerlegung von A.
(2) Die Mengen A_i ($i \in I$) mögen eine Zerlegung Z von A bilden. Dann ist die Relation

$$R_Z := \{(a,b) \in A^2 \mid \exists i \in I : \; \{a,b\} \subseteq A_i\}$$

eine Äquivalenzrelation auf A.
Besteht die Zerlegung Z speziell aus den Äquivalenzklassen einer Äquivalenzrelation R, so ist $R_Z = R$.

Beweis. (1) folgt aus Satz 1.3.1.
(2): Wegen $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ ist R_Z reflexiv. R_Z ist symmetrisch, da $\{a,b\} = \{b,a\}$. R_Z ist auch transitiv, da für beliebige a,b,c aus A nach den Eigenschaften einer Zerlegung gilt:

$$\begin{aligned}((a,b) \in R \wedge (b,c) \in R) &\implies \exists i,j \in I : \; \underbrace{\{a,b\} \subseteq A_i \wedge \{b,c\} \subseteq A_j}_{\Longrightarrow A_i \cap A_j \neq \emptyset \Longrightarrow A_i = A_j} \\ &\implies \{a,c\} \subseteq A_i \Longrightarrow (a,c) \in R_Z.\end{aligned}$$

Folglich ist R_Z eine Äquivalenzrelation, die nach Konstruktion wieder mit R übereinstimmt, falls die Zerlegung aus den Äquivalenzklassen von R besteht. ∎

Der eben bewiesene Satz gibt uns die Möglichkeit, Äquivalenzrelationen mittels Zerlegungen zu definieren bzw. Zerlegungen durch Äquivalenzrelationen. Sehr oft macht man beim Anwenden dieser Begriffe deshalb keinen Unterschied zwischen Äquivalenzrelationen und ihren zugehörigen Zerlegungen.

Der nachfolgende Begriff wird im Kapitel 2 und im Band 2 benötigt.

Definition Sei R eine Äquivalenzrelation auf der Menge A. Die Menge

$$A_{/R} := \{[a]_R \mid a \in A\}$$

(die Menge aller Äquivalenzklassen der Relation R)

heißt **Faktormenge von** A **nach** R.

Abschließend noch ein wichtiges **Beispiel** für eine Äquivalenzrelation auf der Menge der ganzen Zahlen, die sogenannte **Kongruenz modulo** n: Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\equiv_n := \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid n \text{ teilt } a - b\}.$$

Für „n teilt x" schreiben wir nachfolgend $n|x$. Offenbar gilt:
$(a, b) \in \equiv_n \iff \exists x, y \in \mathbb{Z}\ \exists r \in \mathbb{N}_0 : a = x \cdot n + r \wedge b = y \cdot n + r \wedge 0 \le r \le n-1$.
Anstelle von $(a, b) \in \equiv_n$ benutzen wir auch die Schreibweisen

$$\begin{array}{lcl} a & \equiv_n & b \text{ bzw.} \\ a & = & b \pmod n \text{ (gesprochen: „}a\text{ kongruent }b\text{ modulo }n\text{")}. \end{array}$$

Man prüft nun leicht nach (ÜA A.1.36), daß $\equiv_n$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathbb{Z}$ ist. Für die Äquivalenzklassen dieser Relation gilt:

$$\begin{array}{lcl} [0] & = & \{0, n, -n, 2 \cdot n, -2 \cdot n, 3 \cdot n, -3 \cdot n, \ldots\}, \\ [1] & = & \{1, n+1, -n+1, 2 \cdot n+1, -2 \cdot n+1, \ldots\}, \\ [2] & = & \{2, n+2, -n+2, 2 \cdot n+2, -2 \cdot n+2, \ldots\}, \\ & \vdots & \\ [n-1] & = & \{n-1, n+n-1, -n+n-1, 2 \cdot n+n-1, -2 \cdot n+n-1, \ldots\}, \\ [n] & = & [0], \\ [n+1] & = & [1], \\ & \vdots & \end{array}$$

Die Faktormenge von $\mathbb{Z}$ nach $\equiv_n$ ist damit

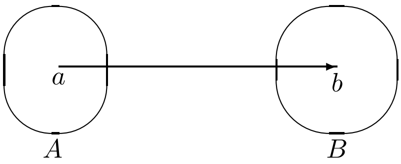
$$\{[0], [1], [2], \ldots, [n-1]\},$$

die wir üblicherweise kurz mit $\mathbb{Z}_n$ bezeichnen wollen.

1.4 Korrespondenzen, Abbildungen und Verknüpfungen

Definition Es seien A und B nichtleere Mengen.
F heißt **Korrespondenz aus** A **in** B $:\iff F \subseteq A \times B$.

Zwecks geometrischer Veranschaulichung von Korrespondenzen vereinbaren wir:



$:\Longleftrightarrow \ (a,b) \in F$

Beispiele

(1.) Binäre Relationen sind Korrespondenzen ($A = B$).
(2.) Für $A = \{0,1,2\}$ und $B = \{a,b\}$ ist z.B. $F = \{(0,a),(0,b),(1,b)\}$ eine Korrespondenz aus A in B.

Definitionen Sei $F \subseteq A \times B$ eine Korrespondenz. Dann heißt

- $D(F) := \{a \in A \mid \exists b \in B : \ (a,b) \in F\}$ der **Definitionsbereich** von F,
- $W(F) := \{b \in B \mid \exists a \in A : \ (a,b) \in F\}$ der **Wertebereich** von F.

Man sagt:

- F ist eine Korrespondenz **aus** A **in** B $:\Longleftrightarrow D(F) \subseteq A \wedge W(F) \subseteq B$,
- F ist eine Korrespondenz **aus** A **auf** B $:\Longleftrightarrow D(F) \subseteq A \wedge W(F) = B$,
- F ist eine Korrespondenz **von** A **in** B $:\Longleftrightarrow D(F) = A \wedge W(F) \subseteq B$,
- F ist eine Korrespondenz **von** A **auf** B $:\Longleftrightarrow D(F) = A \wedge W(F) = B$.

Aus vorgegebenen Korrespondenzen lassen sich neue Korrespondenzen bilden. Dazu zwei

Definitionen

- Für die Korrespondenz $F \subseteq A \times B$ sei

$$F^{-1} := \{(b,a) \mid (a,b) \in F\}$$

  die zu F **inverse Korrespondenz (Umkehrkorrespondenz) aus** B **in** A.
- Seien $F \subseteq A \times B$ und $G \subseteq B \times C$. Dann heißt die Menge

$$F \square G := \{(a,c) \in A \times C \mid \exists b \in B : (a,b) \in F \wedge (b,c) \in G\}$$

  Verkettung (**Produkt, Hintereinanderausführung**) von F und G.

Beispiele

(1.) Seien $F = \{(0,0),(0,1),(2,0),(2,3)\}$ und $G = \{(0,2),(1,1)\}$. Dann gilt $F^{-1} = \{(0,0),(1,0),(0,2),(3,2)\}$ und $F \square G = \{(0,2),(0,1),(2,2)\}$.
(2.) Für $F = \{(x,x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$ und $G = \{(x,\sin(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ gilt $F \square G = \{(x,\sin(x^2)) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Satz 1.4.1 *Seien $F \subseteq A \times B$, $G \subseteq B \times C$ und $H \subseteq C \times D$ Korrespondenzen. Dann gilt:*

(1) $F \square (G \square H) = (F \square G) \square H$;

(2) $(F \square G)^{-1} = G^{-1} \square F^{-1}$. [7]

Beweis. (1) ergibt sich aus folgenden Äquivalenzen, die für beliebiges $a \in A$ und $d \in D$ gelten:

$$\begin{aligned}
(a,d) \in F \square (G \square H) &\iff \exists b \in B : (a,b) \in F \wedge (b,d) \in G \square H \\
&\iff \exists b \in B \, \exists c \in C : (a,b) \in F \wedge (b,c) \in G \wedge (c,d) \in H \\
&\iff \exists c \in C : (a,c) \in F \square G \wedge (c,d) \in H \\
&\iff (a,d) \in (F \square G) \square H.
\end{aligned}$$

(2) folgt aus

$$\begin{aligned}
(c,a) \in (F \square G)^{-1} &\iff (a,c) \in F \square G \\
&\iff \exists b \in B : (a,b) \in F \wedge (b,c) \in G \\
&\iff \exists b \in B : (b,a) \in F^{-1} \wedge (c,b) \in G^{-1} \\
&\iff (c,a) \in G^{-1} \square F^{-1}.
\end{aligned}$$

■

Jetzt zu den (für die folgenden Abschnitte) wichtigen speziellen Korrespondenzen.

Definition Eine Korrespondenz f **von** A in B heißt (eindeutige) **Abbildung** (oder **Funktion** oder **Operator**) $:\iff \forall a \in A \; \exists! \, b \in B : (a,b) \in f$ $(\iff ((D(f) = A) \wedge (\forall a \in A : (a,b) \in f \wedge (a,c) \in f \Longrightarrow b = c)))$.

Zur Bezeichnung von Abbildungen verwenden wir meist kleine Buchstaben. In der Regel werden wir Abbildungen f von A in B nicht als gewisse Teilmengen von $A \times B$ angeben, sondern folgende Schreibweise verwenden:

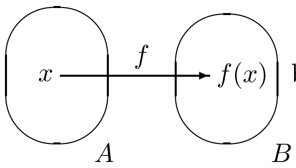
$$f : A \longrightarrow B, a \mapsto b = f(a).$$

($a \mapsto b = f(a)$ steht für „$(a,b) \in f$“ und anstelle von b schreiben wir $f(a)$.)
Daneben gibt es eine Reihe von anderen Möglichkeiten der Darstellung von Abbildungen, die je nach Art der Abbildung bzw. der Mengen A und B Verwendung finden. Wir nennen die drei wichtigsten:

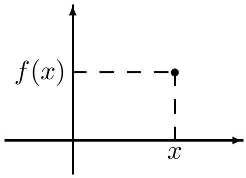
- die analytische Darstellung (Funktionsgleichung):
  Die Abbildung f wird mit Hilfe von Formeln über einem Variablenalphabet und gewissen Symbolen beschrieben.
  z.B. $f(x) = x^3 + 7x - 8$ $(x \in \mathbb{R})$ oder $f(x) = \sin x$ $(x \in \mathbb{R})$.

[7] Entspricht einer Erfahrung aus dem täglichen Leben: Man zieht zuerst Strümpfe, dann Schuhe an. Das Ausziehen (das inverse Vorgehen) geschieht umgekehrt!

- die geometrische Darstellung:



bzw. (falls $A, B \subseteq \mathbb{R}$)



- die tabellarische Darstellung:

x	$f(x)$
$\vdots$	$\vdots$
a	$b = f(a)$
$\vdots$	$\vdots$

Beispiel Es sei $A = \mathbb{N}$ und $B = \mathbb{R}$. Dann ist $f := \{(a, b) \in A \times B \mid b = \sqrt{a}\}$ eine Abbildung, die man auch in der Form $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R},\ a \mapsto \sqrt{a}$ angeben kann.

Definitionen Es sei $f : A \longrightarrow B$ eine Abbildung, $A_0 \subseteq A$, $B_0 \subseteq B$ und $b \in B$. Dann sei

- $f(A_0) := \{f(a) \mid a \in A_0\}$ („**Bild**" von A_0),
- $f^{-1}(b) := \{a \in A \mid f(a) = b\}$ („**Urbild**" von b),
- $f^{-1}(B_0) := \{a \in A \mid f(a) \in B_0\}$ („**Urbild**" von B_0),
- $f_{|A_0} := \{(a, f(a)) \mid a \in A_0\}$ bzw. $f_{|A_0}$ sei die durch

$$f_{|A_0} : A_0 \longrightarrow B,\ a \mapsto f(a)$$

  definierte Abbildung, die **Einschränkung** (oder **Beschränkung** oder **Restriktion**) **von** f **auf** A_0 genannt wird.

Die Bezeichnungen aus den folgenden Definitionen werden wir nachfolgend oft benutzen.

Definitionen Es seien A und B nichtleere Mengen und $f : A \longrightarrow B$ eine Abbildung. Dann heißt

- die Abbildung $\mathrm{id}_{;A} : A \longrightarrow A, a \mapsto a$ die **identische Abbildung** von A auf A;
- f **injektiv** (oder eine **Injektion** oder **eineindeutig** oder **1-1-Abbildung**) $:\Longleftrightarrow \forall a, a' \in A :\ f(a) = f(a') \Longrightarrow a = a'$;

- f **surjektiv** (oder eine **Surjektion**):$\Longleftrightarrow W(f) = B$;
- f **bijektiv** (oder eine **Bijektion**) :$\Longleftrightarrow f$ ist injektiv und surjektiv.

Satz 1.4.2 *Seien* f $(\subseteq A \times B)$ *und* g $(\subseteq B \times C)$ *Abbildungen. Dann gilt*

(1) $f\Box g$ *ist eine Abbildung*
($f\Box g : A \longrightarrow C, x \mapsto g(f(x))$ *);*
(2) f, g *injektiv (bzw. surjektiv bzw. bijektiv)* $\Longrightarrow$
$f\Box g$ *injektiv (bzw. surjektiv bzw. bijektiv).*

Beweis. (1): Angenommen, $f\Box g$ ist keine Abbildung. Dann gibt es gewisse a, c, c' mit $c \neq c'$, $(a, c) \in f\Box g$ und $(a, c') \in f\Box g$. Folglich gilt für gewisse $b, b' \in B$, daß $(a, b) \in f$, $(b, c) \in g$, $(a, b') \in f$ und $(b', c') \in g$ ist. Da f eine Abbildung, erhalten wir hieraus: $b = b'$, $(b, c) \in g$ und $(b, c') \in g$, womit g keine Abbildung ist, im Widerspruch zur Voraussetzung.
(2): ÜA A.1.53. ■

Leicht überprüft man anhand der Definitionen die Richtigkeit von

Satz 1.4.3 *Sei* f *eine bijektive Abbildung von* A *auf* B*. Dann gilt*

(1) f^{-1} *ist bijektiv;*
(2) $f\Box f^{-1} = id_{;A}$*;*
(3) $f^{-1}\Box f = id_{;B}$*.* ■

Der nächste Satz beschreibt einen Zusammenhang zwischen Abbildungen und Äquivalenzrelationen. Er bildet die Grundlage von sogenannten *Homomorphiesätzen* für algebraische Strukturen, mit denen wir uns im Kapitel 2 kurz und im dritten Teil des zweiten Bandes ausführlich beschäftigen werden.

Satz 1.4.4

(1) Sei f *eine Abbildung von* A *in* B*. Dann ist die Relation*

$$R_f := \{(x, y) \in A^2 \mid f(x) = f(y)\}$$

eine Äquivalenzrelation auf der Menge A*, die sogenannte* ***„von*** f ***induzierte Äquivalenzrelation“****.*

(2) Ist umgekehrt eine Äquivalenzrelation R *auf* A *gegeben, so ist die Abbildung*

$$g : A \longrightarrow A_{/R}, x \mapsto [x]_R$$

eine Abbildung von A *auf die Faktormenge von* A *nach* R *mit der Eigenschaft, daß* R_g *mit* R *übereinstimmt.*

Es besteht sogar eine bijektive Abbildung von $f(A) := \{f(a) \mid a \in A\}$ auf $A_{/R_f}$: $f(a) \mapsto [a]_{R_f}$. Schematisch:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & f(A) \arrow[dl, leftrightarrow, "\textit{bijektiv}"] \\ A_{/R_f} & \end{tikzcd}$$

Beweis. ÜA. ■

Wir kommen nun zu den sogenannten Verknüpfungen.

Definition Sei A eine nichtleere Menge.
Eine Abbildung von $A \times A$ in A heißt eine **innere Verknüpfung** (bzw. **Operation**) auf A.

Für innere Verknüpfungen verwenden wir Zeichen wie $\square$, $\circ$, $+$, $-$, $\cdot$, $:$, $\ldots$. Statt $f((a, b))$ (f dabei aus $\{\square, \circ, +, \ldots\}$) schreiben wir $f(a, b)$ bzw. afb, $a\square b$, $a \circ b$, $a + b$, $\ldots$.

Beispiele

(1.) Die gewöhnliche Addition auf der Menge der reellen Zahlen läßt sich wie folgt beschreiben: $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y$. Sie ist offenbar eine innere Verknüpfung auf $\mathbb{R}$.

(2.) Die Verkettung von Relationen $\square : \mathfrak{P}(A) \longrightarrow \mathfrak{P}(A), (R, Q) \mapsto R\square Q$ ist eine innere Verknüpfung auf der Menge $\mathfrak{P}(A)$.

Definition Seien A und K nichtleere Mengen.
Eine **äußere Verknüpfung auf** A **mit dem Skalarbereich** K ist eine Abbildung $\wedge_K : K \times A \longrightarrow A, (k, a) \mapsto k \wedge_K a$.

Beispiel Sei $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $K = \mathbb{R}$. Die Abbildung

$$\wedge_K : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (k, (x, y)) \mapsto (k \cdot x, k \cdot y)$$

($\cdot$ bezeichnet die übliche Multiplikation von reellen Zahlen) ist eine äußere Verknüpfung auf $\mathbb{R}^2$ mit dem Skalarbereich $\mathbb{R}$.

Definitionen Seien A und K nichtleere Mengen, R eine Äquivalenzrelation auf A, $\circ$ eine innere und $\wedge_K$ eine äußere Verknüpfung auf A. Man sagt

- R ist mit $\circ$ **verträglich** (**kompatibel**) $:\Longleftrightarrow$
  $\forall a, a', b, b' \in A : ((a, b) \in R \wedge (a', b') \in R) \Longrightarrow (a \circ a', b \circ b') \in R$.

- R ist mit $\wedge_K$ **verträglich** $:\Longleftrightarrow$
  $\forall a, b \in A \; \forall k \in K : (a, b) \in R \Longrightarrow (k \wedge_K a, k \wedge_K b) \in R$.

Die mit den Verknüpfungen auf einer Menge verträglichen Äquivalenzrelationen nennt man **Kongruenzen** dieser Menge.

Beispiel In $\mathbb{Z}$ ist $\equiv_n$ (die Kongruenz modulo n) mit der gewöhnlichen Addition und der gewöhnlichen Multiplikation verträglich (Beweis: ÜA A.1.36).

Der Sinn der obigen Definitionen ist der, daß man bei verträglichen R auf $A_{/R}$ mit Hilfe der Verknüpfungen $\circ$, $\wedge_K$ auf A ebenfalls Verknüpfungen einführen kann. Genaueres dazu im

Satz 1.4.5 (mit Definition) *Sei A eine Menge mit einer äußeren Verknüpfung $\wedge_K$ (K gewisse Menge) und einer inneren Verknüpfung $\circ$, die mit einer Äquivalenzrelation R auf A verträglich sind. Dann läßt sich auf $A_{/R}$ sinnvoll definieren:*

(1) $[a] \circ [b] := [a \circ b]$,
(2) $k \wedge_K [a] := [k \wedge_K a]$

($a, b \in A, k \in K$), d.h., die Definition der Verknüpfung $\circ$ bzw. $\wedge_K$ auf $A_{/R}$ ist unabhängig von der konkreten Wahl der sogenannten **Vertreter** *a, b der Äquivalenzklassen $[a]$, $[b]$.*

Beweis. (1): Seien $a, a' \in [a]$ und $b, b' \in [b]$. Wir haben $[a \circ b] = [a' \circ b']$ zu zeigen. Aus $a, a' \in [a]$ und $b, b' \in [b]$ folgt $(a, a') \in R$ und $(b, b') \in R$. Wegen der Verträglichkeit von $\circ$ mit R ergibt sich hieraus $(a \circ b, a' \circ b') \in R$, womit nach Satz 1.3.1, (2) $[a \circ b] = [a' \circ b']$ gilt.
(2) beweist man analog. ■

Beispiel
Auf der Menge $\mathbb{Z}_n$ ($= \{[0], [1], ..., [n-1]\}$) läßt sich mit Hilfe der gewöhnlichen Addition und Multiplikation eine **Addition modulo n** und eine **Multiplikation modulo n** definieren:

$$\begin{aligned} [a] + [b] &:= [a + b], \\ [a] \cdot [b] &:= [a \cdot b] \end{aligned}$$

($a, b \in \mathbb{Z}$).

1.5 Mächtigkeiten, Kardinalzahlen

Um festzustellen, ob für jeden Studenten in einem Raum ein Sitzplatz vorhanden ist, kann man auf zwei Arten vorgehen:

(1) Man zählt die Studenten, dann die Stühle und vergleicht.
(2) Man bittet die Studenten, Platz zu nehmen und schaut, ob Studenten oder Stühle übrig bleiben.

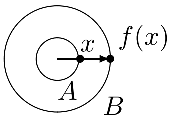
Die Methode (2) scheint auf den ersten Blick recht umständlich zu sein. Sie hat aber einen großen Vorteil: Man braucht dazu nicht Zählen zu können, muß jedoch in der Lage sein, eine bijektive Abbildung (Studenten $\longleftrightarrow$ Stühle) zu finden. Die Methode (2) wird von uns nachfolgend benutzt werden, um festzustellen, ob zwei „unendliche“ Mengen „gleich groß“ sind. Außerdem werden wir mit Hilfe der neu eingeführten Begriffe und Methoden in der Lage sein, solche von uns bisher intuitiv verwendeten Begriffe wie „endliche Menge“ und „unendliche Menge“ zu präzisieren. Darüberhinaus soll eine kurze Einführung in den Teil der Mengenlehre gegeben werden, der sich mit den Beziehungen zwischen unendlichen Mengen befaßt. Dem Leser sei empfohlen, die vorgestellten Ergebnisse nicht nach dem sogenannten „gesunden Menschenverstand“ und der Anschauung zu beurteilen, sondern staunend zu akzeptieren, daß im „Unendlichen“ andere Gesetze als im „Endlichen“ herrschen.

Definition Seien A und B Mengen. Man sagt
A ist **gleichmächtig** zu B $:\Longleftrightarrow \exists$ bijektive Abbildung f von A auf B.
Für „A ist gleichmächtig zu B“ schreiben wir kurz:

$$A \sim B.$$

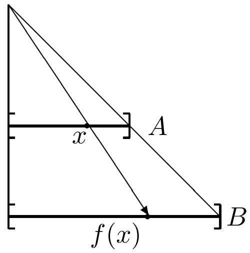
Nachfolgend einige **Beispiele** für gleichmächtige Mengen A und B, wobei ab dem dritten Beispiel die bijektiven Abbildungen f nur durch Zeichnungen charakterisiert werden, die mit mehr oder weniger Aufwand natürlich auch in Berechnungsvorschriften für die Abbildungen übersetzt werden können.

(1.) Offenbar sind endliche Mengen genau dann gleichmächtig, wenn sie die gleiche Anzahl von Elementen enthalten.
(2.) $A = \mathbb{N}_0$, $B = \mathbb{Z}$.
$f = \{(0,0),(1,1),(2,-1),(3,2),(4,-2),\ldots,(2\cdot k-1,k),(2\cdot k,-k),\ldots\}$.
(3.) [8] A sei Menge aller Punkte eines Kreises K_1,
B sei Menge aller Punkte eines Kreises K_2.
f :

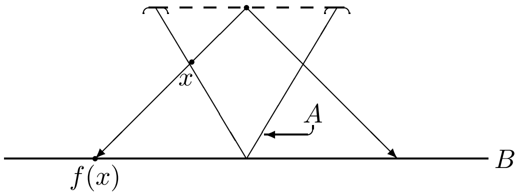


(4.) $A = [a,b]$, $B = [c,d] \subseteq \mathbb{R}$.
Faßt man die Mengen A und B als Punktmengen auf, die sich durch Strecken geometrisch veranschaulichen lassen, so ist eine bijektive Abbildung f von A auf B wie folgt beschreibbar:

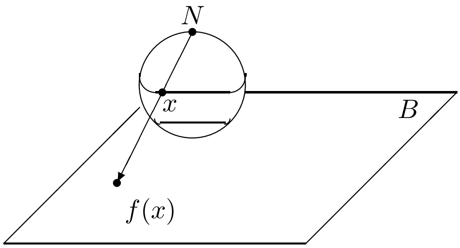
[8] Dieses Beispiel findet man bereits in mittelalterlichen Texten und es galt wie ähnliche Beispiele aus der Antike als paradox.



(5.) $A = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$.
Analog zu Beispiel (4.) lassen sich A als Punkte einer (geknickten) Strecke (ohne die zu a und b gehörenden Punkte) und B als Menge aller Punkte einer Geraden geometrisch veranschaulichen. Eine mögliche bijektive Abbildung f ergibt sich aus:



(6.) A sei die Menge aller Punkte auf einer Kugel ohne N („Nordpol"),
B sei die Menge aller Punkte einer Ebene.
f :



Lemma 1.5.1 *Sei M irgendeine Menge von Mengen. Dann ist die Relation*

$$R := \{(A, B) \in M^2 \mid A \textit{ ist gleichmächtig zu } B\}$$

eine Äquivalenzrelation auf M.

Beweis. Seien A, B, C beliebige Elemente aus M. Offenbar gilt $A \sim A$, da die identische Abbildung $\mathrm{id};_A$ eine bijektive Abbildung von A auf A ist. Falls f eine bijektive Abbildung von A auf B ist, haben wir mit f^{-1} nach Satz 1.4.3 eine Bijektion von B auf A.
Gilt $A \sim B$ und $B \sim C$, so existieren Bijektionen f und g mit $f : A \longrightarrow B$,

$g : B \longrightarrow C$. Wegen Satz 1.4.2, (2) ist $f\Box g$ eine bijektive Abbildung von A auf C, also A gleichmächtig zu C. Folglich ist R eine Äquivalenzrelation auf M. ■

Mit Hilfe der Gleichmächtigkeitsrelation $\sim$ kann man eine Menge M von Mengen nach Satz 1.4.4 in Äquivalenzklassen zerlegen, d.h., man faßt alle gleichmächtigen Mengen zu einer Klasse zusammen und sagt, sie haben die **gleiche Mächtigkeit** oder die **gleiche Kardinalzahl**. Unter der **Kardinalzahl** $|A|$ der Menge A versteht man dabei die „Gesamtheit“ aller zu A gleichmächtigen Mengen. („Gesamtheit“ müssen wir hier undefiniert lassen, da oben – wegen der bekannten Schwierigkeiten mit dem Mengenbegriff – M nicht als Menge aller Mengen gewählt werden konnte.)
Wir merken uns

- $|A| = |B|$ (bzw. card A = card B) $:\Longleftrightarrow A \sim B$

und vereinbaren folgende Bezeichnungen:

- $|\emptyset| := 0$,
- $|\{1, 2, 3, \ldots, n\}| := n$,
- $|\mathbb{N}| := \aleph_0$

  ($\aleph$ („Aleph“) ist der erste Buchstabe des hebräischen Alphabets.),
- $|\mathbb{R}| := \mathfrak{c}$ (oder auch $\aleph_1$).

Außerdem sei

- $|A| \le |B| :\Longleftrightarrow \exists$ injektive Abbildung von A in B,
- $|A| < |B| :\Longleftrightarrow (|A| \le |B| \wedge |A| \ne |B|)$.

Die oben beschriebene Relation $\le$ ist auf einer Menge von Kardinalzahlen offenbar reflexiv und transitiv. Außerdem kann man zeigen, daß $\le$ antisymmetrisch und linear ist (siehe dazu z.B. [Ale 67]). Es gilt damit:

Satz 1.5.2 *(ohne Beweis) Auf einer Menge von Kardinalzahlen ist die oben definierte Relation $\le$ eine lineare Ordnung. Mit anderen Worten: Für je zwei beliebig gewählte Mengen A und B gilt entweder $|A| = |B|$, $|A| < |B|$ oder $|B| < |A|$.*

Bemerkung (ohne Beweis)
Mit den Kardinalzahlen kann man fast wie mit den gewöhnlichen Zahlen umgehen, wenn man definiert:

$$\begin{array}{rcl} |A| + |B| & := & |A \cup B|, \\ |A| \cdot |B| & := & |A \times B|, \\ |A|^{|B|} & := & |A^B|, \end{array}$$

wobei o.B.d.A. $A \cap B = \emptyset$ und A^B die Menge aller Abbildungen von B in A bezeichnet. Es gilt dann nämlich für beliebige Kardinalzahlen a, b, c:

$$\begin{aligned}
&(a+b)+c = a+(b+c),\\
&a+b = b+a,\\
&a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c,\\
&(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c),\\
&a\cdot b = b\cdot a,\\
&a^{b+c} = a^b\cdot a^c,\\
&(a\cdot b)^c = a^c\cdot b^c,\\
&\left(a^b\right)^c = a^{b\cdot c},\\
&a\le b \Longrightarrow a+c\le b+c,\\
&a\le b \Longrightarrow (a\cdot c\le b\cdot c \wedge a^c\le b^c \wedge c^a\le c^b).
\end{aligned}$$

Weiter mit

Definitionen Sei A eine Menge. Man sagt

- A ist **unendlich** $:\Longleftrightarrow \exists B : B\subset A \wedge B\sim A$;
- A ist **endlich** $:\Longleftrightarrow$ A ist nicht unendlich.

Beispiel
Die Unendlichkeit der Menge $\mathbb{N}_0$ ergibt sich aus der Bijektion

$$f := \{(n, 2\cdot n) \mid n\in\mathbb{N}_0\}$$

von $\mathbb{N}_0$ auf die echte Teilmenge der geraden Zahlen von $\mathbb{N}_0$.

Eine erste Unterscheidung zwischen verschiedenen „Unendlichkeiten“ liefern die

Definitionen Sei A eine Menge. Dann heißt

- A **abzählbar (unendlich)** $:\Longleftrightarrow A\sim\mathbb{N}$;
- A **überabzählbar** $:\Longleftrightarrow$ A unendlich und nicht abzählbar.

Satz 1.5.3 *Seien A, A_i $(i\in\mathbb{N})$ abzählbare Mengen und B eine endliche Menge. Dann sind folgende Mengen ebenfalls abzählbar:*

(a) $A\backslash B,\ A\cup B$;

(b) $\forall n\in\mathbb{N}\backslash\{1\} : A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$;

(c) $\bigcup_{i\in I} A_i\ \ (I\subseteq\mathbb{N})$.

Beweis. (a): ÜA.
(b): Wir beweisen die Behauptung hier nur für $n=2$. Den allgemeinen Beweis führt man mit Hilfe der vollständigen Induktion und sei den Lesern als ÜA empfohlen.
Die Elemente von $A_1\times A_2$ kann man, falls $A_1=\{a_1,a_2,a_3,\ldots\}$ und $A_2=\{b_1,b_2,b_3,\ldots\}$, wie folgt aufschreiben und abzählen:

$$\begin{array}{ccccc}
(a_1,b_1) & (a_1,b_2) & (a_1,b_3) & (a_1,b_4) & \cdots \\
(a_2,b_1) & (a_2,b_2) & (a_2,b_3) & (a_2,b_4) & \cdots \\
(a_3,b_1) & (a_3,b_2) & (a_3,b_3) & (a_3,b_4) & \cdots \\
(a_4,b_1) & (a_4,b_2) & (a_4,b_3) & (a_4,b_4) & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

(d.h., unsere bijektive Abbildung von $A_1 \times A_2$ auf $\mathbb{N}$ sieht wie folgt aus: $(a_1, b_1) \mapsto 1$, $(a_1, b_2) \mapsto 2$, $(a_2, b_1) \mapsto 3, \ldots$).
(c) beweist man ähnlich wie (b) (ÜA A.1.57). ■

Zwei Folgerungen aus Satz 1.5.3 sind zusammengefaßt im

Satz 1.5.4

(a) $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$.
(b) A *abzählbar* $\Longrightarrow \{M \in \mathfrak{P}(A) \mid M$ *ist endlich*$\}$ *abzählbar.* ■

Satz 1.5.5 *Es sei A eine endliche oder abzählbare Menge, B eine unendliche Menge und C eine überabzählbare Menge. Dann gilt:*

(a) B *enthält eine abzählbare Menge.*
(b) $C \backslash A \sim C$.
(c) $A \cup B \sim B$.

Beweis. (a): Da B unendlich ist, gibt es in B ein Element a_1. Offenbar ist $B \neq \{a_1\}$, womit es in B ein von a_1 verschiedenes Element a_2 gibt. Wegen $B \neq \{a_1, a_2\}$, existiert ein $a_3 \in B \backslash \{a_1, a_2\}$. Setzt man diesen Prozeß fort, erhält man die abzählbare Teilmenge $\{a_i \,|\, i \in \mathbb{N}\}$ von B.
(b): O.B.d.A. sei $A \subseteq C$. Wegen $C = A \cup (C \backslash A)$ und Satz 1.5.2 kann $C \backslash A$ weder endlich noch abzählbar sein. Folglich ist $C \backslash A$ überabzählbar und enthält nach (a) eine abzählbare Teilmenge N. Sei $M := (C \backslash A) \backslash N$. Dann gilt $C \backslash A = N \cup M$ und $C = (A \cup N) \cup M$. Zwischen den abzählbaren Mengen N und $A \cup N$ gibt es eine bijektive Abbildung. Ordnet man außerdem jedem $x \in M$ wieder x zu, hat man eine bijektive Abbildung zwischen $C \backslash A$ und C erhalten, womit $C \backslash A \sim C$ gezeigt ist.

(c): Ist B abzählbar, so gilt (c) nach Satz 1.5.3. Ist B überabzählbar, so ist $A \cup B$ ebenfalls überabzählbar und mit Hilfe von (b) folgt (c) aus $B = (A \cup B) \backslash (A \setminus B) \sim A \cup B$. ■

Satz 1.5.6 *Die Menge* $(0,1)$ $(= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\})$ *ist nicht abzählbar.*

Beweis. Sei $x \in (0,1)$. Dann ist x darstellbar als unendlicher Dezimalbruch

$$x = 0.x_1x_2x_3x_4\ldots \quad (\forall i \in \mathbb{N}: \; x_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\})$$

ohne Neunerperiode. Angenommen, die Menge $(0,1)$ ist abzählbar. Dann lassen sich alle $x \in (0,1)$ wie folgt „aufzählen":

$$\begin{array}{ll} 0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\ldots & \\ 0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\ldots & \\ 0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}\ldots & \quad (\forall i,j \in \mathbb{N}: a_{ij} \in \{0,1,2,\ldots,9\}) \\ \vdots & \end{array}$$

Genauer, es gibt eine bijektive Abbildung f von $\mathbb{N}$ auf $(0,1)$ mit $f(n) = 0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}\ldots$, $n \in \mathbb{N}$. Wenn wir zeigen können, daß (ganz egal wie wir oben alle $x \in (0,1)$ angeordnet haben) mindestens eine reelle Zahl $y \in (0,1)$ in der Aufzählung nicht enthalten ist, hätten wir einen Widerspruch zur Annahme und unsere Behauptung wäre bewiesen. Ein solches y erhält man z.B. wie folgt:

$$\begin{array}{rcl} y & = & 0.y_1y_2y_3y_4\ldots\ , \text{ wobei} \\ y_i & := & \begin{cases} 0 & \text{falls } a_{ii} \neq 0, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (i \in \mathbb{N}) \end{array}$$

Die Zahl y ist von 0 verschieden, da die Zahlen $0,a0000...$ mit $a \in \{1,2,...,9\}$ in der oben angegebenen Aufzählung vorkommen müssen, womit $y_i = 1$ für gewisse i gilt. Nach Konstruktion haben wir außerdem $y \neq 0.a_{i1}a_{i2}...a_{ii}....$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Also ist $(0,1)$ nicht abzählbar. ■

Die Idee des Beweises von Satz 1.5.6 läßt sich auch verwenden zur Begründung des folgenden

Satz 1.5.7 *Seien A und B Mengen mit $A \neq \emptyset$ und B enthalte mindestens zwei Elemente. Außerdem sei die Menge aller Abbildungen von A in B mit B^A bezeichnet. Dann gilt*

$$|A| < |B^A|.$$

(D.h., es existiert von A auf eine echte Teilmenge von B^A eine bijektive Abbildung und A ist nicht zu B^A gleichmächtig.)

Beweis. Da $|B| \geq 2$, findet man in B zwei verschiedene Elemente α und β. Jedem a aus A kann man dann eineindeutig die Abbildung $f_a : A \longrightarrow B$ mit

$$f(x) := \begin{cases} \alpha & \text{für } x = a, \\ \beta & \text{sonst} \end{cases}$$

zuordnen. Folglich gibt es eine bijektive Abbildung von A auf eine echte Teilmenge von B^A.
Angenommen, $A \sim B^A$, d.h., es existiert eine Bijektion $\varphi : A \longrightarrow B^A$ mit $\varphi = \{(a, g_a) \mid a \in A\}$. Wenn wir eine Abbildung g finden könnten, die von jeder Abbildung g_a ($a \in A$) verschieden ist, hätten wir einen Widerspruch zu $|A| = |B^A|$ erhalten und die Behauptung bewiesen. Man prüft nun leicht nach, daß z.B. g mit

$$g(x) := \begin{cases} \alpha, & \text{falls } g_x(x) = \beta, \\ \beta, & \text{falls } g_x(x) \neq \beta \end{cases} \quad (x \in A)$$

die geforderten Eigenschaften besitzt. ■

Folgerungen aus dem obigen Satz sind zusammengefaßt im

Satz 1.5.8

(a) Für beliebige nichtleere Mengen A gilt $|A| < |\mathfrak{P}(A)|$.
(Also gibt es unendlich viele Kardinalzahlen!)

(b) $\mathbb{R} \sim \mathfrak{P}(\mathbb{N})$.

(c) $\mathbb{R} \sim \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

(d) $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}| = |\mathbb{C}|$.

Beweis. (a) folgt aus Satz 1.5.7, da man jede Teilmenge T von A auf eindeutige Weise durch die Abbildung $f_T : A \longrightarrow \{0, 1\}$ mit

$$f_T(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad x \in T, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

charakterisieren kann, womit $|\mathfrak{P}(A)| = |\{0, 1\}^A|$.
(b): Nachfolgend ist ein Beweis für (b) kurz skizziert. Eine ausführliche Begründung für die einzelnen Beweisschritte überlege man sich als ÜA (siehe dazu A.1.58 und A.1.60–A.1.63).
Bezeichne I die Menge aller reellen Zahlen x mit $0 < x < 1$. Bereits gezeigt haben wir $\mathbb{R} \sim I$. Jede reelle Zahl x aus I läßt sich in der Form

$$x = a_1 \cdot \frac{1}{2} + a_2 \cdot \frac{1}{2^2} + a_3 \cdot \frac{1}{2^3} + ... \; (= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \frac{1}{2^i})$$

$(a_1, a_2, ... \in \{0, 1\})$ darstellen. Folglich läßt sich x durch die Folge $(a_1, a_2, a_3, ...)$ charakterisieren. Diese Darstellung ist eindeutig, wenn $(a_1, a_2, a_3, ...)$ keine 1-Periode besitzt. Faßt man nun alle Folgen $(x_1, x_2, x_3, ...)$ mit $x_i \in \{0, 1\}$ $(i \in \mathbb{N})$ zur Menge F und die Folgen aus F mit einer 1-Periode zur Menge E zusammen, so kann man unter Verwendung von Satz 1.5.5 leicht $I \sim F \backslash E \sim F \sim \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ zeigen, woraus (b) folgt.
(c): Wählt man F wie oben, so ist z.B. die Abbildung

$$g : F \times F \longrightarrow F, \; (\,(a_1, a_2, a_3, ...), \; (b_1, b_2, b_3, ...)\,) \mapsto (a_1, b_1, a_2, b_2.a_3, b_3, ...)$$

bijektiv, womit $F \sim F \times F$ gilt. Als ÜA überlege man sich, daß hieraus (c) folgt.
(d): ÜA. ■

Erwähnt sei noch der folgende Satz, von dem wir uns Spezialfälle bereits oben überlegt haben und dessen Beweis man z.B. in [Ale 67] finden kann.

Satz 1.5.9 *(ohne Beweis)*
Seien A und B beliebig gewählte Mengen mit $|A| \leq |B|$ und B ist eine unendliche Menge. Dann gilt $|A \cup B| = |B|$ und, falls $A \neq \emptyset$, $|A \times B| = |B|$.

Eine abschließende **Bemerkung**: Oben wurde gezeigt, daß $\aleph_0 := |\mathbb{N}|$ die kleinste Kardinalzahl einer unendlichen Menge ist. Außerdem wurde $\aleph_0 < \aleph_1 := |\mathbb{R}|$ bewiesen. Ist die Bezeichnung $\aleph_1$ eigentlich gerechtfertig, d.h., gibt es keine Menge M mit $|\mathbb{N}| < |M| < |\mathbb{R}|$? Bereits Cantor vermutete 1884 in der sogenannte „Kontinuumshypothese", daß dies so ist, konnte es jedoch nicht beweisen. Die 1963 von P. J. Cohen gefundene Antwort auf die Frage ist überraschend:[9] Die Kontinuumshypothese (bzw. die Negation der Kontinuumshypothese) läßt sich weder beweisen, noch widerlegen. Man sagt, sie ist *unentscheidbar*. Mehr dazu findet man z.B. in [Deu 99], wo man auch die Originalbeweise von Cohen und der von ihm benutzten Ergebnisse anderer Mathematiker nachlesen kann. Wer sich für Unentscheidbarkeitsbeweise interessiert, dem sei [Rau 96] empfohlen. Verstehen kann man die dort angegebenen Beweise jedoch erst, nachdem man sich ausführlich mit Mathematischer Logik beschäftigt hat. Da die Mathematische Logik ein wichtiger Bestandteil der Grundlagenmathematik bildet, wollen wir einige Anfangsüberlegungen dieser Theorie im nächsten Abschnitt behandeln.

1.6 Boolesche Funktionen und Prädikate

Definitionen Es sei $B := \{0, 1\}$, $n \in \mathbb{N}$, M eine nichtleere Menge und $R \subseteq M^n$ eine n-stellige Relation über M.

- Eine **n-stellige Boolesche Funktion**[10] (**n-stellige binäre Funktion**) ist eine Abbildung f von B^n in B, d.h., $f : B^n \longrightarrow B$.

- Eine Abbildung $P : M^n \longrightarrow B$ heißt **n-stelliges Prädikat über** M.

- R und das n-stellige Prädikat P über M heißen **äquivalent** (bzw. **induzieren einander**), falls für alle $(a_1, ..., a_n) \in M^n$ gilt:

$$(a_1, ..., a_n) \in R \iff P(a_1, ..., a_n) = 1.$$

[9] Für diese Leistung erhielt Paul Joseph Cohen (1934–2007) auf dem Internationalen Mathematikerkongreß 1966 in Moskau die Fields-Medaille, die eine Art Nobel-Preis für Mathematiker darstellt, verliehen.

[10] Benannt nach George Boole (1815–1864), einem englischen Mathematiker und Philosophen. G. Boole ist einer der Begründer der modernen mathematischen Logik.

Zur Kennzeichnung der Stelligkeit n von f bzw. P schreiben wir auch $f^{(n)}$ bzw. $P^{(n)}$.

Mit den Prädikaten beschäftigen wir uns am Ende dieses Abschnitts. Zunächst jedoch **Beispiele** für Boolesche Funktionen:
Für $n = 1$ gibt es genau vier verschiedene Boolesche Funktionen, die in folgender Tabelle definiert sind:

x	$c_0(x)$	$c_1(x)$	$e(x)$	$non(x)$
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

.

Anstelle von $non(x)$ schreiben wir auch $\overline{x}$ (oder $\neg x$).
Für $n = 2$ gibt es 16 verschiedene Boolesche Funktionen, von denen 5 ($\wedge$, $\vee$, $+$, $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$) in der folgende Tabelle definiert sind. Dabei sei $\circ(x, y) := x \circ y$ für $\circ \in \{\wedge, \vee, +, \Longrightarrow, \Longleftrightarrow\}$ vereinbart.

x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$	$x + y$	$x \Longrightarrow y$	$x \Longleftrightarrow y$
0	0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	1	1	0	1	1

.

Die Erklärung für die verwendeten Symbole findet man weiter unten. Anstelle von $x \wedge y$ schreiben wir auch $x \cdot y$ oder kurz xy. Allgemein lassen sich Booleschen Funktionen $f^{(n)}$ durch Tabellen der Form

x_1	x_2	$\ldots$	x_n	$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
0	0	$\ldots$	0	$f(0, 0, \ldots, 0)$
0	0	$\ldots$	1	$f(0, 0, \ldots, 1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\vdots$
a_1	a_2	$\ldots$	a_n	$f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$
$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\vdots$
1	$\vdots$	$\ldots$	1	$f(1, 1, \ldots, 1)$

(jedenfalls theoretisch) angeben. Effektivere Beschreibungen folgen weiter unten.
Anwendungen finden bzw. untersucht werden die Booleschen Funktionen vorrangig in der

- Aussagenlogik und
- bei der mathematischen Beschreibung von Schaltungen bzw. den Bauelementen von Computern.

Wir befassen uns hier nur mit einigen Eigenschaften der Booleschen Funktionen, die sich aus ihren Anwendungen in der Aussagenlogik ergeben.

Aussagen und Aussagenverbindungen

Definition Eine **Aussage** ist ein Satz (einer natürlichen oder künstlichen Sprache), von dem es sinnvoll ist zu fragen, ob er wahr (Bezeichnung: 1) oder falsch (Bezeichnung: 0) ist. Wir nehmen dabei an, daß jede Aussage entweder wahr oder falsch ist (sogenanntes „Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten“).

Beispiele für Aussagen sind:

- $2 + 2 = 5$.
- Rostock liegt an der Warnow.
- Im Weltall gibt es außerirdische Lebewesen (Vulkanier, Klingonen, Romulaner, Cardassianer, ...).

Keine Aussagen sind z.B.:

- Zwei Hühner auf dem Weg nach vorgestern.
- Alles was ich sage, ist falsch.
- Heute ist schönes Wetter.
- Seid leise!

Aussagen werden zumeist mit großen lateinischen Buchstaben $A, B, \ldots$ bezeichnet. Anstelle von „A sei eine beliebige Aussage“ sagt man „A sei eine Aussagenvariable“. Eine Aussagenvariable nimmt also die Werte 0 und 1 an. Aussagen (Sätze) werden in der Umgangssprache (u.a. durch Bindewörter wie „und“, „oder“, „wenn–dann“,...) auf vielfache Weise verknüpft. Das Ergebnis dieser Verknüpfung liefert in der Regel wieder eine Aussage, deren Wert (0 oder 1) abhängig ist von den der verknüpften Einzelaussagen. Im Rahmen der Aussagenlogik werden ein Teil der umgangssprachlichen Verknüpfungen modelliert, in Teilen sogar erst präzise formuliert. Da wir bei Aussagen von ihrem Inhalt abstrahieren, uns also nur ihr sogenannter **Wahrheitswert** 0 oder 1 interessiert, sind Aussagenverbindungen mehrstellige Funktionen über $\{0, 1\}$, also unsere oben definierten Booleschen Funktionen (auch **Wahrheitswertfunktionen** oder **Funktionen der zweiwertigen Logik** genannt).
Deutungen für einige der oben in Tabellen definierten Booleschen Funktionen sind dann:

- **Negation** der Aussage $A:\ \overline{A}$ („nicht A“).
  $\overline{A}$ ist genau dann wahr, wenn A falsch ist.
- **Konjunktion** der Aussagen A, $B:\ A \wedge B$ („A und B“).
  $A \wedge B$ ist genau dann wahr, wenn A und B wahr sind.
- **Disjunktion** der Aussagen A, $B:\ A \vee B$ („A oder B“).
  $A \vee B$ ist genau dann wahr, wenn A oder B oder A und B den Wert 1 haben.
  $\vee$ entspricht also dem umgangssprachlichen „oder“, sofern dieses im nichtausschließenden Sinne verwendet wird.
- **Kontravalenz**: $A + B$ („entweder A oder B“).
  $A + B$ ist genau dann wahr, wenn entweder A oder B wahr ist.

- **Äquivalenz**: $A \Longleftrightarrow B$ („A genau dann, wenn B").
  $A \Longleftrightarrow B$ ist genau dann wahr, wenn A und B denselben Wahrheitswert haben.
- **Implikation**: $A \Longrightarrow B$ („Aus A folgt B"; „Wenn A, so B").
  $A \Longrightarrow B$ ist genau dann falsch, wenn A den Wert 1 und B den Wert 0 annimmt.
  $A \Longrightarrow B$ ist also immer wahr, wenn A falsch ist. Umgangssprachlich hat dies keine Bedeutung, weil man Aussagen wie „Wenn der Elefant fliegen kann, dann ist der Schnee weiß." oder „Wenn $2+2=7$, dann ist 2 keine Primzahl." als sinnlos ansieht. Da wir jedoch vom konkreten Inhalt der Aussagen A, B abstrahieren, sind auch Festlegungen für $0 \Longrightarrow 0$ und $0 \Longrightarrow 1$ zu treffen. Daß obige Festlegungen sinnvoll sind, sieht man z.B. anhand der Bildung von $\overline{A \Longrightarrow B} = A \wedge \overline{B}$.

Mit Hilfe eines Alphabets für Bezeichnungen der Aussagenvariablen, 0, 1, Klammern und den oben eingeführten Zeichen $\bar{}$, $\wedge$, $\vee$, $\Longleftrightarrow$, $\Longrightarrow$, $+$ lassen sich kompliziertere Aussagen (sogenannte **Formeln** (**Ausdrücke**) **der Aussagenalgebra**) aufbauen. Z.B.

$$((A \wedge B) \Longrightarrow (B \vee \overline{(C \Longrightarrow A)})).$$

Ausführlich behandeln wir das nachfolgend.

Beschreibung von Booleschen Funktionen mittels Boolescher Terme (Formeln, Ausdrücke)

Da eine Tabellendarstellung Boolescher Funktionen nur sehr eingeschränkt verwendbar ist, besteht ein naheliegender Gedanke darin, sie durch Formeln zu beschreiben.

Definition

(a) Die Konstanten 0, 1 sowie die Variablen x, y, z, $\ldots$, x_1, x_2, x_3, $\ldots$ sind für sich genommen **Boolesche Terme** (**Formeln**, **Ausdrücke**).
(b) Ist A ein Boolescher Term, so auch $\overline{A}$ (bzw. $(\neg A)$).
(c) Sind A und B Boolesche Terme, so auch

$$(A \wedge B),\ (A \vee B),\ (A \Longrightarrow B),\ (A \Longleftrightarrow B),\ (A + B).$$

(d) Jeder Boolesche Term entsteht, indem die Regeln (b) und (c) endlich oft angewendet werden, wobei die Booleschen Terme aus Regel (a) als Ausgangspunkte dienen.

Nachfolgend nennen wir Boolesche Terme kurz nur Terme. Bei den Termangaben lassen wir außerdem die nach der obigen Bildungsvorschrift entstehenden Außenklammern weg.
Den Termen kann man Boolesche Funktionen zuordnen:
Sei A ein Term, in dem nur Variable aus der Menge $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ vorkommen.

Mittels

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) := A$$

ist dann eine n-stellige Boolesche Funktion definierbar, wobei obige Vorschrift bedeutet, daß bei konkreter Belegung der x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ mit 0 oder 1 der zugehörige Funktionswert sich anhand der Formel A errechnet.
Man beachte, daß jedem Term unendlich viele Boolesche Funktionen zugeordnet werden können. Außerdem können verschiedene Terme gleiche Funktionen beschreiben.
Interessiert sind wir natürlich nur an einfachen Termen. Zum Auffinden möglichst einfacher Beschreibungen (Terme) Boolescher Funktionen werden wir uns anschließend einige Regeln des „Umbauens“ von Termen zusammenstellen, die es uns ermöglichen werden, aus komplizierten Termen solche etwas überschaubarer Struktur abzuleiten.
Zunächst soll jedoch die Gleichheit von Termen definiert werden.
Definition Terme T_1, T_2 heißen **gleich** (**äquivalent**, **gleichwertig**; Bezeichnung: $T_1 = T_2$), wenn bei jeder Belegung der in T_1 und T_2 vorkommenden Aussagenvariablen A_i mit Werten aus $\{0, 1\}$ T_1 und T_2 denselben Wahrheitswert annehmen. Beispiele für äquivalente Formeln sind im nächsten Satz angegeben.

Satz 1.6.1 *Es gilt:*

(a) $\forall \circ \in \{\vee, \wedge, \Longleftrightarrow, +\} : x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$;
(b) $x \vee x = x,\ x \wedge x = x,\ x \Longleftrightarrow x = 1,\ x \Longrightarrow x = 1,\ x + x = 0,$
$x \vee 0 = x,\ x \wedge 1 = x,\ x \vee 1 = 1,\ x \wedge 0 = 0$;
(c) $\forall \circ \in \{\vee, \wedge, \Longleftrightarrow, +\} : x \circ y = y \circ x$;
(d) $x \wedge \overline{x} = 0,\ x \vee \overline{x} = 1,\ \overline{\overline{x}} = x,$
$\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y},\ \overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$;
(e) $\overline{x \Longrightarrow y} = x \wedge \overline{y}$;
(f) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z),\ x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$;
(g) $x \wedge (x \vee y) = x, x \vee (x \wedge y) = x$.

Beweis. ÜA. ■

Mit Hilfe der im Satz 1.6.1 angegebenen Identitäten lassen sich Boolesche Terme vereinfachen (sogenannte „**algebraische Methode**“).

Beispiele

(1.) $(((xy \vee xz) \vee (x(yz))) \vee y) \vee z$
Wegen Satz 1.6.1 können wir auf einen Teil der Klammern in diesem Term verzichten, wenn vereinbart wird, daß $\cdot$ $(= \wedge)$ stärker bindet als $\vee$:
$xy \vee xz \vee xyz \vee y \vee z$.
Zusammenfassungen sind dann (nach Satz 1.6.1) wie folgt möglich:

$$xy \vee xz \vee xyz \vee y \vee z = y \vee z$$

$$y \qquad z \quad z$$

(2.) $\overline{(x \vee \overline{y})(x \vee z)} = \overline{(xx \vee xz \vee \overline{y}x \vee \overline{y}z)} = \overline{(x \vee \overline{y}z)} = \overline{x}(y \vee \overline{z}) = \overline{x}y \vee \overline{x}\,\overline{z}$.
(3.) $((x \vee \overline{x}) \wedge y) \vee \overline{y} = (1 \wedge y) \vee \overline{y} = 1$.

Definition Ein Boolescher Term heißt **Tautologie** (oder **allgemeingültiger Ausdruck**), wenn er zu 1 äquivalent ist.

Tautologien liefern sogenannte Gesetze der Aussagenalgebra, d.h., jede Tautologie ist das Schema einer Schar von Aussagen, die auf Grund ihrer logisch sprachlichen Struktur, also unabhängig vom konkreten Inhalt, wahr sind. Das systematische Aufsuchen derartiger Schemata gehört zu den ältesten Aufgaben der Logik.
Terme F_1, F_2 sind übrigens gleich, wenn $F_1 \Longleftrightarrow F_2$ eine Tautologie ist.
Läßt sich nun jede Boolesche Funktion mit Hilfe eines Terms beschreiben? Antwort wird Satz 1.6.2 geben. Zunächst jedoch ein **Beispiel**:
Für die durch die nachfolgende Tabelle definierte dreistellige Funktion f gilt

$$f(x, y, z) = (\overline{x}y\overline{z}) \vee (x\overline{y}\,\overline{z}) \vee (xyz).$$

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Jede der in der Formel für f auftretende Konjunktionen „realisiert“ dabei eine 1 von den Funktionswerten von f. Unter Verwendung der Schreibweise

$$x^\alpha := \begin{cases} \overline{x} & \text{für } \alpha = 0, \\ x & \text{für } \alpha = 1 \end{cases} \quad (\alpha \in \{0, 1\})$$

läßt sich f auch wie folgt charakterisieren:

$$f(x, y, z) = (x^0y^1z^0) \vee (x^1y^0z^0) \vee (x^1y^1z^1).$$

Die so erhaltene Darstellung von f nennt man disjunktive Normalform von f. Allgemein gilt:

Satz 1.6.2 *Jede n-stellige Boolesche Funktion f läßt sich mittels der sogenannten* ***disjunktiven Normalform*** *(Bezeichnung:* ***DNF****) beschreiben:*

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \bigvee_{(a_1,\ldots,a_n)\in\{0,1\}^n} f(a_1,\ldots,a_n)\cdot x_1^{a_1}\cdot x_2^{a_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{a_n},$$

wobei

$$x^\alpha := \begin{cases} \overline{x} & \text{für } \alpha = 0, \\ x & \text{für } \alpha = 1 \end{cases} \quad (\alpha\in\{0,1\})$$

bzw., falls f nicht nur den Wert 0 annimmt,

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \bigvee_{\substack{(a_1,\ldots,a_n)\in\{0,1\}^n\\ f(a_1,\ldots,a_n)=1}} x_1^{a_1}\cdot x_2^{a_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{a_n}.$$

(Obige Formeln besagen, daß für jedes Tupel $(a_1,\ldots,a_n)\in\{0,1\}^n$ die „Konjunktion“

$$f(a_1,\ldots,a_n)\wedge x_1^{a_1}\wedge\ldots\wedge x_n^{a_n} \text{ bzw. } x_1^{a_1}\wedge\ldots\wedge x_n^{a_n}$$

aufgeschrieben wird. Anschließend werden dann diese Konjunktionen durch $\vee$ miteinander verknüpft. Auf das Setzen einer Vielzahl von Klammern kann dabei wegen Satz 1.6.1 verzichtet werden (siehe dazu auch Kapitel 2). ■

Es sei bemerkt, daß die disjunktive Normalform nur eine von vielen Möglichkeiten ist, sämtliche Booleschen Funktionen durch eine gewisse Formelstruktur zu beschreiben.
Oft liefert die disjunktive Normalform eine zu komplizierte Beschreibung einer Booleschen Funktion (z.B. gilt $x\vee y = \overline{x}y\vee x\overline{y}\vee xy$).
Wie findet man aber (ausgehend von einer disjunktiven Normalform) eine „verkürzte Darstellung“ (d.h., weniger Konjunktionen und innerhalb einer Konjunktion möglichst wenig Variable) für eine gegebene Boolesche Funktion?
Nachfolgend soll anhand eines Beispiels ein mögliches Verfahren (genauer: das **Quine-McCluskey-Verfahren**) vorgestellt werden: Sei

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

.

Die disjunktive Normalform

$$xyz \vee xy\overline{z} \vee \overline{x}y\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}z \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$$

dieser Funktion läßt sich dann mit Hilfe des folgenden Verfahrens „verkürzen“:
1. Schritt: Durch systematisches Anwenden von

$$\begin{aligned} xy \vee x\overline{y} &= x, \\ xy &= yx, \\ x \vee x &= x \end{aligned}$$

fasse man möglichst viele Konjunktionen zusammen.
Ausgangspunkt dieser Zusammenfassungen ist die **1. geordnete Liste der Konjunktionen**, in der die Konjunktionen aus der disjunktiven Normalform nach der Anzahl der auftretenden Negationszeichen geordnet sind:

Nummer der Konjunktion	Konjunktion
1.	xyz
2.	$xy\overline{z}$
3.	$\overline{x}y\overline{z}$
4.	$\overline{x}\,\overline{y}z$
5.	$\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$

Zusammenfassungen mittels der Regel $xy \vee x\overline{y} = x$ (unter Beachtung von $xy = yx$) sind dann nur bei Konjunktionen möglich, die zu benachbarten „Gruppen“ in obiger Liste gehören. Man erhält dann folgende 1. Zusammenfassung:

Nummern der zusammengefaßten Konjunktionen	Ergebnis der Zusammenfassungen
1., 2.	xy
2., 3.	$y\overline{z}$
3., 5.	$\overline{x}\,\overline{z}$
4., 5.	$\overline{x}\,\overline{y}$.

Sortiert man nun die erhaltenen Konjunktionen nach gleichen Variablen und anschließend nach der Anzahl der auftretenden Negationszeichen, so erhält man die **2. geordnete Liste der Konjunktionen**:

Nr. der Konj.	Konjunktion
1.	xy
2.	$\overline{x}\,\overline{y}$
3.	$\overline{x}\,\overline{z}$
4.	$y\overline{z}$

Da keine weitere Zusammenfassung mehr möglich ist, sind wir mit Schritt 1 fertig. Als erste verkürzte Darstellung für f haben wir damit

$$f(x, y, z) = xy \vee \overline{x}\,\overline{y} \vee \overline{x}\,\overline{z} \vee y\overline{z}$$

erhalten.

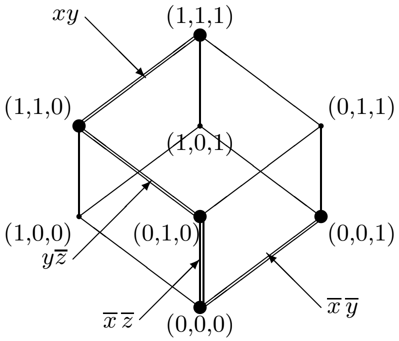
2. Schritt: Man lasse diejenigen Konjunktionen in der durch Schritt 1 erhaltenen Darstellung für f weg, die überflüssig sind.
Anhand der Tabelle

x	y	z	xy	$\overline{x}\,\overline{y}$	$\overline{x}\,\overline{z}$	$y\overline{z}$	f
0	0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	0	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	1	0	0	0	1

sieht man, daß z.B. $y\overline{z}$ überflüssig ist. Wir erhalten zum Abschluß unseres Verfahrens damit die folgende minimale DNF:

$$f(x, y, z) = xy \vee \overline{x}\,\overline{y} \vee \overline{x}\,\overline{z}.$$

Es sei noch bemerkt, daß man sich die obige verkürzte Darstellung sowie einige andere Möglichkeiten anhand folgender geometrischen Darstellung der dreistelligen Funktion f überlegen kann:
Man deute die Tupel $(x, y, z) \in \{0, 1\}^3$ als Ecken eines Würfels wie unten angegeben und kennzeichne diejenigen Ecken, die zu den Tupeln gehören, auf denen f den Wert 1 annimmt:



Man sieht nun leicht, daß Konjuktionen der Form u^a ($u \in \{x, y, z\}$) Seitenflächen, Konjunktionen der Form $u^a v^b$ ($u, v \in \{x, y, z\}$) Seitenkanten und Konjunktionen der Bauart $x^a y^b z^c$ Eckpunkte des Würfels charakterisieren.
Folglich läßt sich f auch durch die Formel

$$xy \vee y\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}$$

beschreiben.

Zu Booleschen Funktionen abschließend noch eine **Bemerkung** (ohne Beweis): Ausgangspunkt obiger Darstellung Boolescher Funktionen waren die Konjunktion, die Disjunktion und die Negation, mit deren Hilfe wir alle anderen Booleschen Funktionen darstellen konnten. Muß dies unbedingt sein? Könnte man nicht auch von beliebigen Funktionen f, g, h, ... ausgehen und versuchen, durch Ineinandereinsetzen dieser Funktionen sowie Umordnen und Identifizieren von Variablen alle anderen Booleschen Funktionen (etwa in der Art $f(g(\ldots),h(\ldots),\ldots)$) auszudrücken? Welche Eigenschaften müssen dann solche Funktionen besitzen, falls dies gelingt?
Bei der Beantwortung dieser Fragen sind mehrstellige Relationen und der Begriff des Bewahrens von Relationen durch Funktionen hilfreich:
Man sagt, eine n-stellige Funktion f **bewahrt die h-stellige Relation** R ($h \in \mathbb{N}$), wenn für beliebige $(a_1, a_2, \ldots, a_h)$, $(b_1, b_2, \ldots, b_h)$, $(c_1, c_2, \ldots, c_h), \ldots \in R$ stets $(f(a_1,b_1,c_1,\ldots),\ f(a_2,b_2,c_2,\ldots),\ \ldots,\ f(a_h,b_h,c_h,\ldots)) \in R$ gilt.
Beispiel Die durch die Tabelle

x	y	$f(x,y)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

definierte Funktion f bewahrt die (einstellige) Relation $\{1\}$, jedoch nicht die (zweistellige) Relation $\{(0,1),(1,0)\}$, da $(f(0,0), f(1,1)) = (1,1) \notin \{(0,1),(1,0)\}$.
Es gilt dann:
Eine beliebige Boolesche Funktion ist genau dann mittels Superposition (Ineinandereinsetzen von Funktionen in Funktionen, Umordnen der Variablen, Identifizieren von Variablen) aus Elementen einer Menge A von Booleschen Funktionen erzeugbar, wenn zu jeder der 5 Relationen

$$\begin{aligned}
R_0 &:= \{0\},\\
R_1 &:= \{1\},\\
R_2 &:= \{(0,1),(1,0)\},\\
R_3 &:= \{(0,0),(0,1),(1,1)\},\\
R_4 &:= \{(a,b,c,d) \in \{0,1\}^4 \mid a+b = c+d \ (\mathrm{mod}\, 2)\}\\
&= \{(0,0,0,0),(0,0,1,1),(0,1,0,1),(0,1,1,0),\\
&\qquad (1,1,1,1),(1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1)\}
\end{aligned}$$ [11]

in A eine Funktion existiert, die diese Relation nicht bewahrt. Ausführliche Informationen zu diesem von E. L. Post aus dem Jahre 1920 stammenden sogenannten Vollständigkeitskriterium für die zweiwertige Logik entnehme man Band 2, [Pös-K 79] oder [Jab-L 80]. Hier soll dieses Kriterium nur noch anhand eines **Beispiels** erläutert werden:
Sei $A = \{f\}$ und f durch die Tabelle

[11] Nur sogenannte lineare Funktionen, das sind Funktionen $f^{(n)}$, die durch Formeln der Gestalt $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_0 + a_1 \cdot x_1 + \ldots + a_n \cdot x_n \ (\mathrm{mod}\, 2)$ beschrieben werden können, bewahren diese Relation.

x	y	$f(x,y)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

definiert. Offenbar bewahrt f nicht R_0 und R_1. Wegen

$$(f(0,1), f(1,0)) = (0,0)$$

bewahrt f nicht R_2 und wegen

$$(f(0,0), f(0,1)) = (1,0)$$

nicht R_3. Aus

$$(f(0,0), f(0,1), f(1,0), f(1,1)) = (1,0,0,0)$$

folgt außerdem, daß f nicht R_4 bewahrt. Damit lassen sich durch f mittels Superposition alle anderen Booleschen Funktionen erzeugen. Diese Eigenschaft von f kann man sich aber auch auf folgende Weise überlegen:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \overline{x} \wedge \overline{y}, \\ f(x,x) &= \overline{x}, \\ f(f(x,x), f(y,y)) &= x \wedge y \quad \text{und} \\ f(f(x,y), f(x,y)) &= x \vee y, \end{aligned}$$

womit nach Satz 1.6.2 aus f alle anderen Booleschen Funktionen durch Superposition erzeugbar sind.

Der Rest dieses Abschnitts beschäftigt sich mit einer Anwendung des eingangs definierten Begriffs *Prädikat*, indem eine Einführung in die

Prädikatenlogik erster Stufe

gegeben wird.[12]
Falls es gelingt, einen Sachverhalt, dessen Wahrheitsgehalt zu überprüfen ist, durch einen Booleschen Term zu beschreiben, hatten wir oben eine einfache Methode erhalten, durch formales Rechnen dem Booleschen Term den Wert 0 oder 1 zuzuordnen. Wir wollen diese Methode ausdehnen auf Aussagen über Relationen und Operationen, die über einer Menge M definiert sind. Zunächst ein **Beispiel**: Es sei $M := \{0,1,2\}$, $R_1 := \{(x,y) \in M^2 \,|\, x = y\}$, $R_2 := \{(0,1),(0,2),(1,2)\}$ und $f(x,y) := x + y \pmod 3$ für alle $x, y \in M$. Wir schreiben $x < y$, falls $(x,y) \in R_2$. Die (offenbar falsche) Aussage

$$A\text{: } \textit{Falls } f(0,2) = 2 \textit{ und } 0 < 2 \textit{ gilt, ist } 2 < 2,$$

[12] Es ist zu empfehlen, sich diesen Abschnitt nach dem Lesen des zweiten Kapitels nochmals anzusehen. Außerdem sollte man sich nicht durch die vielen Formeln abschrecken lassen, sondern sich vielmehr klarmachen, daß mit der Formelsprache vertraute Dinge exakt definiert oder in eine Sprache übersetzt werden, die Grundlage von Programmierungen sein können.

ist zwar unter Verwendung unserer im Abschnitt 1.1 vereinbarten Symbole auch in der Form

$$(f(0,2) = 2 \wedge (0 < 2)) \Longrightarrow (2 < 2) \tag{1.2}$$

aufschreibbar, jedoch können wir die Zeichen $\wedge$ und $\Longrightarrow$ nicht als Boolesche Funktionen interpretieren, da $f(0,2) = 2$, $0 < 2$ und $2 < 2$ nicht 0 oder 1 sind. Ordnet man jedoch der Relation R_i $(i = 1,2)$ das von R_i induzierte Prädikat P_i zu, läßt sich (1.2) wie folgt aufschreiben:

$$\varphi := (P_1(f(0,2),2) \wedge P_2(0,2)) \Longrightarrow P_2(2,2), \tag{1.3}$$

wobei

x	y	$P_1(x,y)$	$P_2(x,y)$
0	0	1	0
0	1	0	1
0	2	0	1
1	0	0	0
1	1	1	0
1	2	0	1
2	0	0	0
2	1	0	0
2	2	1	0

Wegen

$$(\underbrace{P_1(f(0,2),2)}_{=1} \wedge \underbrace{P_2(0,2)}_{=1}) \Longrightarrow \underbrace{P_2(2,2)}_{=0} \tag{1.4}$$

gilt $\varphi = 0$, d.h., die Aussage A ist falsch und wir konnten dies unter Verwendung der Booleschen Funktionen $\wedge$ und $\Longrightarrow$ ausrechnen.
Wir betrachten als nächstes die Aussage

B: *Für alle* $x, y, z \in M$ *gilt: Falls* $f(x,y) = z$ *und* $x < y$, *ist* $y < z$,

die man auch in der Form

$$\psi := \forall x \in M \forall y \in M \forall z \in M (P_1(f(x,y),z) \wedge P_2(x,y)) \Longrightarrow P_2(y,z)) \tag{1.5}$$

aufschreiben kann. Legt man fest, daß eine Formel der Form

$$\forall x \in M \forall y \in M \forall z \in M \ \varphi(x,y,z)$$

genau dann den Wert 1 annimmt, wenn $\varphi(a,b,c) = 1$ für alle $(a,b,c) \in M^3$ gilt, hat ψ wegen $\varphi(0,2,2)$ den Wert 0.

Wir verallgemeinern obiges Beispiel, indem wir zunächst festlegen, welche Art von Formeln wir betrachten wollen, die aus vorgegebenen Zeichen nach gewissen Regeln gebildet werden, d.h., wir legen die *Syntax*[13] der Prädikatenlogik fest. Danach wird definiert, wie man diesen Formeln einen Wahrheitswert (wie üblich mit 0 oder 1 bezeichnet) zuordnen kann, wenn man den verwendeten Zeichen einen gewissen Sinn gibt, d.h., wir behandeln die *Semantik*[14] der Prädikatenlogik.

[13] Allgemein versteht man unter *Syntax* die Lehre vom Aufbau der Wortverbindungen und Sätze einer Sprache.

[14] Unter Semantik verstehen wir hier die *formale Semantik* bzw. die *Bedeutungslehre*, die sich mit dem Sinn und der Bedeutung von Zeichen befaßt.

Um die Formeln der Prädikatenlogik erster Stufe zu definieren, wählen wir zunächst zwei Indexmengen I und J, wobei $I = \emptyset$ möglich ist. Jedem $i \in I$ und jedem $j \in J$ ordnen wir dann ein gewisses $n_i \in \mathbb{N}_0$ bzw. $m_j \in \mathbb{N}$ zu. Die so gewählten Zahlen fassen wir zu einer sogenannten **Signatur** zusammen:

$$\delta := ((n_i)_{i \in I}, (m_j)_{j \in J}).$$

Z.B. $I := \{1, 2\}$, $J := \{1, 2, 3\}$ und $\delta := ((0, 2), (1, 2, 2))$, d.h., $n_1 = 0$, $n_2 = 2$, $m_1 = 1$, $m_2 = m_3 = 2$.
Die Indexmengen I und J sowie die Signatur δ dienen dazu, Operations- und Relationssymbole zu unterscheiden und jedem Symbol eine gewisse Stelligkeit zuzuordnen. Außerdem benötigen wir:

- die Menge $Var := \{x_1, x_2, x_3, ...\}$ der **Variablen**;
- die Menge $\mathfrak{F} := \{f_i^{n_i} \mid i \in I\}$ der **Operationssymbole**, wobei n_i die Stelligkeit des Operationssymbols $f_i^{n_i}$ angibt;
- die Menge $\mathfrak{F}^{(n)}$ aller n-stelligen Operationssymbole aus $\mathfrak{F}$, $n \in \mathbb{N}_0$;
- die Menge $\mathfrak{P} := \{P_j^{m_j} \mid j \in J\}$ der **Prädikatenymbole**, wobei m_j die Stelligkeit des Prädikats $P_j^{m_j}$ angibt;
- die Menge der **Junktoren** $\mathfrak{J} := \{\wedge, \vee, \neg, \Longrightarrow, \Longleftrightarrow, \exists, \forall\}$ [15]
  ($\exists$ nennt man **Existenzquantor** und $\forall$ heißt **Allquantor**);
  $\mathfrak{J}_0 := \{\wedge, \vee, \neg, \Longrightarrow, \Longleftrightarrow\}$;
- die Menge der **Klammersymbole** $\{(,)\}$.

Falls sich die Stelligkeiten der Operations- und Prädikatensymbole aus dem Zusammenhang ergeben, lassen wird die entsprechenden Indizes weg.

Mit Hilfe von Var und $\{f_i^{n_i} \mid i \in I\}$ können wir die Menge $T(Var)$ aller **Terme** als *kleinste* Menge mit den folgenden zwei Eigenschaften bilden:

(1) $Var \cup \mathfrak{F}^{(0)} \subseteq T(X)$,
(2) Falls $f \in \mathfrak{F}^{(n)}$ $(n \geq 1)$ und $\{t_1, ..., t_n\} \subseteq T(X)$, dann gehört auch $f(t_1, ..., t_n)$ zu $T(Var)$.

Beispiel Es sei $I := \{1\}$, $n_1 = 1$ und $f := f_1$. Dann gilt

$$T(X) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{x_i, f(x_i), f(f(x_i)), f(f(f(x_i))), ...\}.$$

Die Menge $FORM$ sei die kleinste Menge $\mathcal{X}$ mit den folgenden vier Eigenschaften:

(1) $P_j(t_1, ..., t_{m_j}) \in \mathcal{X}$ für alle $j \in J$ und alle $t_1, ..., t_{m_j} \in Term$;
($P_j(t_1, ..., t_{m_j})$ heißt **Atom**);
(2) falls $\alpha, \beta \in \mathcal{X}$, dann $(\alpha \circ \beta) \in \mathcal{X}$ für alle $\circ \in \mathfrak{J}_0 = \{\wedge, \vee, \Longrightarrow, \Longleftrightarrow\}$;
(3) falls $\alpha \in \mathcal{X}$, dann $(\neg\alpha) \in \mathcal{X}$;
(4) falls $\alpha \in \mathcal{X}$, dann $(\exists x_k \alpha) \in \mathcal{X}$ und $(\forall x_k \alpha) \in \mathcal{X}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

[15] Die Auswahl von Zeichen, die wir bereits bei der Definition gewisser Boolescher Funktionen benutzt haben, kann auch anders gewählt werden. In der Literatur üblich sind das Weglassen von $\Longleftrightarrow$ und das Hinzufügen von zwei nullstelligen Zeichen.

Die Menge $FORM$ heißt **Menge aller Formeln der Prädikatenlogik erster Stufe** der Signatur δ.[16]

Beispiele Es sei $I := \{1,2,3,4\}$, $J := \{1,2,3\}$ und $\delta := ((0,3,2,2),(1,2,2))$. Elemente aus $FORM$ sind dann u.a.
$P_1(f_2(x_1,x_2,x_3))$, $(\exists x_2 P_3(x_5,f_1))$, $P_2(f_2(x_3,x_1,f_4(x_2,x_2)),x_1)$ und $(P_1(x_5) \vee (\forall x_3 P_3(f_4(f_1,x_7))))$.
Keine Formeln aus $FORM$ sind z.B. $P_1(P_2(x_1,x_2))$ und alle Terme.
$P_1(x_1,x_2,x_3)$ gehört nicht zu $FORM$, da durch die Signatur δ für P_1 die Stelligkeit 1 festgelegt wurde.

Als vereinfachende Schreibweise vereinbaren wir: $x,y,z \in Var$, f,g,h sind Operationssymbole und P,Q,R sind Prädikatensymbole (mit in Beispielen noch festzulegenden Stelligkeiten). Außerdem lassen wir die Außenklammern bei den Formeln weg.

Man beachte, daß prädikatenlogische Formeln mit einem All- oder Existenzquantor keine Zeichen der Gestalt $x_k \in M$ enthalten. Dies wurde weggelassen, weil bei der (unten zu findenden) inhaltlichen Interpretation solcher Formeln sämtliche Variablen x_k nur Werte aus ein- und derselben Menge annehmen.

Eine Formel $\alpha \in FORM$, die bei einer möglichen rekursiven Bildung der Formel $\beta \in FORM$ vorkommt, heißt **Teilformel** von β.

Für jedes $t \in T(Var)$ bezeichne $Var(t)$ die Menge aller Elemente aus Var, die in t auftreten. Für $\varphi \in FORM$ ist die Menge $Var(\varphi)$ aller **Variablen von** φ definiert durch

- $Var(P_j(t_1,...,t_{m_j})) := Var(t_1) \cup ... \cup Var(t_{m_j})$,
- $Var(\neg\alpha) := Var(\alpha)$ und $Var(\alpha \circ \beta) := Var(\alpha) \circ Var(\beta)$ für alle $\circ \in \mathfrak{J}_0$,
- $Var(\exists x_k \alpha) = Var(\forall x_k \alpha) := Var(\alpha) \cup \{x_k\}$

$(\alpha, \beta \in FORM)$.
Die Menge $fr(\varphi)$ der **freien Variablen** von φ ist definiert durch

- $fr(\varphi) := Var(\varphi)$, falls φ ein Atom ist;
- $fr(\neg\alpha) := fr(\alpha)$ und $fr(\alpha \circ \beta) := fr(\alpha) \cup fr(\beta)$ für alle $\circ \in \mathfrak{J}_0$,
- $fr(\forall x_k \alpha) = fr(\exists x_k \alpha) := fr(\alpha) \backslash \{x_k\}$

$(\alpha, \beta \in FORM)$.
Die Menge $bd(\varphi)$ der **gebundenen Variablen von** φ ist definiert durch

- $bd(\varphi) := \emptyset$, falls φ ein Atom ist;
- $bd(\neg\alpha) := bd(\alpha)$ und $bd(\alpha \circ \beta) := bd(\alpha) \cup bd(\beta)$ für alle $\circ \in \mathfrak{J}_0$,
- $bd(\forall x_k \alpha) = bd(\exists x_k \alpha) := bd(\alpha) \cup \{x_k\}$

$(\alpha, \beta \in FORM)$.
Beispiel Für die Formel $\varphi := ((\exists x_1 P_2(x_2,x_3)) \vee (\forall x_2 P_1(x_2)))$ gilt $Var(\varphi) = \{x_1,x_2,x_3\}$, $fr(\varphi) = \{x_2,x_3\}$ und $bd(\varphi) = \{x_1,x_2\}$.

Eine Formel $\varphi \in FORM$ heißt **offene Formel**, wenn $bd(\varphi) = \emptyset$. φ ist ein **Satz** oder ist **abgeschlossen**, wenn $fr(\varphi) = \emptyset$. Offensichtlich gilt $Var(\varphi) = fr(\varphi) \cup bd(\varphi)$, jedoch ist $fr(\alpha) \cap bd(\varphi)$ nicht notwendig leer.

[16] Eine Prädikatenlogik zweiter Stufe erhält man, wenn die Quantoren nicht nur auf Variable, sondern auch auf Prädikaten- und Operationssymbole angewendet werden dürfen.

Um unseren Formeln aus $FORM$ einen Inhalt bzw. eine Interpretation zu geben, benötigen wir eine nichtleere Menge A (**Trägermenge** genannt) sowie für alle $i \in I$ und alle $j \in J$ auf A definierte Operationen $f_i^{\mathfrak{A}}$ der Stelligkeit n_i und Relationen $R_j^{\mathfrak{A}}$ der Stelligkeit m_j, die Prädikate $P_j^{\mathfrak{A}}$ induzieren. Wir setzen

$$\mathfrak{A} := (A; (f_i)_{i \in I}, (R_j)_{j \in J})$$

und nennen $\mathfrak{A}$ eine **Struktur** der Signatur δ.
Ordnet man mittels der Abbildung $u : Var \longrightarrow A$ jeder Variablen aus Var einen gewissen Wert aus A zu, kann man durch folgende Definition der Abbildung $\widetilde{u} : T(X) \longrightarrow A$ jedem Term $t \in T(Var)$ einen Wert aus A zuordnen:
(1) Falls $t \in Var$, sei $\widetilde{u}(t) := u(t)$.
(2) Falls $t = f_i(t_1, ..., t_{n_i})$, wobei $\{t_1, ..., t_{n_i}\} \subseteq T(Var)$, sei

$$\widetilde{u}(t) := f_i^{\mathfrak{A}}(\widetilde{u}(t_1), ..., \widetilde{u}(t_{n_i})).$$

Seien u, u' Abbildungen von Var in A. Wir schreiben

$$u =_{x_k} u',$$

falls $u(x_j) = u'(x_j)$ für alle $j \neq k$ $(j, k \in \mathbb{N})$.

Es sei $\mathfrak{A} := (A; (f_i)_{i \in I}, (R_j)_{j \in J})$ eine Struktur der Signatur δ und $u : Var \longrightarrow A$ eine Abbildung. Mit Hilfe der Struktur $\mathfrak{A}$ und der Abbildung u kann man jetzt wie folgt eine Abbildung (**Bewertung** genannt)

$$v_{\mathfrak{A},u} : FORM \longrightarrow \{0, 1\}$$

definieren, die jeder prädikatenlogischen Formel einen Wahrheitswert zuordnet:

- $v_{\mathfrak{A},u}(P_j(t_1, ..., t_{m_j})) = 1$ genau dann, wenn $(\widetilde{u}(t_1), ..., \widetilde{u}(t_{m_j})) \in R_j^{\mathfrak{A}}$;
- $v_{\mathfrak{A},u}(\neg\alpha) := \neg(v_{\mathfrak{A},u}(\alpha))$ und $v_{\mathfrak{A},u}(\alpha \circ \beta) := v_{\mathfrak{A},u}(\alpha) \circ v_{\mathfrak{A},u}(\beta)$ für alle $\circ \in \mathfrak{J}_0$;
- $v_{\mathfrak{A},u}(\forall x_k \varphi) = 1$ genau dann wenn $v_{\mathfrak{A},u'}(\varphi) = 1$ für alle u' mit $u =_{x_k} u'$ (wir schreiben: $v_{\mathfrak{A},u}(\forall x_k \varphi) = \bigwedge_{u',\, u =_{x_k} u'} v_{\mathfrak{A},u'}(\varphi)$);
- $v_{\mathfrak{A},u}(\exists x_k \varphi) = 1$ genau dann, wenn es ein u' mit $u =_{x_k} u'$ und $v_{\mathfrak{A},u'}(\varphi) = 1$ gibt (wir schreiben: $v_{\mathfrak{A},u}(\exists x_k \varphi) = \bigvee_{u',\, u =_{x_k} u'} v_{\mathfrak{A},u'}(\varphi)$).

Beispiele Es sei f ein einstelliges Operationssymbol, P ein einstelliges und Q ein zweistelliges Prädikatssymbol. Als Trägermenge einer Struktur $\mathfrak{A}$ wählen wir $A := \{a, b, c\}$. Außerdem sei $f^{\mathfrak{A}}(a) := b$, $f^{\mathfrak{A}}(b) := c$, $f^{\mathfrak{A}}(c) := a$, $P^{\mathfrak{A}}$ sei durch die Relation $\{b, c\}$ und $Q^{\mathfrak{A}}$ durch die Relation $\{(a, a), (b, b), (a, c), (c, b)\}$ induziert. Die drei prädikatenlogischen Formeln

$$\begin{aligned} \alpha &:= P(x) \Longrightarrow Q(f(x), y), \\ \beta &:= (\forall x\, P(x)) \Longrightarrow Q(f(x), y) \\ \gamma &:= \forall x\, (P(x) \Longrightarrow (\exists y\, Q(f(x), y))) \end{aligned}$$

haben dann die folgenden Wahrheitswerte in der Struktur $\mathfrak{A}$, wenn man $u(x) := c$ und $u(y) := a$ setzt:

$$
\begin{aligned}
v_{\mathfrak{A},u}(\alpha) &= P^{\mathfrak{A}}(u(x)) \Longrightarrow Q^{\mathfrak{A}}(f^{\mathfrak{A}}(u(x)), u(y)) \\
&= P^{\mathfrak{A}}(c) \Longrightarrow Q^{\mathfrak{A}}(f^{\mathfrak{A}}(c), a) = P^{\mathfrak{A}}(c) \Longrightarrow Q^{\mathfrak{A}}(a,a) = 1 \Longrightarrow 1 = 1, \\
v_{\mathfrak{A},u}(\beta) &= v_{\mathfrak{A},u}((\forall x\, P(x))) \Longrightarrow v_{\mathfrak{A},u}(Q(f(x),y)) \\
&= (P^{\mathfrak{A}}(a) \wedge P^{\mathfrak{A}}(b) \wedge P^{\mathfrak{A}}(c)) \Longrightarrow Q^{\mathfrak{A}}(a,a) = 1, \\
v_{\mathfrak{A},u}(\gamma) &= \textstyle\bigwedge_{u',\, u'=_x u} v_{\mathfrak{A},u'}(P(x) \Longrightarrow (\exists y\, Q(f(x),y))) \\
&= \textstyle\bigwedge_{u',\, u'=_x u}(P^{\mathfrak{A}}(u'(x)) \Longrightarrow (\bigvee_{u'',\, u''=_y u'}(Q^{\mathfrak{A}}(f^{\mathfrak{A}}(u'(x)), u''(y)))) \\
&= (P^{\mathfrak{A}}(a) \Longrightarrow (Q^{\mathfrak{A}}(f^{\mathfrak{A}}(a),a) \vee Q^{\mathfrak{A}}(f^{\mathfrak{A}}(a),b) \vee Q^{\mathfrak{A}}(f^{\mathfrak{A}}(a),c)) \wedge \\
&\quad (P^{\mathfrak{A}}(b) \Longrightarrow (Q^{\mathfrak{A}}(f^{\mathfrak{A}}(b),a) \vee Q^{\mathfrak{A}}(f^{\mathfrak{A}}(b),b) \vee Q^{\mathfrak{A}}(f^{\mathfrak{A}}(b),c)) \wedge \\
&\quad (P^{\mathfrak{A}}(c) \Longrightarrow (Q^{\mathfrak{A}}(f^{\mathfrak{A}}(c),a) \vee Q^{\mathfrak{A}}(f^{\mathfrak{A}}(c),b) \vee Q^{\mathfrak{A}}(f^{\mathfrak{A}}(c),c)) = 1.
\end{aligned}
$$

Merken wir uns: Falls φ keine Quantoren enthält, ist $v_{\mathfrak{A},u}(\varphi)$ einfach zu berechnen, indem man die Variablen durch die durch u vorgegebenen Elemente aus A ersetzt und dann den Wahrheitswert der Formel φ von innen nach außen gemäß der Interpretationen der Operationen und Prädikate in der Struktur $\mathfrak{A}$ berechnet.
Falls φ gewisse Quantoren der Art $\forall x$ oder $\exists x$ mit $x \in Var$ enthält, hat im Wirkungsbereich des Quantors (einer gewissen Teilformel von φ) die Festlegung $u(x)$ keinen Einfluß auf den Wahrheitswert der Teilformel. Gibt es in der Formel φ keine freien Variablen, hängt $v_{\mathfrak{A},u}(\varphi)$ nur von $\mathfrak{A}$ und φ ab. Man schreibt dann auch $\mathfrak{A}(\varphi)$ anstelle von $v_{\mathfrak{A},u}(\varphi)$. Bildet man eine Formel φ' aus φ, indem man eine Teilformel der Gestalt $Q\,x\,\alpha$ ($Q \in \{\forall, \exists\}$, $x \in Var$) durch $Q\,y\,\alpha'$ ersetzt, wobei $y \in Var \setminus Var(\varphi)$ und α' aus α durch das Ersetzen der freien Variablen x durch y entsteht, so gilt $v_{\mathfrak{A},u}(\varphi) = v_{\mathfrak{A},u}(\varphi')$.

$\varphi \in FORM$ wird durch $u : Var \longrightarrow A$ **erfüllt**, genau dann, wenn $v_{\mathfrak{A},u}(\varphi) = 1$.
φ ist **wahr** (oder **gültig**) in $\mathfrak{A}$ genau dann, wenn $v_{\mathfrak{A},u}(\varphi) = 1$ für alle $u : Var \longrightarrow A$ gilt.
Wir schreiben $\mathfrak{A} \models \varphi$ für „φ ist **wahr** in $\mathfrak{A}$“.
$\mathfrak{A} \not\models \varphi$ steht für „φ ist **nicht wahr** (oder **falsch**) in $\mathfrak{A}$“.
Falls $\mathfrak{A} \models \varphi$, heißt $\mathfrak{A}$ ein **Model der Formel** φ.
Gilt $\mathfrak{A} \models \sigma$ für alle $\sigma \in \Sigma \subseteq FORM$, nennen wir $\mathfrak{A}$ ein **Model der Menge** Σ.
Offenbar ist eine geschlossene Formel aus $FORM$ entweder wahr oder falsch in $\mathfrak{A}$.

Formeln $\alpha, \beta \in FORM$ heißen **äquivalent** (Bezeichnung: $\alpha \equiv \beta$) genau dann, wenn $v_{\mathfrak{A},u}(\alpha) = v_{\mathfrak{A},u}(\beta)$ für jede Struktur $\mathfrak{A}$ und für jede Abbildung $u : Var \longrightarrow A$.

Die im folgenden Satz angegebenen Beispiele für äquivalente Formel sind wichtige Hilfsmittel beim Umformulieren von Sachverhalten, die mittels prädikatenlogischer Formeln beschreibbar sind.

Satz 1.6.3 *Für beliebige $\varphi, \psi \in FORM$ gilt:*
(1) $\neg\forall x_k\varphi \equiv \exists x_k\neg\varphi$, $\neg\exists x_k\varphi \equiv \forall x_k\neg\varphi$;
(2) falls $x_k \notin fr(\psi)$, *dann* $(Qx_k\varphi) \circ \psi \equiv Qx_k(\varphi \circ \psi)$ *für alle* $Q \in \{\exists, \forall\}$ *und* $\circ \in \{\wedge, \vee\}$;
(3) $(\forall x_k\varphi) \wedge (\forall x_k\psi) \equiv \forall x_k(\varphi \wedge \psi)$,
$(\exists x_k\varphi) \vee (\exists x_k\psi) \equiv \exists x_k(\varphi \vee \psi)$;
(4) $\forall x_k(\forall x_l\varphi) \equiv \forall x_l(\forall x_k\varphi)$, $\exists x_k(\exists x_l\varphi) \equiv \exists x_l(\exists x_k\varphi)$.

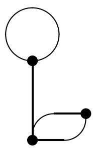
Beweis. Wir zeigen exemplarisch nur $\neg\forall x_k\varphi \equiv \exists x_k\neg\varphi$, indem wir die Allgemeingültigkeit der Formeln $\alpha := (\neg\forall x_k\varphi) \Longrightarrow (\exists x_k\neg\varphi)$ und $\beta := (\exists x_k\neg\varphi) \Longrightarrow (\neg\forall x_k\varphi)$ beweisen. Sei dazu $\mathfrak{A}$ eine beliebige zu $FORM$ passende Struktur und $u : Var \longrightarrow A$ eine beliebig gewählte Abbildung. Die Formel α ist allgemeingültig, wenn $v_{\mathfrak{A},u}(\alpha) = 1$ gilt. Angenommen, $v_{\mathfrak{A},u}(\alpha) = 0$. Dann gilt $v_{\mathfrak{A},u}(\neg\forall x_k\varphi) = 1$ und $v_{\mathfrak{A},u}(\exists x_k\neg\varphi) = 0$. Wegen $1 = v_{\mathfrak{A},u}(\neg\forall x_k\varphi) = \neg(v_{\mathfrak{A},u}(\forall x_k\varphi))$ haben wir dann $v_{\mathfrak{A},u}(\forall x_k\varphi) = 0$, womit eine Abbildung $u' : A \longrightarrow A$ mit $u' =_{x_k} u$ und $v_{\mathfrak{A},u'}(\varphi) = 0$ existiert. Folglich $\neg(v_{\mathfrak{A},u'}(\varphi)) = v_{\mathfrak{A},u'}(\neg\varphi) = 1$, im Widerspruch zu $v_{\mathfrak{A},u}(\exists x_k\neg\varphi) = 0$. Also ist α allgemeingültig. Analog zeigt man die Allgemeingültigkeit von β. ■

Der oben eingeführte Begriffsapparat ist Grundlage automatischer Beweisverfahren. Mehr dazu findet man in Büchern über Mathematische Logik (z.B. [Sch 87], [Hein-W 91], [Rau 96] und [Das 2006]).

1.7 Graphen

In den vorangegangenen Abschnitten haben wir uns mehrmals zur Veranschaulichung von Beziehungen (Relationen, Korrespondenzen, Abbildungen) zwischen Elementen von Mengen gewisser Zeichnungen bedient, in denen die Elemente durch Punkte und die Beziehungen zwischen diesen Elementen durch Verbindungsstriche oder Pfeile symbolisiert wurden. Für die Methode, sich Beziehungen zwischen irgendwelchen Objekten zeichnerisch durch Punkte und Striche zu verdeutlichen, gibt es natürlich noch viel mehr Anwendungen. So könnte man z.B. den Aufbau einer chemischen Verbindung, einen Stadtplan, ein Fernmeldenetz, den Aufbau eines Computerprogramms und vieles mehr durch solche „Diagramme“ verdeutlichen.

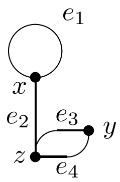
Diese vielen Anwendungen motivieren die mathematische Behandlung solcher „Punkte“ und „Striche“, die hier ganz kurz in Ansätzen vorgeführt werden soll. In späteren Abschnitten kommen wir dann hin und wieder auf diese Objekte zurück. Ausführlich behandeln wir die Graphentheorie und einige ihrer Anwendungen im Band 2. Wir beginnen mit der mathematischen Beschreibung der sogenannten ungerichteten Graphen wie z.B.



Indem man die Punkte (nachfolgend Knoten genannt) mit Buchstaben aus der Menge V (hier $\{x, y, z\}$) und die Striche (Kanten genannt) mit Elementen aus der Menge E (hier $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$) bezeichnet sowie die Verbindungen zwischen den Knoten durch gewisse Kanten durch die Abbildung

$$f : E \to V, e_1 \mapsto \{x\}, e_2 \mapsto \{x, z\}, e_3 \mapsto \{y, z\}, e_4 \mapsto \{y, z\}$$

angibt, sind sämtliche uns interessierenden Eigenschaften des obigen ungerichteten Graphen durch das Tripel (V, E, f) erfaßt:



x	$f(x)$
e_1	$\{x\}$
e_2	$\{x, z\}$
e_3	$\{y, z\}$
e_4	$\{y, z\}$

Dieses Beispiel motiviert folgende

Definition Ein **ungerichteter Graph** G ist ein Tripel $(V(G), E(G), f_G)$, bestehend aus einer nichtleeren Menge $V(G)$ von **Knoten** (bzw. **Ecken** (engl.: vertices)), einer dazu disjunkten Menge $E(G)$ von **Kanten** (engl.: edges) und einer Abbildung f_G, die jeder Kante $e \in E(G)$ die Menge $\{x, y\}$ ($x = y$ möglich!) zuordnet:

$$e \mapsto \{x, y\}.$$

In Beispielen werden wir ungerichtete Graphen meist kurz durch eine Zeichnung, die die Bezeichnungen der Knoten und Kanten enthält, angeben. Zunächst aber eine Reihe von Bezeichnungen und Begriffe für ungerichtete Graphen (mehr oder weniger Auswahl):

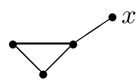
Definitionen Sei $G = (V(G), E(G), f_G)$ ein ungerichteter Graph, $e \in E(G)$ und $x, y \in V(G)$. Dann heißt bzw. sagt man:

- G ist **endlich** $:\Longleftrightarrow$ $V(G)$ und $E(G)$ sind endliche Mengen;
- e ist **Schlinge** $:\Longleftrightarrow$ $|f_G(e)| = 1$;
- e ist **Mehrfachkante** $:\Longleftrightarrow$ $\exists e' \in E(G)\backslash\{e\} : \; f_G(e) = f_G(e')$;
- G ist **einfacher** $:\Longleftrightarrow$ G besitzt keine Schlingen und Mehrfachkanten; (Einfache Graphen G lassen sich übrigens ohne Verwendung einer Abbildung f_G beschreiben:
$$G = (V(G), E(G)),$$
wobei $E(G) \subseteq \{\{a, b\} \mid a \neq b \wedge \{a, b\} \subseteq V(E)\}$.)
- e **verbindet** x und y (bzw. e ist **inzident** zu x und y bzw. x (oder y) ist **adjazent** zu y (oder x)) $:\Longleftrightarrow$ $f_G(e) = \{x, y\}$.

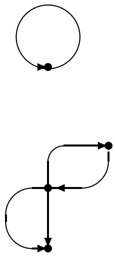
Die Anzahl der Kanten, die mit einem Knoten x inzident sind, wird **Grad** von x in G genannt und mit $d(x)$ bezeichnet. Dabei zählt man jede Schlinge als zwei Kanten! Man sagt:

- x ist **isolierter Knoten** $:\Longleftrightarrow$ $d(x) = 0$;

- x ist **Endknoten** $:\Longleftrightarrow$ $d(x) = 1$.



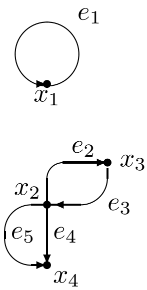
Wie oben bereits erwähnt, gibt es Modelle von Systemen, in denen anstelle von Strichen Pfeile Verwendung finden. Z.B.



Mathematisch kann man eine solche Zeichnung mit Hilfe der oben eingeführten Begriffe wie folgt beschreiben:

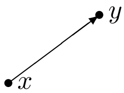
$$G = \{\{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\},\ f_G),\ \text{wobei}$$

x	$f_G(x)$
e_1	(x_1, x_1)
e_2	(x_2, x_3)
e_3	(x_3, x_2)
e_4	(x_2, x_4)
e_5	(x_2, x_4)



Verallgemeinern läßt sich dieses Beispiel wie folgt:

Definition Ein **gerichteter Graph** ist ein Tripel $(V(G), E(G), f_G)$, bestehend aus der **Knotenmenge** $V(G)$, der Menge der **gerichteten Kanten (Bögen)** $E(G)$ und der **Inzidenzabbildung** f_G, die jeder gerichteten Kante e ein geordnetes Paar $(x, y) \in V(G) \times V(G)$ zuordnet. Falls $f_G(e) = (x, y)$, so nennt man x **Ausgangsknoten** von e und y **Endknoten** von e.



Die obigen Begriffe und Bezeichnungen für ungerichtete Graphen lassen sich ohne Mühe fast alle auf gerichtete Graphen übertragen. Wir verzichten hier auf deren konkrete Angabe.

Für ungerichtete/gerichtete Graphen lassen sich folgende Begriffe einführen:

Definitionen

- $G' = (V(G'), E(G'), f_{G'})$ heißt **Teilgraph** von $G = (V(G), E(G), f_G)$ $:\Longleftrightarrow V(G') \subseteq V(G) \wedge E(G') \subseteq E(G) \wedge f_{G'} \subseteq f_G$.
- G' heißt **spannender Teilgraph** von G $:\Longleftrightarrow$ G' ist Teilgraph von $G \wedge V(G) = V(G')$.
- G ist **isomorph** zu G' $:\Longleftrightarrow$
  $\exists$ Bijektion g von $V(G)$ auf $V(G') \wedge \exists$ Bijektion h von $E(G)$ auf $E(G')$:
  $\forall e \in E(G) : f_G(e) = \{x, y\}$ (bzw. $f_G(e) = (x, y)$)
  $\Longrightarrow f_{G'}(h(e)) = \{g(x), g(y)\}$ (bzw. $f_{G'}(h(e)) = (g(e), g(y))$).

Falls G zu G' isomorph ist, schreiben wir $G \cong G'$. Die Relation $\cong$ ist offenbar eine Äquivalenzrelation auf einer Menge von Graphen.
Mit der Sprechweise „G ist isomorph zu G'" erfaßt man Graphen, die bis auf die Bezeichnung ihrer Knoten und Kanten identisch sind.
Beispiel Seien G und G' ungerichtete Graphen, die durch folgende Skizzen definiert sind:

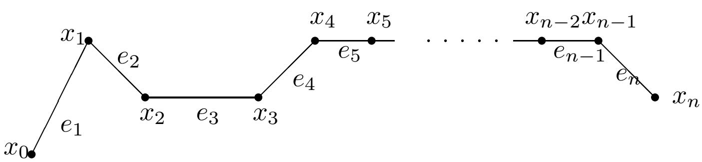
G ist zu G' isomorph, da obige Definition für die Abbildungen

$$g: \quad \begin{aligned} x_1 &\mapsto x'_3 \\ x_2 &\mapsto x'_1 \\ x_3 &\mapsto x'_2 \end{aligned} \qquad\qquad h: \quad \begin{aligned} e_1 &\mapsto e'_4 \\ e_2 &\mapsto e'_3 \\ e_3 &\mapsto e'_1 \\ e_4 &\mapsto e'_2 \end{aligned}$$

erfüllt ist.

Definitionen

$x_0 e_1 x_1 e_2 x_2 e_3 x_3 \ldots e_n x_n$ heißt **Kantenfolge** (bzw. **gerichtete Kantenfolge**) von x_0 nach x_n der Länge n des gerichteten Graphen (bzw. des ungerichteten Graphen) $G :\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} : & f_G(e_i) = \{x_{i-1}, x_i\} \\ & (\text{bzw. } f_G(e_i) = (x_{i-1}, x_i)). \end{array} \right.$



Die Kantenfolge nennt man **offen**, wenn $x_0 \neq x_n$. Sie heißt **geschlossen**, wenn $x_0 = x_n$ ist.

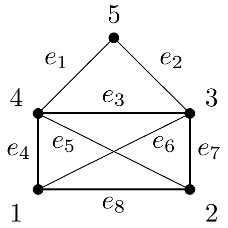
Man nennt die Kantenfolge (bzw. gerichtete Kantenfolge) $x_0e_1 \ldots e_nx_n$ **Weg** (bzw. **gerichteten Weg** oder **Bahn**), wenn sie offen ist und alle $x_0, \ldots, x_n$ paarweise verschieden sind. Eine Kantenfolge (bzw. gerichtete Kantenfolge) wird **Kreis** (bzw. **gerichteter Kreis** oder **Zyklus**) genannt, wenn sie geschlossen ist und alle $x_0, \ldots, x_{n-1}$ paarweise verschieden sind.
Außerdem:
Ein ungerichteter Graph G heißt **zusammenhängend** $:\Longleftrightarrow$
$\forall x, y \in V(G)\ \exists$ Kantenfolge von x nach y.
Ein gerichteter Graph G heißt **stark zusammenhängend** $:\Longleftrightarrow$
$\forall x, y \in V(G)\ \exists$ gerichtete Kantenfolge von x nach y.

Abschließend noch zwei Beispiele (nicht repräsentativ!) dafür, was in der Graphentheorie untersucht bzw. welche Sätze erhalten wurden. Dabei betrachten wir nur ungerichtete Graphen. Wir beginnen mit den **Eulerschen Linien**.
Eine Kantenfolge $K := x_0e_1x_1e_2 \ldots e_nx_n$ heißt **offene** (bzw. **geschlossene**) **Eulersche Linie** des ungerichteten Graphen G, falls gilt:

$$\{e_1, \ldots, e_n\} = E(G)\ \wedge\ (\forall i \neq j :\ e_i \neq e_j)\ \wedge\ (x_0 \neq x_n \text{ (bzw. } x_0 = x_n)).$$

Z.B. besitzt der Graph

G:



die offene Eulersche Linie $1e_63e_34e_15e_23e_72e_81e_44e_52$.
Folgendes Kriterium für die Existenz Eulerscher Linien wurde von L. Euler 1741 erhalten:
Sei G ein zusammenhängender ungerichteter Graph. Dann gilt: G besitzt genau dann eine offene (bzw. geschlossene) Eulersche Linie, wenn genau zwei Knoten von G einen ungeraden Grad haben (bzw. wenn $d(x)$ für alle $x \in V(G)$ gerade ist).
Bewiesen wird dieser Satz im Band 2.

Die nachfolgenden Verfahren zur **Konstruktion von Minimalgerüsten** findet man ebenfalls im Band 2 ausführlich erläutert. Ausgangspunkt ist z.B. folgendes **Problem**:
Geplant ist der Bau neuer Gebäude, die mit Energie (z.B. Gas, Strom, Dampf) versorgt werden sollen. Die Kosten für die Herstellung möglicher Leitungsverbindungen zwischen den Gebäuden seien bekannt. Wie findet man ein kostenoptimales Leitungsnetz, das alle Gebäude versorgt, vorausgesetzt, daß eine Zuleitung pro Gebäude genügt und die Länge des Weges von einer Energiequelle zum Gebäude keine Rolle spielen soll?

Ein zugehöriges **Graphenmodell** sieht so aus:
Knoten sind die zu versorgenden Gebäude, (ungerichtete) Kanten sind die möglichen Leitungsverbindungen zwischen den Gebäuden a_i und a_j, die mit den Herstellungskosten α_k bewertet werden:

$$\begin{tikzcd} a_i \arrow[rr, dash, "\alpha_k"] & & a_j \end{tikzcd}$$

Exakt läßt sich dies mittels einer „Kostenfunktion“

$$\alpha : E(G) \to \mathbb{R}$$

beschreiben.
Der sich ergebende Graph G ist offenbar zusammenhängend. Da geschlossene Kantenfolgen überflüssige Verbindungen liefern, welche die Kosten erhöhen, muß also ein zusammenhängender, kreisloser, spannender Teilgraph (ein sogenanntes **Gerüst**) gefunden werden, dessen Kantenbewertungssumme minimal ist, d.h., wir haben ein sogenanntes **Minimalgerüst** aufzufinden. Nachfolgend sind zwei Verfahren angegeben, die unter der Voraussetzung, daß die Kanten paarweise verschiedene Kantenbewertungen besitzen, jeweils eine eindeutige Lösung liefern. Bei der Beschreibung dieser Verfahren wird die anschauliche Darstellung der Graphen zu Grunde gelegt.
Erstes Verfahren:
Man starte mit der Kante niedrigster Bewertung und füge solange als möglich die jeweils minimal bewertete Kante hinzu, die mit den bereits gewählten Kanten einen zusammenhängenden Graphen, aber keinen Kreis bildet.

Zweites Verfahren:

(1.) Man bilde den Teilgraphen G_1 von G, wobei $V(G_1) = V(G)$ und $E(G_1)$ aus den Kanten jedes Knoten aus $V(G)$ zu seinen nächsten Nachbarn (das sind Knoten, zu denen Kanten mit der kleinsten Bewertung führen, die von dem betrachteten Knoten ausgehen) besteht. Falls G_1 zusammenhängend ist, bildet G_1 das gesuchte Minimalgerüst.

(2.) Ist G_1 nicht zusammenhängend, so ersetze man jede Komponente (das ist ein zusammenhängender Teilgraph, der nicht Teilgraph eines anderen zusammenhängenden Teilgraphen ist) von G_1 durch einen einzigen Knoten und bildet einen Graphen G_2, in dem zwei Knoten durch eine Kante verbunden werden, sofern in $E(G)$ eine Kante zwischen den entsprechenden Komponenten existiert. Gewählt wird dabei die Kante mit minimaler Bewertung.

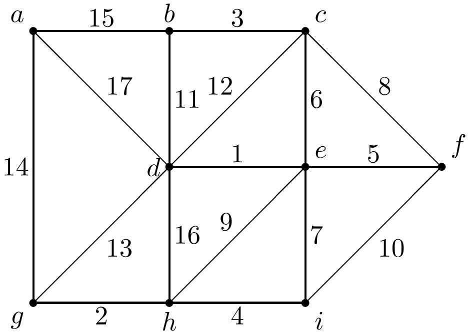
(3.) Ist G_2 zusammenhängend und kreislos, so ist man fertig.
$G_3 := (V(G), E(G_1) \cup E(G_2), f_{G_3})$ mit $f_{G_3}(e) := f_G(e)$ für $e \in E(G_1) \cup E(G_2)$ ist ein gesuchtes Minimalgerüst.
Besteht G_2 aus ≥ 2 Komponenten oder besitzt Kreise, so verfahre man mit G_2 wie mit G in (1.) und (2.).

Zwecks Illustration der obigen Verfahren wollen wir abschließend ein Minimalgerüst für den Graphen G mit

$$V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\},$$

$$\begin{aligned} E(G) &= \{\{a,b\},\{a,d\},\{a,g\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\},\{c,e\},\{c,f\},\{d,e\},\\ &\quad \{d,g\},\{d,h\},\{e,f\},\{e,h\},\{e,i\},\{f,i\},\{g,h\},\{h,i\}\} \end{aligned}$$

und $f_G = \mathrm{id};_E(G)$ sowie den Kosten (Kantenbewertungen) $\alpha(\{a,b\}) = 15$, $\alpha(\{a,d\}) = 17$, ... (siehe Zeichnung) ermitteln.

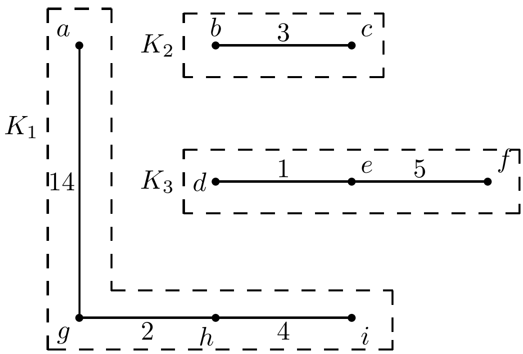


Das erste Verfahren verläuft dann wie folgt:

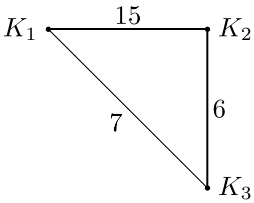
Beginn mit $\{d, e\}$ (kleinste Bewertung!).
Fortsetzung mit $\{e, f\}$ (wiederum kleinste Bewertung!).
Weitere Fortsetzungen sind: $\{c, e\}$, $\{b, c\}$, $\{e, i\}$, $\{h, i\}$, $\{g, h\}$.
$\{c, f\}$, $\{e, h\}$, $\{f, i\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$, $\{d, g\}$ entfallen wegen Kreisverbot.
Fortsetzung mit $\{a, g\}$.
Abbruch, da alle Knoten erfaßt sind!
Als Minimalgerüst erhalten wir
$G' = (V(G); \{\{a, g\}, \{b, c\}, \{c, e\}, \{d, e\}, \{e, f\}, \{e, i\}, \{g, h\}, \{h, i\}\})$.

Dieses Gerüst ergibt sich auch bei Anwendung des zweiten Verfahrens. Dabei auftretende Zwischenschritte sind:

(1)



(2)



(1′)